

Elettricità e Ottica - La luce e le teorie elettrodinamiche  
Lezioni tenute alla Sorbona nel 1888, 1890, 1899  
Henri Poincaré  
2a edizione  
Parigi - 1901

## Avvertenze

Questo libro contiene il riassunto delle lezioni da me tenute alla Sorbona nel 1888, 1890 e 1899. I miei corsi del 1888 e del 1890 sono già stati pubblicati, ma essendo l'edizione esaurita, non credo sia inutile ristamparla con qualche rifacimento e modifiche. Non ho soppresso solo ciò che si riferiva alle esperienze di Hertz; poiché ho avuto l'occasione di ritornare con molti dettagli su di esse in una serie di lezioni riprodotte nel mio lavoro intitolato *le Oscillazioni elettriche*. Il resto di queste lezioni riempie la prima parte del volume dove si trovano esposte le teorie di Maxwell e di Helmholtz e ho inoltre richiamato i principi essenziali di quelle di Ampère e di Weber. Questa prima parte contiene quindi tutto ciò che si riferisce all'elettrodinamica dei corpi in quiete.

La seconda parte contiene le mie lezioni del 1899 che non erano state ancora pubblicate e che sono stati scritte dal signor Néculcéa, al quale sono molto felice di rivolgere qui tutti i miei ringraziamenti. Ho confrontato le diverse teorie relative all'elettrodinamica dei corpi in movimento di cui le principali sono quelle di Hertz, Lorentz e Larmor.

Benché nessuna di queste teorie sembri pienamente soddisfacente, ognuna di esse contiene senza dubbio una parte di verità e il confronto può essere istruttivo.

Tra tutte, quella di Lorentz mi sembra quella che descrive al meglio i fatti.

Dall'inizio della stampa sono arrivati gli esperimenti del signor Crémieu che forse modificheranno completamente le nostre idee sull'elettrodinamica dei corpi in movimento. Ma sono ancora troppo recenti perché da essi possa emergere una nuova teoria. Probabilmente se ne discuterà molto e qualsiasi tentativo di trarne una conclusione sarebbe prematuro.

## Introduzione

La prima volta che un lettore francese apre il libro di Maxwell, un sentimento di malessere, e spesso anche di diffidenza si mescola dapprima alla sua ammirazione. È solo dopo uno scambio prolungato e a costo di molti sforzi che questa sensazione si dissipa. Alcune menti eminenti addirittura lo conservano sempre.

Perché le idee dello scienziato inglese fanno così tanta fatica ad adattarsi a noi? Ciò è indubbiamente dovuto al fatto che l'educazione ricevuta dai francesi più illuminati li dispone ad apprezzare la precisione e la logica sopra ogni altra qualità.

Le vecchie teorie della fisica matematica ci fanno sotto questo aspetto una completa soddisfazione. Tutti i nostri maestri, dopo Laplace fino a Cauchy hanno proceduto nello stesso modo. Partendo da ipotesi nettamente enunciate, hanno dedotto tutte le conseguenze con un rigore matematico, e le hanno confrontate poi con l'esperienza. Essi sembrano voler dare a ogni ramo della Fisica la stessa precisione della Meccanica Celeste.

Per una mente abituata ad ammirare tali modelli, una teoria è difficilmente soddisfacente. Non solo non tollererà il minimo aspetto di contraddizione, ma esigerà che le diverse parti siano direttamente connesse tra loro e che il numero delle ipotesi distinte sia ridotto al minimo.

Non è tutto, avrà ancora altre esigenze non meno ragionevoli. Dietro la materia che i nostri sensi raggiungono e che l'esperienza ci fa conoscere, vorrà vedere un'altra materia, l'unica vera ai suoi occhi, che avrà solo qualità puramente geometriche e i cui atomi non saranno altro

che punti matematici soggetti solo alle leggi della Dinamica. Eppure questi atomi indivisibili e incolori, cercherà, attraverso una contraddizione inconscia, di rappresentarsi e di conseguenza di avvicinarli il più possibile alla materia comune.

Solo allora sarà pienamente soddisfatto e immaginerà di aver penetrato il segreto dell'Universo. Se questa soddisfazione è ingannevole, non è meno doloroso rinunciarvi.

Così, aprendo Maxwell, un francese si aspetta di trovarvi un insieme teorico altrettanto logico e preciso quanto l'ottica fisica fondata sull'ipotesi dell'etere; si prepara così una delusione che vorrei evitare al lettore avvertendolo subito di ciò che deve cercare in Maxwell e di ciò che non vi può trovare.

*Maxwell non fornisce una spiegazione meccanica dell'elettricità e del magnetismo; egli si limita a dimostrare che questa spiegazione è possibile.*

Mostra anche che i fenomeni ottici sono solo un caso speciale di fenomeni elettromagnetici. Da qualunque teoria dell'elettricità si può quindi immediatamente dedurre una teoria della luce.

L'inverso non è sfortunatamente vero; da una spiegazione completa della luce, non è sempre facile trarre una spiegazione completa dei fenomeni elettrici. Ciò non è facile, in particolare, se vogliamo partire dalla teoria di Fresnel; ciò non sarebbe certamente impossibile; ma finiamo tuttavia per chiederci se non saremo costretti a rinunciare a risultati ammirevoli che credevamo definitivamente acquisiti. Questo sembra un passo indietro; e molte buone menti non vogliono rassegnarsi.

Quando il lettore avrà accettato di limitare in questo modo le sue speranze, si troverà ad affrontare altre difficoltà; lo studioso inglese non cerca di costruire un edificio unico, definitivo e ben ordinato, sembra piuttosto che stia erigendo un gran numero di costruzioni provvisorie e indipendenti, tra le quali le comunicazioni sono difficili e talvolta impossibili.

Prendiamo come esempio il capitolo in cui si spiegano le attrazioni elettrostatiche mediante pressioni e tensioni che regnerebbero nel mezzo dielettrico. Questo capitolo potrebbe essere soppresso senza che il resto del volume diventi meno chiaro e meno completo, e d'altronde contiene una teoria in sé sufficiente e si potrebbe capirla senza aver letto nemmeno una delle righe precedenti o successive. Ma non solo è indipendente dal resto dell'opera; è difficile conciliarlo con le idee fondamentali del libro, come una trattazione dettagliata mostrerà più avanti; Maxwell non tenta nemmeno questa conciliazione, si limita a dire: *non sono stato in grado di fare il passo successivo, cioè, spiegare con considerazioni meccaniche queste tensioni nel dielettrico* (2a edizione t. I. pag. 154).

Basterà questo esempio per far comprendere il mio pensiero; Potrei citarne molti altri. Così, chi dubiterà, leggendo le pagine dedicate alla polarizzazione rotatoria magnetica, che esista identità tra fenomeni ottici e magnetici?

Non ci si deve quindi vantare di evitare ogni contraddizione; ma bisogna prenderne parte. Due teorie contraddittorie possono infatti, a patto di non mescolarle, e di non cercare la radice delle cose, essere entrambe utili strumenti di ricerca, e forse lo sarebbe la lettura di Maxwell – meno suggestiva se non ci avesse aperto così tante nuove strade divergenti.

Ma l'idea fondamentale è così un po' mascherata. È così bello che nella maggior parte delle opere di divulgazione è l'unico punto completamente tralasciato. Ritengo quindi necessario, per evidenziarne meglio l'importanza, spiegare in questa introduzione in cosa consiste questa idea fondamentale.

In tutti i fenomeni fisici, vi è un certo numero di parametri che l'esperienza ottiene direttamente mediante la misurazione.

Io le chiamo

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

L'osservazione ci fa poi conoscere le leggi delle variazioni di questi parametri e queste leggi possono in genere mettere nella forma di equazioni differenziali che collegano tra loro le  $q$  col tempo.

Cosa bisogna fare per dare un'interpretazione meccanica di un simile fenomeno? Cercheremo di spiegarlo sia con i moti della materia ordinaria, sia con quelli di uno o più ipotetici fluidi.

Questi fluidi saranno considerati come formati da un grande numero di molecole isolate; siano  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , le masse di queste molecole; siano  $x_i, y_i, z_i$  le coordinate della molecola  $m_i$ .

Si dovrà inoltre supporre che vi è una conservazione dell'energia e di conseguenza che esiste una certa funzione  $-U$  di  $3p$  coordinate  $x_i, y_i, z_i$  che svolge il ruolo di funzione delle forze. Le  $3p$  equazioni del moto si scriveranno allora:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -\frac{dU}{dx_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -\frac{dU}{dy_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -\frac{dU}{dz_i} \end{aligned} \quad (1)$$

L'energia cinetica del sistema è uguale a

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

L'energia potenziale è uguale a  $U$  e l'equazione che esprime la conservazione dell'energia si scrive\_

$$T + U = \text{costante}$$

Si avrà quindi una spiegazione meccanica completa del fenomeno, quando si conoscerà da un lato la funzione delle forze  $-U$  e quando si sapranno esprimere le  $3p$  coordinate  $x_i, y_i, z_i$  in funzione degli  $n$  parametri  $q$ .

Se sostituiamo queste coordinate con le loro espressioni in funzione delle  $q$ , le equazioni (1) assumono un'altra forma. L'energia potenziale  $U$  diverrà una funzione delle  $q$ ; quanto all'energia cinetica  $T$ , essa dipenderà non solo dalle  $q$ , ma dalle loro derivate  $q'$  e sarà omogenea e di secondo grado rispetto a queste derivate. Le leggi del moto saranno allora espresse dalle equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'_k} - \frac{dT}{dq_k} + \frac{dU}{dq_k} = 0 \quad (2)$$

Se la teoria è valida, queste (2) dovranno essere identiche alle leggi sperimentali direttamente osservate.

In tal modo, affinché sia possibile una spiegazione meccanica di un fenomeno, si devono poter trovare due funzioni  $U$  e  $T$ , dipendenti, la prima dai soli parametri  $q$ , la seconda da questi parametri e dalle loro derivate; inoltre,  $T$  deve essere omogeneo del secondo ordine rispetto a queste derivate e che le equazioni differenziali dedotte dall'esperienza si possano scrivere nella forma (2).

Il reciproco è vero; tutte le volte che si potranno trovare queste due funzioni  $T$  e  $U$ , si sarà certi che il fenomeno è passibile di una spiegazione meccanica.

Siano infatti  $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $T(q'_1, q'_2, \dots, q'_n; \dots, q_1, q_2, \dots, q_n)$  o più semplicemente  $U(q_k)$  e  $T(q'_k, q_k)$ , queste due funzioni.

Cosa rimane da fare per ottenere la spiegazione completa?

Rimane da trovare  $p$  costanti  $m_1, m_2, \dots, m_p$ ; e  $3p$  funzioni di  $q$ :

$$\varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

dove

$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

o più brevemente

$$\varphi_i(q_k) \quad \psi_i(q_k) \quad \theta_i(q_k)$$

che si possano considerare come le masse e le coordinate

$$x_i = \varphi_i \quad y_i = \psi_i \quad z_i = \theta_i$$

delle  $p$  molecole del sistema.

Perciò queste funzioni dovranno soddisfare alla seguente condizione; si dovrà avere identicamente

$$T(q'_k, q_k) = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{2} \sum m_i (\varphi_i'^2 + \psi_i'^2 + \theta_i'^2)$$

dove:

$$\phi'_i = q'_1 \frac{d\varphi_i}{dq_1} + q'_2 \frac{d\varphi_i}{dq_2} + \dots + q'_n \frac{d\varphi_i}{dq_n}, \text{ ecc}$$

Siccome il numero  $p$  può essere grande a piacere, si può sempre soddisfare a questa equazione e ciò in una infinità di modi.

Poiché esistono le funzioni  $U(q_k)$ ,  $T(q'_k, q_k)$ , è possibile trovare un'infinità di spiegazioni meccaniche del fenomeno.

*Se quindi un fenomeno comporta una spiegazione meccanica completa, ne comporterà un'infinità di altre che renderanno anche conto di tutte le particolarità rivelate dall'esperienza.*

Quanto detto è confermato dalla storia di tutte le parti della Fisica; in ottica per esempio, Fresnel crede la vibrazione perpendicolare al piano di polarizzazione; Neumann la considera come parallela a questo piano. Si è cercato a lungo un "experimentum crucis" che permette di decidere tra queste due teorie e non li si è potuto trovare.

Allo stesso modo, senza uscire dal campo dell'elettricità, possiamo constatare che la teoria dei due fluidi e quella del fluido unico rendono conto entrambe in modo egualmente soddisfacente di tutte le leggi osservate in elettrostatica.

Tutti questi fatti sono facilmente spiegabili grazie alle proprietà delle equazioni di Lagrange che ho appena richiamato. È facile comprendere ora quale sia l'idea fondamentale di Maxwell.

*Per dimostrare la possibilità di una spiegazione meccanica dell'elettricità, non dobbiamo preoccuparci di trovare questa spiegazione da sola, basta conoscere l'espressione delle due funzioni  $T$  e  $U$  che sono le due parti dell'energia, per formare le equazioni di Lagrange con queste due funzioni e poi confrontare queste equazioni con le leggi sperimentali.*

Tra tutte queste possibili spiegazioni, come possiamo fare una scelta quando ci manca il soccorso dell'esperienza? Verrà forse un giorno in cui i fisici perderanno interesse per queste questioni, inaccessibili ai metodi positivi, e le abbandoneranno ai metafisici. Questo giorno non è arrivato; l'uomo non si rassegna così facilmente a ignorare eternamente il fondo delle cose.

La nostra scelta non può quindi che essere guidata da considerazioni dove la parte di apprezzamento personale è molto grande; Ci sono però soluzioni che tutti rifiuteranno per la loro stranezza e altre che tutti preferiranno per la loro semplicità.

Per quanto riguarda l'elettricità e il magnetismo Maxwell si astiene da qualsiasi scelta. Non è che disprezzi sistematicamente tutto ciò che non può essere ottenuto con metodi positivi; il tempo che dedicò alla teoria cinetica dei gas ne è una prova sufficiente. Aggiungo che se nella sua grande opera non sviluppa alcuna spiegazione completa, aveva precedentemente tentato di darne una in un articolo sulla *Philosophical Magazine*. La stranezza e la complessità delle ipotesi che era stato costretto a formulare lo indussero successivamente a rinunciarvi.

Lo stesso spirito si ritrova in tutta l'opera. Ciò che è essenziale, cioè ciò che deve restare comune a tutte le teorie, viene messo in luce; tutto ciò che si adatta solo a una particolare teoria viene quasi sempre passato sotto silenzio. Il lettore si trova così al cospetto di una forma quasi vuota della materia che è tentato di prendere in un primo momento per un'ombra fugace e inafferrabile. Ma gli sforzi ai quali è così condannato lo costringono a pensare e finisce per comprendere ciò che spesso c'era un po' di artificiale negli insiemi teorici che un tempo ammirava.

È nel campo dell'elettrostatica che il mio compito era più difficile; ciò soprattutto dove manca la precisione. Uno degli studiosi francesi che hanno esplorato più a fondo l'opera di Maxwell mi disse un giorno: "Capisco tutto nel suo libro, tranne che cosa è una palla elettrizzata". Ho quindi ritenuto necessario soffermarmi a lungo su questa parte della scienza. Non volevo mantenere alla definizione di spostamento elettrico questa sorta di indeterminatezza che è causa di tutte le sue oscurità; Inoltre non volevo, chiarendo il pensiero dell'autore, andare oltre e di conseguenza tradirlo.

Ho deciso di presentare successivamente due teorie complete, ma del tutto diverse. Spero che il lettore possa così distinguere facilmente ciò che è comune a queste due teorie e di conseguenza ciò che in esse è essenziale. Verrà inoltre avvertito che nessuna delle due rappresenta il fondo delle cose. Nella prima ammetto l'esistenza di due fluidi, l'elettricità e il fluido induttore, che possono essere utili quanto i due fluidi di Coulomb, ma che non hanno più realtà oggettiva. Allo stesso modo, l'ipotesi della struttura cellulare dei dielettrici ha il solo scopo di far comprendere meglio l'idea di Maxwell avvicinandola a idee a noi più familiari. Così facendo, non aggiungo e non tolgo nulla al pensiero dell'autore inglese; perché è importante osservare che Maxwell non considerò mai "cosa possiamo chiamare uno spostamento elettrico" come un moto reale di una materia reale.

Sono molto grato al signor Blondin che è stato così gentile da raccogliere e trascrivere le lezioni che ho tenuto durante il semestre estivo del 1888, come aveva già fatto per quelle che avevo dedicato all'ottica fisica.



## **Parte I.**

# **Le teorie di Maxwell e la teoria elettromagnetica della luce**



# 1. Formule dell'elettrostatica

1. Prima di intraprendere l'esposizione delle idee di Clerk Maxwell sull'elettricità, inizieremo a riassumere le ipotesi fondamentali delle teorie attualmente in uso e richiameremo i teoremi generali dell'elettricità statica, introducendo nelle formule le notazioni di Maxwell.

## 2. Teorie dei fluidi

Nella teoria *dei due fluidi*, i corpi che non sono elettrizzati, cioè che si trovano allo stato neutro, sono supposti carichi di uguali quantità di elettricità positiva e negativa. Si ammette inoltre che queste quantità sono abbastanza grandi perché nessun processo di elettrizzazione possa rimuovere tutta l'elettricità di un corpo, dell'uno o dell'altro tipo.

3. Dalle esperienze di Coulomb e dalla definizioni delle quantità di elettricità, risulta che due corpi posti in aria e carichi delle quantità di elettricità  $m$  e  $m'$ , esercitino tra loro una forza data dall'espressione

$$F = -f \frac{mm'}{r^2} \quad (1)$$

dove  $r$  indica la distanza tra i due corpi elettrizzati, supposta molto grande rispetto alle loro dimensioni. Un valore negativo di  $F$  indica una repulsione tra i corpi; a un valore positivo corrisponde una forza attrattiva.  $f$  è un coefficiente numerico il cui valore dipende dall'unità adottata per la misura delle quantità di elettricità.

## 4. Teoria del fluido unico

Nella teoria *del fluido unico*, alla quale si collega la teoria di Maxwell, un corpo allo stato neutro è supposto contenere una certa quantità di elettricità positiva. Quando un corpo contiene una quantità di elettricità positiva maggiore di questa carica normale, è detto carico positivamente; nel caso contrario, è carico negativamente.

Per spiegare le attrazioni e le repulsioni elettriche in questa teoria, si ammette che le molecole di elettricità si respingono, che anche le molecole di materia si respingono, mentre al contrario esiste attrazione tra le molecole d'elettricità e di materia. Si suppone che queste attrazioni e repulsioni si esercitino anche lungo la linea che congiunge le molecole ed in proporzione inversa al quadrato della distanza.

In queste condizioni, la quantità di elettricità positiva contenuta in un corpo allo stato neutro deve essere tale che la repulsione che esso esercita su una molecola elettrica esterna al corpo sia uguale all'attrazione esercitata su tale molecola dalla materia del corpo.

## 5. Espressione della forza elettrica nella teoria del fluido unico

Le forze che agiscono tra due corpi elettrizzati sono allora quattro: quella che si esercita tra le cariche elettriche, la repulsione della materia che costituisce i corpi, infine le due attrazioni che avvengono tra l'elettricità che carica uno dei corpi e la materia che forma l'altro. Se indichiamo con  $r$  la distanza che separa i corpi, con  $\mu$  e  $\mu'$  le loro rispettive cariche elettriche, e con  $\nu$  e  $\nu'$  le loro masse materiali, avremo

$$-\alpha \frac{\nu\nu'}{r^2}$$

per le attrazioni tra l'elettricità e la materia,

$$\beta \frac{\nu \mu'}{r^2} \quad e \quad \beta \frac{\nu' \mu}{r^2}$$

per la repulsione tra le cariche elettriche

$$-\gamma \frac{\mu \mu'}{r^2}$$

La risultante delle forze sarà

$$F = \frac{1}{r^2} \left[ \gamma \left( \mu - \frac{\nu \beta}{\gamma} \right) \left( \mu' - \frac{\nu' \beta}{\gamma} \right) + \nu \nu' \left( \alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \right) \right] \quad (2)$$

Questa è l'espressione generale della forza che si esercita tra due corpi elettrizzati. Essa si deve ridurre all'attrazione newtoniana, quando i corpi considerati sono allo stato neutro. Ciò avverrà se la carica normale di un corpo allo stato neutro vale  $\frac{\nu \beta}{\gamma}$  e se, poiché la forza deve essere attrattiva, si ha  $\alpha < \frac{\beta^2}{\gamma}$ .

6. Se indichiamo con  $m$  l'eccesso di carica di un condensatore elettrizzato sulla sua carica normale allo stato neutro, la formula (2) diviene

$$F = -\gamma \frac{mm'}{r^2} + \left( \frac{\beta^2}{\gamma} - \alpha \right) \frac{\nu \nu'}{r^2}$$

Essa si riduce alla (1) quando si lascia da parte l'attrazione newtoniana. La teoria del fluido unico porta quindi per le attrazioni e le repulsioni elettriche alla stessa espressione della teoria dei due fluidi. Tutte le conseguenze della formula (1) sussistono di conseguenza nella teoria del fluido unico.

## 7. Unità elettrostatica di quantità

Tramite la scelta di una unità opportuna di quantità di elettricità, si può fare in modo che il coefficiente numerico  $f$  della formula (1) divenga uguale a 1. L'unità di quantità così scelta è *l'unità elettrostatica di quantità di elettricità*; è la quantità di elettricità che, agendo su una quantità uguale posta nell'aria all'unità di distanza, esercita su di essa una forza uguale all'unità di forza.

Si ha allora per il valore della forza che si esercita tra due masse elettriche  $m$  e  $m'$  poste nell'aria a una distanza  $r$ ,

$$F = -\frac{mm'}{r^2} \quad (3)$$

## 8. Potenziale. Componenti della forza elettrica

Si chiama potenziale in un punto, *il lavoro della forza elettrica agente sull'unità di elettricità positiva quando questa va dal punto considerato all'infinito*.

Nel caso particolare in cui le masse elettriche sono distribuite nell'aria, il potenziale vale  $\sum \frac{m_i}{r_i}$ , essendo  $r_i$  la distanza del punto considerato dalla massa  $m_i$  ed estendendosi la sommatoria a tutte le masse elettriche del campo.

Indicheremo con  $\psi$  il potenziale in un punto P, per uniformarci alla notazione di Maxwell.

Se in P si trova una massa elettrica uguale a  $m'$ , le componenti lungo tre assi di coordinate della risultante delle azioni elettrostatiche che si esercitano su P, sono

$$-m' \frac{d\psi}{dx} \quad -m' \frac{d\psi}{dy} \quad -m' \frac{d\psi}{dz}$$

9. Se si suppone il punto P all'interno di un conduttore omogeneo e in equilibrio elettrico la risultante delle azioni elettrostatiche che si esercitano su questo punto deve essere nulla, poiché altrimenti non vi sarebbe più equilibrio. Le derivate parziali del potenziale  $\frac{d\psi}{dx}$ ,  $\frac{d\psi}{dy}$ ,  $\frac{d\psi}{dz}$  sono pertanto nulle; di conseguenza il potenziale è costante all'interno di un conduttore.

## 10. Flusso di forza

Consideriamo un elemento di superficie  $d\omega$  e da un punto G (fig. 1) di questo elemento tracciamo la semi normale GN in un verso qualsiasi che assumeremo come positivo. Una massa unitaria di elettricità posta in questo punto sarà sottoposta a una forza GF la cui proiezione su Gn vale

$$-\left(\alpha \frac{d\psi}{dx} + \beta \frac{d\psi}{dy} + \gamma \frac{d\psi}{dz}\right)$$

essendo  $\psi$  il potenziale in G e  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori della semi normale GN.

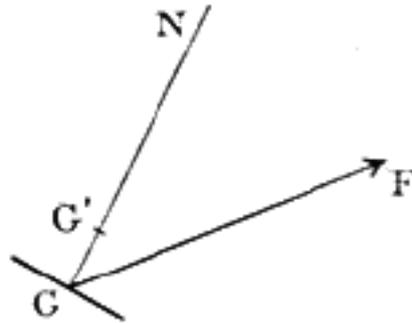


Fig. 1.

Questa espressione si può anche scrivere

$$-\frac{d\psi}{dn}$$

dove  $dn$  indica una lunghezza infinitamente piccola GG' portata nel verso positivo della normale e  $d\psi$  la variazione del potenziale quando si passa dal punto G al punto G'.

Il prodotto

$$-\frac{d\psi}{dn}d\omega$$

di questa forza per l'elemento di superficie  $d\omega$  è ciò che chiameremo *il flusso della forza attraverso l'elemento  $d\omega$* . Il *flusso di forza attraverso una superficie finita* sarà l'integrale

$$\int -\frac{d\psi}{dn}d\omega$$

esteso a tutti gli elementi di superficie.

## 11. Teorema di Gauss

Quando la superficie è chiusa il valore assoluto di questo integrale è  $4\pi M$ , con  $M$  la quantità totale di energia di elettricità libera contenuta all'interno della superficie; il segno dipende dalla scelta della direzione positiva della normale. Se si conviene di prendere per direzione positiva della normale in un punto della superficie quella che è esterna alla superficie, il flusso vale  $4\pi M$ ; si dice allora che il flusso *esce* dalla superficie. Si può quindi enunciare il seguente teorema:

Il flusso di forza uscente da una superficie chiusa all'interno della quale si trova una quantità di elettricità libera  $M$  è uguale a  $+4\pi M$ .

## 12. Relazione di Poisson

Esiste tra la densità elettrica cubica  $\rho$  in un punto di un corpo elettrizzato e le derivate seconde del potenziale in questo punto una relazione importante dovuta a Poisson. Essa si ottiene molto semplicemente scrivendo che, dal teorema precedente, il flusso di forza che entra attraverso un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo, di lati  $dx, dy, dz$ , contenente il punto considerato è uguale a  $-4\pi\rho dx dy dz$ . Si ha allora

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = -4\pi\rho$$

Maxwell indica il primo membro di questa relazione con  $\Delta^2\psi$ , notazione che si collega alla teoria dei quaternioni di cui Maxwell fa un uso costante. Continueremo a indicare questa somma di derivate secondo l'usuale notazione  $\Delta\psi$ .

Essendo il potenziale costante all'interno di un conduttore, si ha  $\Delta\psi = 0$  e quindi, dalla relazione di Poisson,  $\rho = 0$ . All'interno di un conduttore non vi è quindi elettricità libera.

Un'altra conseguenza della relazione di Poisson è che in tutti i punti del dielettrico dove non vi è elettricità libera si ha  $\Delta\psi = 0$ . Di conseguenza, il potenziale è una funzione costante all'interno di un conduttore, tendente a zero all'infinito e tale che si ha  $\Delta\psi = 0$  in tutti i punti non elettrizzati di un dielettrico.

## 13. Flusso di induzione

Quando il dielettrico che separa i conduttori è un corpo diverso dall'aria, i fenomeni elettrici misurabili cambiano valore. Si è stati quindi portati a introdurre nelle formule un fattore chiamato potere induttore *specifico* del dielettrico. Maxwell lo indica con  $K$ .

Il prodotto del flusso di forza elementare per questo fattore è detto *flusso di induzione*.

Il flusso di induzione attraverso una superficie finita è dato dall'integrale

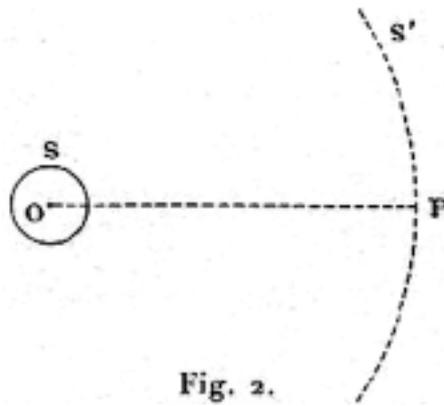
$$\int -K \frac{d\psi}{dn} d\omega$$

esteso a tutti gli elementi della superficie. Quando la superficie è chiusa ammetteremo (ciò che l'esperienza conferma) che il valore di questo integrale è  $+4\pi M$ , essendo la direzione positiva della normale esterna alla superficie. Nel caso in cui il potere induttore specifico è costante si ha

$$K \int -\frac{d\psi}{dn} d\omega = 4\pi M$$

## 14. Potenziale di una sfera elettrizzata in un punto esterno

La considerazione del flusso di forza permette di trovare facilmente il valore in un punto P (fig. 2) del potenziale risultante di una sfera conduttrice elettrizzata S posta nell'aria. Si trova per questo valore  $\frac{M}{r}$ , essendo  $M$  la carica della sfera e  $r$  la distanza dal punto al centro della sfera. Con la stessa considerazione del flusso di induzione dà il valore del potenziale in P quando la sfera è posta in un dielettrico il cui potere induttore specifico è  $K$ .



Dal centro O della sfera e con un raggio uguale a OP descriviamo una sfera S'. Per ragioni di simmetria, il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di S': di conseguenza,

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{d\psi}{dr}$$

è costante su questa superficie. Si ha quindi per il flusso di induzione attraverso S'

$$\int -K \frac{d\psi}{dn} d\omega = -K \frac{d\psi}{dr} \int d\omega = -K \frac{d\psi}{dr} 4\pi r^2$$

Essendo la superficie chiusa il flusso di induzione è uguale a  $4\pi M$ . Di conseguenza abbiamo

$$-K \frac{d\psi}{dr} 4\pi r^2 = 4\pi M$$

o

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{K} \frac{M}{r^2}$$

e di conseguenza

$$\psi = \frac{1}{K} \frac{M}{r}$$

essendo la costante di integrazione nulla poiché il potenziale vale zero quando  $r$  è infinito.

Il potenziale in un punto di un dielettrico di potere induttore specifico  $K$  è quindi, nel caso di una sfera, uguale al quoziente con  $K$  del valore che avrebbe avuto il potenziale in questo punto se il dielettrico fosse stato l'aria. È così ancora se, invece di una sfera conduttrice elettrizzata, il campo elettrico è costituito da masse elettriche qualsiasi.

## 15. Osservazioni

Questa conseguenza ci permette di trovare l'espressione della forza che si esercita tra due molecole elettriche A e A' di masse  $m$  e  $m'$  situate in un dielettrico omogeneo. Infatti, sia  $\psi$  il valore del potenziale nel punto in cui è posta la massa  $m'$ , La forza elettrica che si esercita su questa massa è  $-m' \frac{d\psi}{dr}$ , essendo  $r$  la distanza tra le due molecole supposte essere le sole nel campo. Se il dielettrico fosse l'aria, il potenziale nel punto A' sarebbe  $\frac{m}{r}$ ; il suo valore in un dielettrico di potere induttore specifico  $K$  è pertanto, da quanto precede,  $\frac{1}{K} \frac{m}{r}$  e la derivata di questa quantità è  $-\frac{1}{K} \frac{m}{r^2}$ . Pertanto, otteniamo per la forza elettrica

$$-m' \frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{K} \frac{mm'}{r^2}$$

essa è la  $k$ -esima parte della forza che si eserciterebbe tra le stesse masse elettriche poste nell'aria.

La relazione che esiste tra i valori che assume il potenziale in uno stesso punto a seconda che il dielettrico sia l'aria, o qualunque altro corpo, ci permette di sapere come devono variare le cariche con il dielettrico affinché il potenziale in un punto mantenga lo stesso valore qualunque sia il dielettrico. È evidente infatti che, poiché per cariche identiche il potenziale è diviso per  $K$ , è necessario, per avere lo stesso potenziale in un punto, che le cariche situate nel dielettrico di potere induttore  $K$  siano  $K$  volte maggiori che nell'aria.

Se consideriamo quindi due piccole sfere elettrizzate e manteniamo costante la differenza di potenziale tra di esse, l'attrazione che si eserciterà tra di loro sarà proporzionale al potere induttore del dielettrico che le separa. Infatti, essendo i potenziali costanti le cariche  $m$  e  $m'$  delle due sfere saranno in ragione diretta di  $K$  e l'attrazione deve essere proporzionale a  $\frac{mm'}{K}$ .

Così, *l'attrazione elettrostatica varia in ragione diretta di  $K$  se i potenziali si mantengono costanti, e in ragione inversa di  $K$  se sono le cariche a rimanere costanti.*

## 16. Estensione della relazione di Poisson

Come detto, la relazione di Poisson si ottiene scrivendo che il flusso di forza che entra attraverso le facce di un parallelepipedo rettangolo è uguale a  $-4\pi\rho dx dy dz$ . Essendo il flusso di induzione attraverso una superficie chiusa uguale a  $+4\pi M$ , come il flusso di forza attraverso questa superficie, troveremo una relazione analoga a quella di Poisson scrivendo che il flusso di induzione entrante attraverso le facce di un parallelepipedo elementare è uguale a  $-4\pi\rho dx dy dz$ .

Possiamo d'altra parte arrivare molto semplicemente a questa relazione servendoci del lemma che serve comunemente alla dimostrazione del teorema di Green, espresso analiticamente dall'uguaglianza

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{dF}{dx} d\tau$$

nella quale il primo integrale è esteso a una superficie chiusa e il secondo al volume limitato da questa superficie, dove  $\alpha$  è il coseno dell'angolo formato tra l'asse delle  $x$  e la normale all'elemento  $d\omega$  della superficie e  $F$  una funzione qualunque, ma continua, delle coordinate.

Applichiamo questo lemma all'integrale del flusso di induzione attraverso una superficie chiusa

$$\int -K \frac{d\psi}{dn} d\omega = \int -K \left( \alpha \frac{d\psi}{dx} + \beta \frac{d\psi}{dy} + \gamma \frac{d\psi}{dz} \right) d\omega = 4\pi M$$

Abbiamo

$$\int \alpha K \frac{d\psi}{dx} d\omega = \int \frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} d\tau$$

$$\int \beta K \frac{d\psi}{dy} d\omega = \int \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} d\tau$$

$$\int \gamma K \frac{d\psi}{dz} d\omega = \int \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} d\tau$$

e sommando

$$\int \left( \frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} \right) d\tau = -4\pi M$$

Se indichiamo con  $\rho$  la densità cubica in ogni punto, abbiamo

$$M = \int \rho d\tau$$

e quindi

$$\int \left( \frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy} K \frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz} K \frac{d\psi}{dz} \right) d\tau = -4\pi \int \rho d\tau$$

Questa uguaglianza vale qualunque sia il volume considerato, essa sarà vera per un volume infinitamente piccolo; otterremo pertanto

$$\sum \frac{d}{dx} K \frac{d\psi}{dx} = -4\pi\rho$$

Nel caso particolare in cui il dielettrico è omogeneo, cioè quando  $K$  non dipende dalle coordinate, questa relazione si riduce a

$$\sum K \frac{d}{dx} \frac{d\psi}{dx} = K \Delta\psi = -4\pi\rho$$



## 2. Teoria della spostamento elettrico di Maxwell

### 17. Fluido induttore

La caratteristica della teoria di Maxwell è il ruolo preponderante svolto dai dielettrici. Maxwell suppone tutta la materia dei dielettrici occupata da un ipotetico fluido elastico, analogo all'*etere* che, in Ottica, dovrebbe riempire i corpi trasparenti; lui lo chiama *elettricità*. Vedremo più avanti il motivo di questo nome; ma poiché può introdurre nella mente una deplorabile confusione per la chiarezza dell'esposizione, daremo a questo ipotetico fluido il nome di *fluido induttore*, mantenendo la parola *elettricità* nel suo significato abituale.

Quando tutti i conduttori posti nel dielettrico sono allo stato neutro il fluido induttore è in equilibrio stabile. Quando, al contrario, questi conduttori sono elettrizzati e il loro sistema è nello stato che si definisce nella comune teoria dicendo che il sistema è in equilibrio elettrico, il fluido induttore assume un nuovo stato di equilibrio che Maxwell chiama *equilibrio vincolato*.

### 18. Spostamento elettrico

Quando una molecola del fluido induttore è spostata dalla sua posizione di equilibrio stabile, Maxwell dice che vi è uno *spostamento elettrico*. Le componenti dello spostamento sono gli incrementi delle coordinate della molecola; li indica con le lettere  $f, g, h$ , e ammette che essi valgono rispettivamente

$$f = -\frac{K \frac{d\psi}{dx}}{4\pi} \quad g = -\frac{K \frac{d\psi}{dy}}{4\pi} \quad h = -\frac{K \frac{d\psi}{dz}}{4\pi} \quad (1)$$

Derivano da questa ipotesi, di cui vedremo l'origine, relazioni tra le componenti dello spostamento e la quantità di elettricità libera contenuta all'interno di una superficie chiusa e, d'altra parte, tra le derivate di queste componenti e la densità elettrica in un punto.

Infatti, se portiamo i valori delle derivate parziali di  $\psi$ , ricavate dalle (1), nell'espressione del flusso di induzione attraverso una superficie chiusa,

$$\int -K \frac{d\psi}{dn} d\omega = \int -K \left( \alpha \frac{d\psi}{dx} + \beta \frac{d\psi}{dy} + \gamma \frac{d\psi}{dz} \right) d\omega = 4\pi M$$

otteniamo

$$\int (\alpha f + \beta g + \gamma h) = M \quad (2)$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono sempre i coseni direttori della normale esterna.

In secondo luogo, se introduciamo questi valori nella relazione di Poisson estesa al caso di un dielettrico qualunque, abbiamo

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho \quad (3)$$

**19. Incomprimibilità del fluido induttore e dell'elettricità**

Lo studio delle conseguenze di queste relazioni porta a considerare il fluido induttore e l'elettricità come due fluidi incomprimibili.

Innanzitutto, dall'ipotesi di Maxwell sul valore delle componenti dello spostamento in un punto, segue immediatamente che se l'elettricità è in movimento lo è pure il fluido induttore. Infatti, se modifichiamo le cariche elettriche dei conduttori posti all'interno di un dielettrico, facciamo variare contemporaneamente il valore del potenziale  $\psi$  in un qualsiasi punto del dielettrico, e, di conseguenza, i valori  $f, g, h$  delle componenti dello spostamento elettrico che sono date dalle relazioni (1).

**20.** Stabilito ciò, consideriamo una superficie chiusa il cui interno è occupato da un dielettrico omogeneo e da conduttori in equilibrio elettrico aventi carica totale  $M$ . Aumentiamo questa carica e supponiamo che il sistema di conduttori sia ancora in equilibrio elettrico. Il fluido induttore passa da uno stato di equilibrio vincolato ad un secondo stato di equilibrio vincolato e durante questo passaggio vi è spostamento di ciascuna delle sue molecole poiché vi è movimento dell'elettricità. Cerchiamo la quantità di questo fluido che ha attraversato la superficie chiusa. Se  $dt$  è il tempo infinitamente piccolo durante il quale è avvenuta la transizione dallo stato iniziale del sistema allo stato finale, la quantità di fluido induttore che esce da un elemento della superficie è

$$dq = d\omega dt V_n$$

essendo  $V_n$  la proiezione della velocità dello spostamento sulla normale esterna alla superficie chiusa. La quantità di fluido induttore che esce dalla superficie è pertanto, nello stesso tempo,

$$dQ = dt \int V_n d\omega$$

Ma poiché  $f, g, h$  indicano le componenti dello spostamento,  $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$  sono le componenti della velocità, e di conseguenza la componente normale  $V_n$  vale

$$V_n = \alpha \frac{df}{dt} + \beta \frac{dg}{dt} + \gamma \frac{dh}{dt}$$

Introduciamo questa espressione in quella di  $dQ$ , otteniamo

$$dQ = dt \int \left( \alpha \frac{df}{dt} + \beta \frac{dg}{dt} + \gamma \frac{dh}{dt} \right) d\omega$$

L'integrale del secondo membro di questa uguaglianza non è altro che la derivata rispetto al tempo del primo membro della relazione (2). Abbiamo pertanto

$$dQ = dt \frac{dM}{dt} = dM$$

cioè, la quantità di fluido induttore che lascia la superficie è uguale alla quantità di elettricità che vi entra. Tutto avviene quindi come se l'elettricità inseguisse il fluido induttore, o in altre parole, come se il fluido induttore e l'elettricità fossero due fluidi incomprimibili.

**21.** Osserviamo inoltre che l'incomprimibilità del fluido induttore può essere dedotta immediatamente dalla relazione (3). Questa relazione diventa, quando si considera un punto del fluido induttore contenuto in un dielettrico allo stato neutro.

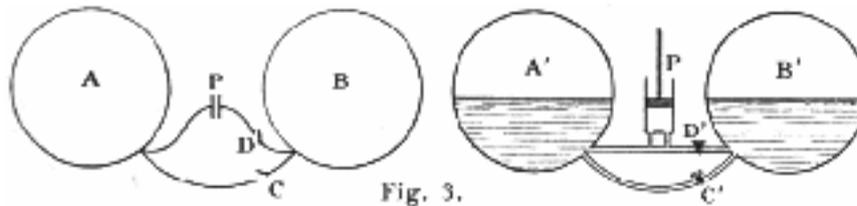
$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

Il suo primo membro non è altro che la quantità da noi indicata con  $\Theta$  in un'altra opera<sup>1</sup> e abbiamo dimostrato che la condizione  $\Theta = 0$  esprimeva l'incomprimibilità del fluido.

<sup>1</sup>Si veda *Teoria matematica della luce*, p. 25 e 26.

## 22. Immagine dell'effetto dell'elasticità del fluido induttore

Consideriamo due conduttori A e B (fig. 3) uniti tra loro mediante un filo metallico portante un interruttore C e da un secondo filo sul cui percorso si trovano una pila P e un interruttore D. Prendiamo poi due recipienti chiusi A' e B' contenenti acqua e aria e collegati tra loro da un canale di comunicazione portante un rubinetto C' e da un altro canale sul cui percorso si trovano una pompa P e un rubinetto D'.



Supponiamo ora che i conduttori A e B si trovino allo stato neutro e apriamo l'interruttore C chiudendo poi l'interruttore D; si stabilisce una corrente di breve durata nel filo ADB e presto abbiamo uno stato di equilibrio elettrico nel quale i conduttori sono carichi di elettricità di nomi contrari, A positivamente ad esempio, e B negativamente. Se allora apriamo l'interruttore D e chiudiamo il C, le due elettricità dei conduttori si ricombinano attraverso il filo ACD e questi conduttori ritornano allo stato neutro.

**23.** Per comprendere il ruolo svolto dal fluido induttore in questo esperimento, esaminiamo cosa succede nel sistema dei due vasi A' e B' quando si attiva la pompa e si stabiliscono con i rubinetti C' e D' le comunicazioni stabilite in precedenza con gli interruttori C e D. Supponiamo che i livelli dell'acqua nei contenitori siano nello stesso piano orizzontale, chiudiamo il rubinetto C', apriamo il D' e azioniamo la pompa; l'acqua passa da un contenitore all'altro, dal B' al contenitore A' per esempio. Ne risulta una diminuzione della forza elastica dell'aria di B e un aumento di quella della forza elastica dell'aria di A'. Se chiudiamo il rubinetto D' e apriamo contemporaneamente C', la differenza delle forze elastiche dell'aria nei due recipienti fa ripassare l'acqua da A' in B' finché i due livelli ritornano nel loro stato iniziale come nell'esperienza elettrica e possiamo considerare l'acqua come rappresentante materiale del fluido elettrico; l'aumento del volume dell'acqua in A' e la diminuzione in B' che risultano dalla prima fase dell'esperienza idrostatica rappresenteranno le cariche positive e negative dei conduttori A e B nella fase corrispondente dell'esperienza elettrica. Quanto all'aria, il ruolo che svolge grazie alla sua forza elastica può essere paragonato a quello che svolge il fluido elastico induttore nell'esperienza elettrica. È quindi l'elasticità del fluido induttore contenuto nell'aria che separa i conduttori e sposta le cariche di questi conduttori che è la causa della combinazione di queste cariche.

Aggiungiamo immediatamente che, sebbene questa rappresentazione idrostatica ci faccia comprendere il modo in cui si comporta il fluido induttore nella teoria di Maxwell, essa non può essere spinta troppo oltre poiché il fluido induttore è incomprimibile, proprietà di cui non gode l'aria alla quale l'abbiamo confrontato. Questa immagine è quindi utile solo per far comprendere l'effetto di una delle proprietà di questo fluido: la sua elasticità.

## 24. Ogni corrente è una corrente chiusa

Il ruolo preponderante attribuito da Maxwell ai dielettrici, che nella teoria ordinaria hanno un ruolo passivo, non è la sola differenza che esiste tra quest'ultima teoria e quella di Maxwell. Un'altra differenza proviene dalla natura delle correnti.

Nella teoria ordinaria si ammette l'esistenza di due tipi di correnti: correnti chiuse, generalmente permanenti, e correnti aperte, generalmente istantanee, che cessano quando, per effetto della

carica si produce una differenza di potenziale uguale alla forza elettromotrice della sorgente elettrica. Queste correnti aperte si producono quando, ad esempio, i poli di una batteria sono messi in comunicazione con due conduttori o con le due armature di un condensatore.

Nella nuova teoria possono esserci solo correnti chiuse. Consideriamo infatti la corrente aperta che si genera quando mettiamo in comunicazione i poli di una batteria con due conduttori isolati A e B. Il conduttore che, adottando il linguaggio della teoria ordinaria, si carica positivamente, deve prendere, secondo la teoria di Maxwell, una quantità di fluido elettrico maggiore di quella che possiede allo stato neutro. Nell'altro conduttore, invece, la quantità di fluido elettrico deve diminuire. Ma essendo il fluido elettrico incomprimibile, la sua densità rimane costante e non si può concepire che vi sia condensazione di questo fluido in un punto e rarefazione in un altro. Per conciliare questa conseguenza dell'incomprimibilità del fluido elettrico con il fatto sperimentale dell'esistenza della corrente, Maxwell introduce il fluido induttore che riempie il dielettrico isolante dei due conduttori: il fluido elettrico esce da uno dei conduttori, sposta il fluido induttore del dielettrico e apporta nell'altro conduttore una quantità di fluido induttore uguale alla quantità di fluido elettrico uscente dal primo. Si ha quindi chiusura della corrente attraverso il dielettrico e poiché le molecole del fluido induttore si muovono lungo le linee di forza, come segue immediatamente dalle equazioni (1) che definiscono le componenti dello spostamento, possiamo dire che le correnti aperte della teoria ordinaria si chiudono, nella teoria di Maxwell, seguendo le linee di forza del dielettrico.

Le correnti istantanee che hanno origine nella carica o scarica di un condensatore possono essere considerate pure come chiudentesi attraverso il dielettrico che separa le armature. Nella teoria di Maxwell abbiamo quindi solo correnti chiuse.

**25.** Questi movimenti del fluido elettrico e del fluido induttore nel caso di una corrente istantanea possono essere materializzati da un'immagine idrostatica. Basta sostituire l'aria e l'acqua che abbiamo preso in precedenza con acqua e mercurio. In queste condizioni se dopo aver chiuso il rubinetto C' (fig. 3) e aperto il rubinetto D', attiviamo la pompa, non possiamo far passare il mercurio da un vaso all'altro, essendo questi riempiti da due fluidi incomprimibili. Il passaggio del mercurio può avvenire solo se si suppone che le parti superiori dei due vasi siano collegate da un canale che consenta il passaggio dell'acqua in direzioni opposte. Il mercurio è quindi l'immagine del fluido elettrico, l'acqua quella del fluido induttore e il canale di comunicazione può essere paragonato ad un tubo di forza del dielettrico.

## 26. Corrente di conduzione e corrente di spostamento

Le correnti chiuse che si manifestano attraverso un circuito conduttore sono dette *correnti di conduzione*; le correnti risultanti dallo spostamento del fluido induttore, sono dette *correnti di spostamento*. Quando in uno stesso circuito chiuso avremo subito delle correnti di conduzione e di spostamento, questo circuito sarà un circuito della teoria ordinaria. Ma oltre questi circuiti e quelli che comprendono solo correnti di conduzione, i soli considerati nella teoria ordinaria, incontreremo nella teoria di Maxwell circuiti chiusi comprendenti unicamente correnti di spostamento; questi ultimi svolgeranno un ruolo considerevole nella spiegazione dei fenomeni luminosi.

Essendo le correnti di conduzione quelle che si producono nei circuiti buoni conduttori, esse devono necessariamente obbedire, per concordare con l'esperienza, alle leggi di Ohm, di Joule e a quella di Ampère sulle azioni mutue di due elementi di corrente e alle leggi dell'induzione. Quanto alle correnti di spostamento non sappiamo nulla delle leggi alle quali obbediscono; il campo è quindi aperto alle ipotesi. Maxwell ammette che obbediscono alla legge di Ampère e alle leggi dell'induzione, ma che ad esse non sono applicabili le leggi di Ohm e di Joule, poiché queste correnti non incontrano altra resistenza al loro stabilirsi se non quella che risulta dall'elasticità

del fluido inducente, dalla resistenza di un tipo totalmente diversa da quella della resistenza dei conduttori.

## 27. Energia potenziale di un sistema elettrizzato

Consideriamo un sistema di conduttori carichi di elettricità positiva e negativa. Queste cariche rappresentano una certa energia potenziale. Nella teoria ordinaria questa energia potenziale è dovuta al lavoro delle attrazioni e repulsioni che si esercitano tra le diverse masse elettriche del sistema; nella teoria di Maxwell è dovuta all'elasticità del fluido induttore che viene spostato dalla sua normale posizione di equilibrio. Questa energia, che può essere misurata, deve avere lo stesso valore in entrambe le teorie, e di conseguenza le espressioni che permettono di calcolarne il valore devono essere identiche. È facendo questa identificazione che troveremo nuove proprietà del fluido induttore.

**28.** Cerchiamo dapprima l'espressione dell'energia potenziale considerata come risultante dei lavori della forze attrattive e repulsive.

Siano  $d\tau$  un elemento qualsiasi di volume dello spazio,  $x, y, z$  le sue coordinate e  $\rho$  la densità dell'elettricità libera in questo elemento; la quantità di elettricità contenuta in questo elemento sarà  $\rho d\tau$  e le componenti della forza elettrica che si esercita su di essa saranno:

$$-\rho d\tau \frac{d\psi}{dx} \quad -\rho d\tau \frac{d\psi}{dy} \quad -\rho d\tau \frac{d\psi}{dz}$$

Supponiamo che la massa elettrica contenuta nell'elemento  $d\tau$  si sposti in modo che le sue tre coordinate subiscano un incremento  $\delta x, \delta y, \delta z$ .

Il lavoro della forza elettrica applicata a questa massa elettrica sarà pertanto

$$\rho d\tau \left( \frac{d\psi}{dx} \delta x + \frac{d\psi}{dy} \delta y + \frac{d\psi}{dz} \delta z \right)$$

Il lavoro totale delle forze applicate alle diverse masse elettriche distribuite nell'intero spazio sarà dato dall'integrale

$$- \int \rho d\tau \left( \frac{d\psi}{dx} \delta x + \frac{d\psi}{dy} \delta y + \frac{d\psi}{dz} \delta z \right)$$

esteso all'intero spazio.

Se chiamiamo  $W$  l'energia potenziale cercata, l'incremento di questa energia sarà dato dalla formula

$$\delta W = \int \rho d\tau \left( \frac{d\psi}{dx} \delta x + \frac{d\psi}{dy} \delta y + \frac{d\psi}{dz} \delta z \right) \quad (4)$$

**29.** Mettiamo questa espressione sotto un'altra forma e valutiamo l'incremento  $\delta\rho$  della densità elettrica  $\rho$  all'interno dell'elemento  $d\tau$  in questo spostamento.

Consideriamo questo elemento come un parallelepipedo rettangolo le cui tre dimensioni lunghe  $\alpha, \beta, \gamma$  siano rispettivamente parallele ai tre assi coordinati di modo che  $d\tau = \alpha\beta\gamma$ .

La quantità di elettricità che entrerà in questo parallelepipedo passando attraverso uno delle facce perpendicolari all'asse delle  $x$  sarà uguale a  $\rho$ , densità del fluido, moltiplicata per  $\delta x$ , spostamento del fluido proiettato sull'asse  $x$ , e per  $\beta\gamma$  area della faccia del parallelepipedo.

Avremo pertanto per l'espressione di questa quantità di elettricità:

$$\rho \delta x \beta \gamma$$

La quantità di elettricità che entrerà nel parallelepipedo passando per la faccia opposta avrà un'espressione analoga. Soltanto  $\rho \delta x$  non avrà più lo stesso valore, infatti  $\rho$  e  $\delta x$  sono funzioni

di  $x, y, z$ ; quando si passa da una faccia a quella opposta,  $x$  è aumentato di una quantità molto piccola  $\alpha$  e  $\rho\delta x$  è diventato:

$$\rho\delta x + \frac{d(\rho\delta x)}{dx}\alpha$$

La quantità di elettricità che passa attraverso questa seconda faccia avrà quindi per espressione

$$-\left[\rho\delta x + \frac{d(\rho\delta x)}{dx}\alpha\right]\beta\gamma$$

Prendiamo il segno  $-$  perché la normale interna a questa seconda faccia è diretta verso le  $x$  negative.

Così la somma algebrica delle masse elettriche che entreranno nel parallelepipedo passando attraverso le due facce perpendicolari all'asse  $x$  sarà

$$-\frac{d(\rho\delta x)}{dx}\alpha\beta\gamma = -\frac{d(\rho\delta x)}{dx}d\tau$$

Analogamente le masse elettriche che entreranno attraversando da una parte le facce perpendicolari all'asse delle  $y$ , e dall'altra le due facce perpendicolari all'asse  $z$  saranno rispettivamente:

$$-\frac{d(\rho\delta y)}{dy}d\tau \quad e \quad -\frac{d(\rho\delta z)}{dz}d\tau$$

Ora  $d\tau\delta\rho$  non è altro che la somma delle masse elettriche entranti nel parallelepipedo passando attraverso le sue sei facce, si ha quindi

$$\delta\rho = -\frac{d(\rho\delta x)}{dx} - \frac{d(\rho\delta y)}{dy} - \frac{d(\rho\delta z)}{dz} \quad (5)$$

Questa equazione è come quella nota in idrodinamica sotto il nome di equazione di continuità.

**30.** Ricordiamo che per un lemma già qui utilizzato, si ha

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{dF}{dx} d\tau$$

essendo  $F$  una funzione di  $x, y, z$  e gli integrali estesi, il primo a tutti gli elementi  $d\omega$  di una superficie chiusa, il secondo a tutti gli elementi del volume delimitato da questa superficie.

Quando la funzione  $F$  è nulla all'infinito, il primo integrale esteso alla superficie di una sfera di raggio infinito è nullo, essendo ciascuno dei suoi elementi uguale a zero.

Si ha quindi per una tale funzione

$$\int \frac{dF}{dx} d\tau = 0$$

Nel caso in cui  $F$  è un prodotto di due fattori  $u$  e  $v$ , la precedente uguaglianza diviene

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau + \int v \frac{du}{dx} d\tau = 0$$

e ricaviamo

$$\int u \frac{dv}{dx} d\tau = - \int v \frac{du}{dx} d\tau$$

nuova uguaglianza che ci serve per trasformare  $dW$ .

**31.** Si ottiene applicando questa regola alla funzione che si annulla all'infinito poiché il potenziale  $\psi$  stesso si annulla all'infinito

$$\int \rho\delta x \frac{d\psi}{dx} d\tau = - \int \psi \frac{d}{dx} (\rho\delta x) d\tau$$

$$\int \rho \delta y \frac{d\psi}{dy} d\tau = - \int \psi \frac{d}{dy} (\rho \delta y) d\tau$$

$$\int \rho \delta z \frac{d\psi}{dz} d\tau = - \int \psi \frac{d}{dz} (\rho \delta z) d\tau$$

e sommando e tenendo conto delle equazioni (4) e (5)

$$\delta W = \int \psi \delta \rho d\tau$$

o, per l'equazione di Poisson generalizzata:

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int \psi \rho \left[ \frac{d}{dx} \left( K \frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( K \frac{d\psi}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( K \frac{d\psi}{dz} \right) \right] d\tau$$

Applicando lo stesso lemma di prima si ha

$$\int \psi \delta \left[ \frac{d}{dx} \left( K \frac{d\psi}{dx} \right) \right] d\tau = \int \psi d\tau \left[ \frac{d}{dx} \delta \left( K \frac{d\psi}{dx} \right) \right] = - \int d\tau \frac{d\psi}{dx} \delta \left( K \frac{d\psi}{dx} \right)$$

o ancora, osservando che il potere induttore  $K$  non è modificato dallo spostamento delle masse elettriche e che quindi  $\delta K = 0$ :

$$\int \psi \delta \left[ \frac{d}{dx} \left( K \frac{d\psi}{dx} \right) \right] d\tau = - \int K d\tau \left[ \frac{d\psi}{dx} \delta \left( \frac{d\psi}{dx} \right) \right] = - \int \frac{K d\tau}{2} \delta \left[ \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right]$$

Si otterranno per simmetria altre due equazioni analoghe, e sommandole e dividendo per  $-4\pi$ , si troverà

$$\delta W = \delta \int \frac{K}{8\pi} \sum \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 d\tau$$

L'energia potenziale del sistema vale pertanto

$$W = \int \frac{K}{8\pi} \sum \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 d\tau \quad (6)$$

essendo nulla la costante di integrazione, poiché l'energia potenziale deve essere nulla quando l'intero spazio è allo stato neutro, e in questo caso il potenziale in ogni punto ha lo stesso valore, zero.

**32.** L'integrale al secondo membro della (6) deve essere esteso a tutto lo spazio, ma è la stessa cosa estenderlo solo allo spazio occupato dal dielettrico, perché gli elementi dell'integrale che corrispondono a punti situati all'interno di conduttori sono nulli. Infatti, in ogni punto di un conduttore il potenziale ha lo stesso valore e quindi, le sue derivate parziali  $\frac{d\psi}{dx}$ ,  $\frac{d\psi}{dy}$ ,  $\frac{d\psi}{dz}$  sono pure nulle.

Questa osservazione permette di trasformare l'espressione (6). In ogni punto di un dielettrico, abbiamo dalle ipotesi di Maxwell

$$f = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \quad g = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dy} \quad h = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dz}$$

e introducendo i valori delle derivate parziali del potenziale  $\psi$ , dedotti da queste relazioni nel secondo membro della (6), si ha

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau \quad (7)$$

Questa è l'energia potenziale di un sistema elettrizzato espressa con le notazioni di Maxwell.

**33.** Cerchiamo ora l'espressione di questa energia considerata come risultante della deformazione del fluido induttore.

Siano  $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$  le tre componenti della forza che agisce su un elemento  $d\tau$  del fluido induttore quando questo si trova in equilibrio vincolato a causa della carica dei conduttori posti nel dielettrico. Se le molecole elettriche componenti il sistema subiscono uno spostamento infinitamente piccolo, le componenti  $f, g, h$ , dello spostamento dell'elemento  $d\tau$  del fluido induttore acquistano degli incrementi  $\delta f, \delta g, \delta h$ . Il lavoro elementare della forza che si esercita su questo elemento vale

$$(X\delta f + Y\delta g + Z\delta h) d\tau$$

e il lavoro totale su tutti gli elementi del fluido induttore è

$$\int (X\delta f + Y\delta g + Z\delta h) d\tau$$

essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio occupato dal dielettrico. La variazione dell'energia potenziale del sistema, che differisce solo per il segno dalla variazione del lavoro, è quindi

$$\delta W = - \int (X\delta f + Y\delta g + Z\delta h) d\tau$$

### 34. Elasticità del fluido induttore

L'identificazione di questa espressione con la seguente

$$\delta W = \int \frac{4\pi}{K} (f\delta f + g\delta g + h\delta h) d\tau$$

dedotta dalla (7), ci dà per i valori delle componenti  $X, Y, Z$

$$X = -\frac{4\pi}{K}f \quad Y = -\frac{4\pi}{K}g \quad Z = -\frac{4\pi}{K}h$$

Queste relazioni ci mostrano che le componenti della forza esercitata su un elemento  $d\tau$  del fluido induttore sono proporzionali alle componenti dello spostamento elettrico. La forza elastica del fluido induttore è quindi diretta lungo lo spostamento e il rapporto tra il suo modulo e quello dello spostamento uguale a  $\frac{4\pi}{K}$ . Vedremo in seguito che nel caso in cui il dielettrico è un mezzo cristallizzato la forza elastica non è più diretta lungo lo spostamento; le conclusioni precedenti si applicano solo ai mezzi isotropi.

**35.** È appena il caso di sottolineare quanto sia diversa l'elasticità del fluido induttore dall'elasticità dei gas o dell'etere luminoso. Nei gas e nell'etere l'energia potenziale dipende solo dalle posizioni relative delle molecole e non dalla loro posizione assoluta nello spazio; di conseguenza non si ha reazione elastica quando uno di questi fluidi si muove senza deformarsi. La situazione è abbastanza diversa per il fluido induttore. Tutto avviene come se ciascuna delle molecole di questo fluido fosse attratta proporzionalmente alla distanza dalla sua normale posizione di equilibrio. Ne deriverebbe che se dessimo a tutte queste molecole lo stesso moto di traslazione senza che la loro situazione relativa cambi, entrerebbe in gioco nondimeno l'elasticità. Questa elasticità particolarissima che deve possedere il fluido induttore sembra difficile da ammettere. Non è facile immaginare come il punto matematico in cui una molecola di fluido induttore si trova in equilibrio stabile possa agire su questa molecola per riportarla nella sua posizione di equilibrio quando una causa elettrica l'ha spostata. Capiremmo più facilmente che sono le molecole materiali del dielettrico ad agire sulle molecole del fluido induttore che penetra nel mezzo ponderabile. Ma questa ipotesi non eliminerebbe tutte le difficoltà, perché non spiegherebbe l'elasticità del fluido induttore diffuso nel vuoto. Inoltre l'azione della materia su tale fluido

darebbe luogo all'esistenza di una sua reazione sulla materia; tuttavia, non è stata osservata alcuna manifestazione di questa reazione.

**36.** Si potrebbe anche supporre l'esistenza di due fluidi induttori che si compenetrano a vicenda e le molecole di uno di essi agirebbero sulle molecole dell'altro non appena queste vengono spostate dalle loro normali posizioni di equilibrio. Ma se questa ipotesi ha il vantaggio di ridurre l'elasticità speciale del fluido inducente all'elasticità comunemente concepita, ha lo svantaggio di essere più complicata di quella dell'esistenza di un fluido unico. Riteniamo quindi che l'ipotesi di Maxwell del fluido induttore sia solo transitoria e che sarà sostituita da un'altra più logica non appena il progresso della scienza lo consentirà. Ci si può obiettare che Maxwell non ha introdotto questa ipotesi del fluido induttore; ma, come abbiamo detto all'inizio di questo capitolo, se il termine non è nell'opera di questo fisico, la cosa c'è; solo ciò che abbiamo chiamato fluido induttore viene designato con la parola elettricità; nel linguaggio di Maxwell si presume che l'elettricità dei dielettrici sia elastica, mentre l'elettricità dei conduttori sia inerte. Queste diverse proprietà attribuite a due fluidi, designati con lo stesso nome sono la causa della poca chiarezza in alcuni passaggi dell'opera di Maxwell. È solo per evitare questa oscurità che abbiamo introdotto la parola fluido induttore nella presentazione delle idee di Maxwell.

### 37. Distribuzione elettrica

Per poter giustificare le ipotesi di Maxwell, bisogna ora mostrare che le leggi sperimentali della distribuzione elettrica ne sono una conseguenza necessaria.

Cominciamo col ricordare queste leggi. Si sa che questa distribuzione dipende solo da una certa funzione  $\psi$ , il potenziale, sottoposto a diverse condizioni. In tutta l'estensione del dielettrico questa funzione  $\psi$  è continua così come le sue derivate e soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dx}K\frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy}K\frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz}K\frac{d\psi}{dz} = 0$$

in ogni punto del conduttore essa ha un valore costante, ma in un punto della superficie le sue derivate non sono continue. Infine questa funzione si annulla per i punti posti all'infinito.

Lo studio della distribuzione elettrica su un conduttore porta a introdurre una nuova quantità, la densità elettrica superficiale. Se indichiamo con  $q$  la quantità di elettricità distribuita su una elemento di superficie  $d\omega$ , la relazione di Poisson, estesa al caso in cui il dielettrico è diverso dall'aria, dà

$$K\frac{d\psi}{dn}d\omega = -4\pi\rho$$

La densità superficiale  $\frac{q}{d\omega}$  è espressa da

$$\sigma = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dn}$$

Ma si può supporre che lo strato del fluido elettrico distribuito sulla superficie ha una densità costante e che il suo spessore è proporzionale a  $\sigma$ ; è a quest'ultima interpretazione che faremo riferimento.

**38.** Torniamo alla teoria di Maxwell. In essa abbiamo due fluidi incomprimibili, il fluido induttore e il fluido elettrico per i quali ammetteremo la possibilità di applicare le leggi dell'idrostatica. Si sa che se  $p$  è la pressione in un punto  $x, y, z$ , di un tale fluido, le tre componenti  $X, Y, Z$  della forza elastica risultanti dallo spostamento di questo punto, valgono

$$X = \frac{dp}{dx} \quad Y = \frac{dp}{dy} \quad Z = \frac{dp}{dz}$$

Se indichiamo con  $\psi$  la pressione in un punto del fluido induttore, abbiamo

$$X = \frac{d\psi}{dx} \quad Y = \frac{d\psi}{dy} \quad Z = \frac{d\psi}{dz}$$

Ma abbiamo visto nel paragrafo 34 che le componenti della forza elastica sono uguali ai prodotti delle componenti dello spostamento per  $-\frac{4\pi}{K}$ . Abbiamo quindi

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{4\pi}{K}f \quad \frac{d\psi}{dy} = -\frac{4\pi}{K}g \quad \frac{d\psi}{dz} = -\frac{4\pi}{K}h \quad (8)$$

Da queste relazioni si deduce

$$f = -\frac{4\pi}{K}\frac{d\psi}{dx} \quad g = -\frac{4\pi}{K}\frac{d\psi}{dy} \quad h = -\frac{4\pi}{K}\frac{d\psi}{dz}$$

Queste nuove relazioni sono precisamente quelle che definiscono le componenti dello spostamento, dove  $\psi$  indica allora il potenziale. Per giustificare il modo in cui abbiamo definito, secondo Maxwell, le componenti dello spostamento elettrico, bisogna mostrare che la pressione  $\psi$  in un punto del fluido induttore non è diverso dal potenziale.

**39.** Il fluido induttore è incomprimibile, per cui vale la relazione

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

che diviene, tenendo conto delle relazioni (8)

$$\frac{d}{dx}K\frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dy}K\frac{d\psi}{dy} + \frac{d}{dz}K\frac{d\psi}{dz} = 0$$

dove la funzione  $\psi$  soddisfa a una delle condizioni imposte al potenziale. Essa è pure, come il potenziale, costante all'interno di un conduttore, poiché l'elettricità che riempie il conduttore non è elastica, di conseguenza  $X, Y, Z$  sono nulli e così deve essere anche per derivate di  $\psi$ .

Quando si passa da un punto del dielettrico a un punto interno di un conduttore le derivate della funzione  $\psi$  non sono continue poiché passano da un valore finito a zero. Ma la funzione stessa rimane continua. Infatti, se la pressione non fosse la stessa su entrambi i lati della superficie che delimita il conduttore, l'equilibrio non esisterebbe, poiché essendo il fluido elettrico inerte, qualsiasi differenza di pressione avrebbe l'effetto di far scorrere il fluido.

La funzione  $\psi$  gode quindi di tutte le proprietà del potenziale; di conseguenza la pressione del fluido induttore in un punto è precisamente il potenziale in questo punto.

**40.** Mostriamo infine che la teoria di Maxwell porta alla stessa espressione della teoria ordinaria per lo spessore dello strato elettrico situato sulla superficie di un conduttore.

Siano  $S$  (fig. 4) la superficie che separa l'elettricità dal fluido induttore nello stato di equilibrio normale, e  $S'$  la superficie di separazione nello stato di equilibrio vincolato. L'elettricità libera essendo l'eccesso della quantità di fluido elettrico contenuto nel conduttore nello stato di equilibrio vincolato rispetto alla quantità che si trova normalmente, la carica del conduttore è la quantità di fluido compresa tra le due superfici  $S$  e  $S'$ . Essendo questo fluido incomprimibile, la carica in ogni punto è quindi proporzionale alla distanza normale che separa le due superfici. Consideriamo una molecola del fluido induttore situata, nello stato di equilibrio normale, in un punto  $m$  della superficie  $S$ ; nello stato di equilibrio vincolato, questa molecola si troverà in  $m'$  sulla superficie  $S'$ .

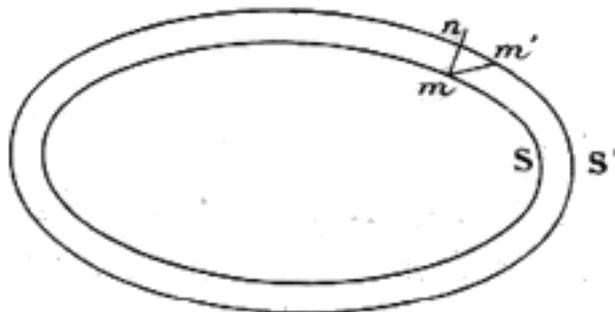


Fig. 4.

Il triangolo  $mnm'$ , il cui lato  $mn$  è la distanza normale che separa le due superfici, può essere considerato come un triangolo rettangolo in  $n$ . Lo spessore dello strato elettrico è quindi uguale alla proiezione dello spostamento sulla normale alla superficie (in realtà lo spostamento è normale alla superficie, ma non abbiamo bisogno di introdurre qui questa proprietà del fluido induttore). Questa proiezione vale

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = -\frac{K}{4\pi} \left( \alpha \frac{d\psi}{dx} + \beta \frac{d\psi}{dy} + \gamma \frac{d\psi}{dz} \right) = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dn}$$

Questo è proprio il valore dato dalla teoria ordinaria per lo spessore dello strato elettrico.

**41.** In quanto detto, siamo stati portati a supporre che la pressione nel fluido induttore è uguale a  $\psi$ . Ci troviamo pertanto in contraddizione con un'altra teoria di Maxwell, in cui si trova che la pressione in un punto del dielettrico, invece di essere uguale al potenziale, è proporzionale a  $\sum \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2$ . Torneremo più avanti su questa contraddizione.

**42.** Il metodo precedente non è l'unico che può essere utilizzato per dedurre le leggi della distribuzione elettrica dalla teoria di Maxwell. Ha anche lo svantaggio di non valere più se il fluido induttore non esiste o se in esso non c'è pressione. Premesso che l'ipotesi del fluido induttore è da considerarsi solo come ipotesi transitoria, non è inutile indicare un altro metodo che dia le leggi della distribuzione elettrica senza presupporre l'esistenza di tale fluido. Spieghiamo questo metodo.

Affinché un sistema sia in equilibrio, è necessario e sufficiente che la sua energia potenziale sia minima. Otterremo pertanto le condizioni dell'equilibrio elettrico, esprimendo che l'energia potenziale  $W$  è minima, o, che è lo stesso, che la variazione di  $W$  è nulla quando si assegnano a  $f, g, h$  degli incrementi qualsiasi compatibili con le relazioni. Qualunque sia la teoria adottata,  $f, g, h$  devono soddisfare alla relazione

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

che esprime l'incomprimibilità del mezzo.

D'altra parte, consideriamo uno qualunque dei conduttori del sistema. La carica  $M$  di questo conduttore sarà uno dei dati del problema.

Scriviamo che la variazione dell'energia potenziale è nulla; abbiamo

$$\delta W = \int \frac{4\pi}{K} (f\delta f + g\delta g + h\delta h) d\tau = 0$$

Ma a causa dei vincoli abbiamo anche

$$\frac{d}{dx}\delta f + \frac{d}{dy}\delta g + \frac{d}{dz}\delta h = 0$$

$$\int (\alpha\delta f + \beta\delta g + \gamma\delta h) d\omega = 0$$

dove l'integrale è esteso a tutti gli elementi di volume  $d\tau$  del dielettrico.

Il calcolo delle variazioni ci insegna che esiste una funzione  $\psi$  tale che si ha identicamente

$$\int \left[ \frac{4\pi}{K} \sum f\delta f - \psi \int \frac{d}{dx}\delta f \right] d\tau = 0$$

Integrando per parti l'integrale corrispondente al secondo termine della parentesi, otteniamo

$$\int \left[ \frac{4\pi}{K} \sum f\delta f + \int \frac{d\psi}{dx}\delta f \right] d\tau - \int (\alpha\psi\delta f + \beta\psi\delta g + \gamma\psi\delta h) d\omega = 0$$

Questa equazione deve essere soddisfatta identicamente e quindi tutti gli elementi del primo integrale devono essere nulli; si ha quindi

$$\frac{4\pi}{K}f + \frac{d\psi}{dx} = 0$$

che è proprio la relazione data da Maxwell.

Resta

$$\int \psi (\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h) d\omega = 0$$

L'integrale è esteso a tutti gli elementi della superficie di tutti i conduttori.

Questa equazione dovrà essere soddisfatta per tutti i valori di  $\delta f, \delta g, \delta h$  che soddisfano alle equazioni di legame, cioè tali che si abbia per ciascun conduttore

$$\int (\alpha \delta f + \beta \delta g + \gamma \delta h) d\omega = 0$$

Le regole per il calcolo delle variazioni ci insegnano che ciò può avvenire solo se  $\psi$  è costante sulla superficie di ciascuno dei conduttori.

Così il potenziale  $\psi$  ha un valore costante in tutti i punti della superficie di ciascuno dei conduttori, potendo questo valore variare da un conduttore all'altro.

### 3. Teoria dei dielettrici di Poisson - Come si può collegare a quella di Maxwell

**43. Ipotesi di Poisson sulla struttura dei dielettrici** Nella teoria di Poisson il ruolo dei dielettrici è assai meno importante che in quella di Maxwell. Per Poisson, il dielettrico ha il solo scopo di ostacolare il movimento dell'elettricità. Ma per spiegare l'aumento della capacità di un condensatore quando vi si sostituisce la lamina d'aria con un'altra sostanza conduttrice, una ipotesi è necessaria. Una difficoltà analoga incontrata nella teoria del magnetismo era stata risolta nel modo seguente da Poisson.

Si trattava di spiegare il magnetismo indotto. Poisson considera un pezzo di ferro dolce magnetizzato per induzione come un insieme di elementi magnetici separati tra loro da intervalli *inaccessibili al magnetismo* e di dimensioni molto piccole. In ognuno di questi elementi, a cui Poisson attribuisce per semplicità la forma sferica, i due fluidi magnetici possono separarsi e circolare liberamente.

Mossotti ha dovuto solo trasporre questa teoria in elettrostatica per spiegare i fenomeni osservati nei dielettrici. In questa ipotesi, l'aria è il solo dielettrico omogeneo; quanto agli altri dielettrici, se li rappresenta come formati da piccole sfere conduttrici disseminate in una sostanza non conduttrice che gode delle stesse proprietà dell'aria. I fenomeni attribuiti al potere induttore specifico si spiegano allora con gli effetti repulsivi e attrattivi dell'elettricità indotta nelle sfere conduttrici.

**44.** In questa teoria come in quella di Maxwell esistono delle correnti di spostamento. Infatti, supponiamo un dielettrico diverso dall'aria in presenza di conduttori elettrizzati; l'elettricità neutra delle sfere conduttrici del dielettrico è scomposta: un emisfero si trova carico positivamente, l'altro negativamente. Se allora si mettono i conduttori a terra, l'influenza sulle sfere del dielettrico cessa e le sfere ritornano allo stato neutro; l'elettricità si sposta quindi da un emisfero all'altro, di conseguenza, vi sono correnti di spostamento.

È probabile che è la concezione di Poisson e Mossotti sulla natura dei dielettrici che ha portato Maxwell alla sua teoria. Dice di averla dedotta dai lavori di Faraday e aver solo tradotto in forma matematica le idee di questo celebre fisico; ora, Faraday aveva adottato le idee di Mossotti (Cf. *Experimental Research*, Faraday, serie XIV, § 1679). Aggiungiamo che, così come vedremo presto, l'intensità delle correnti di spostamento non ha lo stesso valore nella teoria di Poisson e in quella di Maxwell. Mostreremo tuttavia come si possano accordare le due teorie.

**45.** Purtroppo alla teoria del magnetismo di Poisson sono state mosse serie obiezioni ed è certo che i calcoli del dotto geometra non sono per nulla rigorosi. Queste obiezioni valgono naturalmente per la teoria di Mossotti che non ne differisce dal punto di vista matematico.

Questo è ciò che mi spinge a non riprodurre qui questi calcoli, mi limiterò a rinviare il lettore che voglia approfondirli, alle seguenti fonti. Il lavoro originale di Poisson, sulla teoria del magnetismo è apparsa nel libro V delle Memorie dell'Accademia delle Scienze (1821.1822). Una teoria più elementare, ma passibile delle stesse obiezioni, è esposta nel libro primo delle *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* di MM. Mascart e Joubert (p. da 162 a 177). È quella che avevo sviluppato nelle mie lezioni.

Farò riferimento anche all'articolo 314 della seconda edizione di Maxwell, dove lo scienziato inglese presenta in modo molto originale una teoria identica dal punto di vista matematico a

quella di Poisson e Mossotti, ma applicandola ad un problema fisico molto diverso, quello di una corrente elettrica attraverso un conduttore eterogeneo.

Ma consiglieri soprattutto la lettura delle memorie di M. Duhem sulla magnetizzazione per induzione (Parigi, Gauthier-Villars, 1888; e Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse), dove i calcoli di Poisson e le obiezioni che si possono fare sono presentate con la massima chiarezza.

Svilupperò ora la teoria cercando di superare queste obiezioni; per questo ho bisogno di conoscere la distribuzione dell'elettricità indotta da una sfera posta in un campo uniforme.

#### 46. Sfera posta in un campo uniforme

Prendiamo una sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme e indichiamo con  $\psi$  il valore del potenziale dovuto alle masse elettriche esterne in un punto di questo campo. La forza elettriche che si esercita sull'unità di massa elettrica posta in un punto qualunque ha per componenti

$$-\frac{d\psi}{dx} \quad -\frac{d\psi}{dy} \quad -\frac{d\psi}{dz}$$

Se si assume l'asse delle  $x$  parallelo alle linee di forza del campo, questa forza elettrostatica, che indicheremo con  $\varphi$ , vale

$$\varphi = -\frac{d\psi}{dx}$$

La sfera conduttrice posta nel campo si elettrizza per induzione e l'equilibrio elettrico è raggiunto quando la forza elettrostatica dovuta alla distribuzione sulla superficie di questa sfera è uguale e direttamente opposta a  $\varphi$  in ogni punto interno. Cerchiamo l'espressione di questa forza.

47. Quando la sfera conduttrice è allo stato neutro, la possiamo considerare come formata da due sfere uguali, aventi lo stesso centro, cariche, l'una di elettricità positiva, l'altra di una quantità uguale di elettricità negativa; ognuna di queste due cariche, invece di essere soltanto superficiale, è uniformemente distribuita in tutto il volume della sfera; la risultante delle azioni esercitate da queste sfere su un punto esterno è evidentemente nulla, come deve essere. Se spostiamo la sfera negativa in modo che il suo centro giunga in  $O'$  (fig. 5), rimanendo il centro della sfera positiva in  $O$ , le azioni di queste sfere non si neutralizzeranno più. Possiamo quindi considerare la sfera conduttrice sottoposta all'azione come formata da due sfere uguali, elettrizzate in verso contrario e i cui centri non coincidono più.

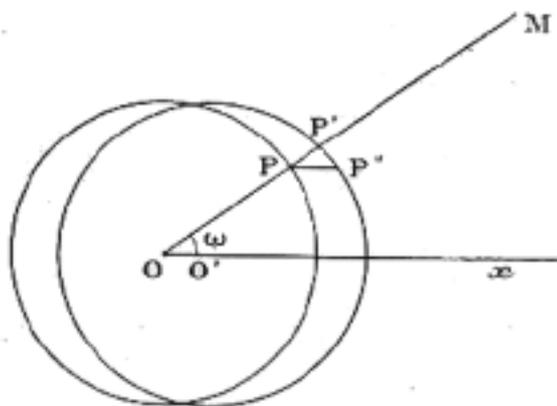


Fig. 5.

48. Si sa che nell'azione di una sfera omogenea su un punto interno posto a una distanza  $r$  dal suo centro si può considerare la massa elettrica contenuta nella sfera di raggio  $r$  concentrata

al centro della sfera. Indicando con  $\rho$  la densità elettrica in ogni punto della sfera, si ha per la forza elettrostatica che si esercita sul punto considerato

$$F = \frac{1}{r^2} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi r \rho$$

Se, pertanto, si chiamano  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate del centro della sfera,  $x, y, z$  le coordinate del punto considerato, le componenti dell'azione esercitata dalla sfera sull'unità di massa elettrica posta in un punto interno valgono

$$\frac{4}{3} \pi (x - x_0) \rho \quad \frac{4}{3} \pi (y - y_0) \rho \quad \frac{4}{3} \pi (z - z_0) \rho$$

**49.** Applichiamo queste formula alle due sfere che sostituiscono la sfera conduttrice elettrizzata per induzione. Prendiamo come origine degli assi di coordinate il centro O della sfera positiva e per asse  $x$  la retta che unisce i centri O e O' delle due sfere. Avremo per la componente lungo  $Ox$  della risultante delle azioni che si esercitano sulle due sfere sull'unità di massa elettrica posta in un punto interno  $x, y, z$

$$\frac{4}{3} \pi x \rho - \frac{4}{3} \pi (x - x_0) \rho = \frac{4}{3} \pi x_0 \rho$$

dove  $x_0$  indica l'ascissa di O'. Quanto alle componenti lungo gli assi delle  $y$  e delle  $z$ , si vede facilmente che esse sono nulle. Serve quindi, affinché una molecola elettrica interna alla sfera sia in equilibrio sotto l'azione del campo uniforme  $\rho$  e dell'elettricità sviluppata sulla sfera dall'induzione, che la linea dei centri delle sfere positiva e negativa sia parallela al campo e che la distanza di questi centri soddisfi all'uguaglianza

$$\varphi = -\frac{4}{3} \pi x_0 \rho$$

D'altra parte, siccome le densità delle sfere sono soggette solo alla condizione di essere uguali in valore assoluto, possiamo supporre che queste densità siano +1 e -1. Si ha allora

$$\varphi = -\frac{4}{3} \pi x_0 \quad (1)$$

uguaglianza che ci fornisce la distanza dei centri delle due sfere.

**50.** Possiamo trovare facilmente il valore del potenziale risultante della sfera influenzata in un punto M esterno ad essa. L'azione di una sfera omogenea su un punto esterno può essere considerata esercitata da tutta la massa concentrata nel suo centro e il potenziale in M può essere espresso da

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{r - r'}{rr'}$$

dove con  $R$  si indica il raggio di ciascuna delle sfere,  $r$  e  $r'$  le distanze dal punto M ai centri O e O'. Chiameremo  $\omega$  l'angolo della direzione OM con l'asse delle  $x$  e trascureremo le quantità infinitamente piccole del secondo ordine, considerando  $x_0$  come del primo ordine. Allora l'espressione precedente si può scrivere

$$-\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{x_0 \cos \omega}{r^2}$$

o tenendo conto della relazione (1)

$$\varphi R^3 \frac{\cos \omega}{r^2} \quad (2)$$

La distribuzione elettrica sulla sfera indotta si ottiene altrettanto facilmente. Lo spessore dello strato negativo in un punto P qualunque è

$$PP' - PP'' \cos \omega = x_0 \cos \omega = -\frac{3\varphi \cos \omega}{4\pi}$$

pertanto, lo spessore dello strato elettrico superficiale è dato, in valore e in segno, dall'espressione  $\frac{3\varphi \cos \omega}{4\pi}$ .

Si dice che una sfera conduttrice sulla quale la distribuzione elettrica è la stessa come se fosse posta in un campo uniforme, è *polarizzata*.

### 51. Polarizzazione dei dielettrici

Consideriamo ora un dielettrico, costituito come lo immagina Mossotti e sottoposto all'azione di elementi elettrizzati esterni. Ciascuno delle sfere che contiene si polarizzerà. Infatti, essendo le dimensioni di queste sfere molto piccole, in prossimità di ciascuna di esse il campo elettrico può ritenersi uniforme.

È vero che la distribuzione elettrica sulla superficie di una di queste sfere potrebbe essere disturbata dall'influenza delle sfere vicine; ma non dovremo tenere conto di questi disturbi:

1° Perché essendo le sfere irregolarmente distribuite, la loro influenza tende a neutralizzarsi reciprocamente;

2° Perché se si ammette che la distribuzione alla superficie di una sfera non è la stessa come se fosse in un campo uniforme, queste irregolarità della distribuzione sono espresse da funzioni sferiche di ordine superiore; se quindi si considera il potenziale in un punto posto a una distanza  $r$  dal centro della sfera, i termini che dipendono da queste irregolarità conteranno una potenza superiore di  $1/r$  e saranno trascurabili, se  $r$  è molto grande rispetto al raggio della sfera.

Diremo allora che un dielettrico le cui sfere sono polarizzate è esso stesso polarizzato.

**52.** Dobbiamo ora definire le componenti della polarizzazione elettrica che corrispondono a ciò che nella teoria del magnetismo si chiamano componenti della magnetizzazione.

Abbiamo visto in precedenza che il potenziale della nostra sfera rispetto a un punto esterno era uguale a:

$$\varphi R^3 \frac{\cos \omega}{r^2}$$

o a

$$-\frac{3}{4\pi} u \varphi \frac{d^1}{dx}$$

indicando con  $u$  il volume della sfera.

Se si prendessero degli assi di coordinate qualsiasi, avremmo per il potenziale della sfera polarizzata, con  $x, y, z$  le coordinate del suo centro,

$$-\frac{3u}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} \frac{d^1}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{d^1}{dy} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d^1}{dz} \right)$$

Immaginiamo ora un elemento di volume  $d\tau$  del dielettrico, contenente un numero molto grande  $n$  di sfere, e tuttavia assai piccolo perché il campo possa esservi considerato come uniforme. Il potenziale delle  $n$  sfere contenute in questo elemento sarà:

$$-\frac{3nu}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} \frac{d^1}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{d^1}{dy} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d^1}{dz} \right)$$

Poniamo

$$nu = hd\tau$$

in modo che  $h$  sia il rapporto tra il volume delle sfere e quello totale del dielettrico.

Poniamo inoltre

$$A = -\frac{3h}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \quad B = -\frac{3h}{4\pi} \frac{d\psi}{dy} \quad C = -\frac{3h}{4\pi} \frac{d\psi}{dz}$$

verrà per il potenziale dovuto all'elemento polarizzato  $d\tau$

$$d\tau \left( A \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} + B \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} + C \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right)$$

Le tre quantità  $A, B, C$  sono le *componenti della polarizzazione*, e il potenziale dovuto all'intero dielettrico si scriverà

$$V = \int d\tau \left( A \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} + B \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} + C \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} \right)$$

essendo l'integrale esteso all'intero dielettrico; o, integrando per parti,

$$V \int \frac{d\omega}{r} (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r} \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

Il primo integrale è esteso a tutti gli elementi  $d\omega$  della superficie che limita il dielettrico,  $l, m, n$  indicando i coseni direttori della normale a questa superficie; il secondo integrale è esteso a tutto il volume del dielettrico.

**53.** Sia ora  $V_1$  il potenziale dovuto ai corpi esterni elettrizzati. Sia  $s$  una qualunque delle piccole sfere conduttrici aventi come centro un dato punto  $O$  e esprimiamo le condizioni per l'equilibrio elettrico su questa sfera.

Scomponiamo il volume del dielettrico in due volumi parziali  $v'$  e  $v''$ ; il secondo di essi sarà molto piccolo e conterrà la sfera  $s$ .

Consideriamo una molecola elettrica posta in  $O$ ; questa molecola dovrà essere in equilibrio sotto l'azione:

- 1° Dei corpi esterni elettrizzati;
- 2° Del volume  $v'$  del dielettrico;
- 3° Delle sfere diverse da  $s$  poste all'interno di  $v''$ ;
- 4° Della sfera  $s$ .

Supporremo che il volume  $v''$ , sebbene contenente un grande numero di sfere, sia assai piccolo affinché le componenti  $A, B, C$ , possano essere considerate costanti e sceglieremo gli assi in modo che  $B$  e  $C$  e di conseguenza  $\frac{d\psi}{dy}, \frac{d\psi}{dz}$  siano nulle.

**54.** Scriviamo che le componenti di tutte queste azioni lungo l'asse delle  $x$  si annullino.

Per evitare ogni confusione chiameremo per un istante  $x, y, z$  le coordinate del punto attraente,  $\xi, \eta, \zeta$  quelle del punto attratto, di modo che

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Ricordiamo inoltre con  $\psi$  indica il potenziale del campo uniforme che produrrebbe su ogni sfera conduttrice la loro polarizzazione attuale, e che il potenziale attuale è uguale a  $V + V_1 = U$ . Continueremo ad indicare le componenti del campo uniforme con  $-\frac{d\psi}{dx}, -\frac{d\psi}{dy}, -\frac{d\psi}{dz}$ .

La componente dovuta alla sfera  $v$  sarà  $+\frac{d\psi}{dx}$  poiché, per ipotesi, la sfera è polarizzata come lo sarebbe sotto l'azione di un campo uniforme di intensità  $-\frac{d\psi}{dx}$ .

**55.** Dico che se la superficie  $\sigma$  che separa i due volumi parziali  $v'$  e  $v''$  è opportunamente scelta, l'azione delle sfere diverse da  $s$  e interne a  $v'$  sarà nulla.

Infatti siano  $a, b, c$  le coordinate del centro di una di queste sfere, essendo il punto  $O$  preso come origine. La forza elettrostatica esercitata da questa sfera nel punto  $O$  avrà per componente lungo l'asse  $x$ :

$$-\frac{3u}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx^2} = \frac{3u}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 3a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Ne deriva che le azioni delle tre sfere che hanno rispettivamente per centri i punti

$$(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)$$

si distruggono.

Se quindi la superficie  $\sigma$  possiede la simmetria cubica e non cambia quando si permutano i tre assi di coordinate, le azioni delle diverse sfere contenute all'interno di questa superficie si neutralizzano. È per non aver fatto questa ipotesi che Poisson non è stato rigoroso.

Supporremo, per fissare le idee, che la superficie  $\sigma$  è una sfera di centro O.

**56.** Rimane da valutare l'azione del volume  $v'$ .

Essa è uguale a

$$-\frac{dV'}{d\xi}$$

e indicando con  $V'$  l'integrale

$$\int d\tau \left( A \frac{d^1}{dx} + B \frac{d^1}{dy} + C \frac{d^1}{dz} \right)$$

esteso al volume  $v'$ ; e si avrà

$$V' = V - V''$$

dove  $V''$  è lo stesso integrale esteso al volume  $v''$ , da cui

$$\frac{dV'}{d\xi} = \frac{dV}{d\xi} - \frac{dV''}{d\xi}$$

Abbiamo inoltre, come visto in precedenza

$$V'' = \int \frac{d\omega}{r} (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r} \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

essendo il primo integrale esteso alla superficie  $\sigma$  e il secondo al volume  $v''$ .

Se ne deduce

$$\frac{dV''}{d\xi} = \int \frac{d\omega}{r^3} x (lA + mB + nC) - \int \frac{d\tau}{r^3} x \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

Se il raggio della sfera  $\sigma$  è infinitamente piccolo, sarà così anche per il secondo degli integrali del secondo membro dell'uguaglianza precedente, ma non per il primo.

D'altra parte se questo raggio è molto piccolo,  $A, B, C$  sono costanti e abbiamo supposto che  $B$  e  $C$  sono nulli. Si ha pertanto

$$\frac{dV''}{d\xi} = A \int \frac{x l}{r^3} d\omega$$

Ora  $l$  è il coseno direttore della normale alla sfera; è quindi  $\frac{x}{r}$  e si ha:

$$\frac{dV''}{d\xi} = A \int \frac{x^2}{r^4} d\omega = \frac{4}{3} \pi A$$

**57.** L'equazione per l'equilibrio si scrive pertanto:

$$-\frac{dV_1}{d\xi} + \frac{d\psi}{dx} - \frac{dV}{d\xi} + \frac{4}{3} \pi A = 0$$

o

$$\frac{d(V + V_1)}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi} = \frac{4}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{h} \right) A$$

Se invece di prendere come asse la direzione della polarizzazione nel punto considerato, prendiamo degli assi qualsiasi, troveremo, invece dell'unica equazione appena dimostrata, le seguenti equazioni:

$$(1 - K) \frac{dU}{dx} = 4\pi A$$

$$(1 - K) \frac{dU}{dy} = 4\pi B$$

$$(1 - K) \frac{dU}{dz} = 4\pi C$$

e ponendo per abbreviare

$$K - 1 = \frac{3h}{1 - h}$$

da cui

$$h = \frac{K - 1}{K + 2}$$

Scriviamo inoltre  $\frac{dU}{dx}$  invece di  $\frac{dU}{d\xi}$  ritornando alle consuete notazioni, cosa che non presenta più inconvenienti poiché non ci sarà più alcuna confusione.

**58.** Si deduce da ciò differenziando la prima di queste equazioni rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$  e la terza rispetto a  $z$  e sommando

$$-\frac{d}{dx} \left( K \frac{dU}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left( K \frac{dU}{dy} \right) - \frac{d}{dz} \left( K \frac{dU}{dz} \right) + \Delta U = 4\pi \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

Ora  $V_1$  è il potenziale dei corpi esterni, si ha quindi

$$\Delta V_1 = 0$$

D'altra parte l'equazione (3) mostra che  $V$  si può considerare come il potenziale dovuto a uno strato di densità

$$lA + mB + nC$$

distribuito alla superficie del dielettrico, meno il potenziale di una quantità di elettricità distribuita in tutto questo volume e avente per densità

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}$$

Ne risulta che:

$$\Delta U = \Delta V = 4\pi \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

e di conseguenza

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dU}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( K \frac{dU}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( K \frac{dU}{dz} \right) = 0$$

Ora,  $U = V + V_1$  indicante il potenziale, il confronto dell'equazione alla quale siamo giunto con le equazioni fondamentali dell'elettrostatica, mostra che  $K$  non è altro che il potere induttore.

**59.** Così, in un dielettrico formato secondo l'idea di Mossotti, e di potere induttore  $K$ , il rapporto tra il volume occupato dalle sfere e quello totale è uguale a:

$$h = \frac{K - 1}{K + 2}$$

Si trova inoltre

$$(1 - K) \frac{dU}{dx} = 4\pi A = -3h \frac{d\psi}{dx}$$

Lo spostamento elettrico della teoria di Maxwell si scrive allora:

$$f = -\frac{K dU}{4\pi dx} = -\frac{3h}{4\pi} \frac{K}{K-1} \frac{d\psi}{dx} = -\frac{3h}{4\pi} \frac{K}{K+2} \frac{d\psi}{dx}$$

Le altre due componenti dello spostamento elettrico sono nulle se, come supponiamo, assumiamo come asse  $x$  la direzione della polarizzazione nel punto considerato. Se nello stesso tempo, ritornando alla notazione del n° 46, chiamiamo  $\varphi$  l'intensità del campo uniforme che polarizzerebbe le nostre piccole sfere come lo sono in realtà, avremmo:

$$\varphi = -\frac{d\psi}{dx}$$

e

$$f = \frac{3h}{4\pi} \frac{K}{K+2} \varphi \quad (4)$$

**60.** Abbiamo visto che nella teoria di Poisson e Mossotti la polarizzazione delle piccole sfere conduttrici varia al variare del campo elettrico in cui sono poste, e che le correnti che si verificano in queste piccole sfere e risultanti da questa variazione possono essere paragonate alle correnti dello spostamento di Maxwell. È importante confrontare l'intensità di queste correnti di spostamento nelle due teorie.

Perciò calcolerò il valore di  $f'$  dello spostamento elettrico nella teoria di Mossotti e lo confronterò con il valore  $f$  appena trovato.

Ognuna delle nostre sfere è polarizzata come se fosse soggetta all'azione di un campo uniforme di intensità  $\varphi$ .

Quindi da quanto abbiamo visto al n. 49 avviene come se ci fossero due sfere dello stesso raggio della sfera conduttrice, una riempita di fluido positivo di densità 1, l'altra di fluido negativo di densità 1, e se la sfera negativa, coincidente nello stato di equilibrio normale con la sfera positiva, subiva, sotto l'influenza di un campo uniforme di intensità  $\varphi$ , uno spostamento  $x_0$  dato dalla formula

$$\rho = -\frac{4}{3}\pi x_0$$

Tutto avviene quindi come se si ha uno spostamento in blocco dei fluidi elettrici di ciascuna delle piccole sfere. Ma, le sfere conduttrici non occupano l'intero volume del dielettrico; sono separate tra loro da un mezzo isolante che gode delle stesse proprietà dell'aria, e la somma dei loro volumi è il volume totale del dielettrico nel rapporto  $h$  a 1. La somma delle cariche positive presenti su queste sfere è quindi  $h$  volte minore della somma di queste stesse cariche nell'ipotesi in cui l'intero volume del dielettrico è occupato da sfere conduttrici. Così come per le cariche negative, si può ammettere che ciascuno dei fluidi sia distribuito nel dielettrico con densità  $h$ , oppure che ciascuno di essi occupi solo una frazione  $h$  del volume del dielettrico con densità 1. Il valore dello spostamento medio sarà ovviamente lo stesso in entrambi i casi. Se adottiamo la prima ipotesi potremo applicare alla sfera dielettrica le formule del n. 49 sostituendovi  $x_0$  con  $hx_0$ , poiché in queste formule la densità è supposta uguale ad 1 e ora è  $h$ . Questa quantità  $hx_0$  è quindi lo spostamento medio che subisce il fluido negativo nel dielettrico sottoposto all'azione del campo. Se sostituiamo  $x_0$  con il suo valore ricavato dalla equazione (1), abbiamo per questo spostamento  $-h\frac{3\varphi}{4\pi}$  e quindi per lo spostamento del fluido positivo rispetto a quello negativo, che ne differisce per il segno del precedente

$$f' = h\frac{3\varphi}{4\pi}$$

Ora si ha:

$$h = \frac{K-1}{K+2} \quad (5)$$

Ma se per effetto di questo rapporto le azioni esterne dei dielettrici sono le stesse nelle due teorie, le intensità delle correnti di spostamento non hanno lo stesso valore nell'una e nell'altra. Infatti, se portiamo questo valore di  $h$  nell'espressione di  $f$  otteniamo per il valore dello spostamento nella teoria di Poisson

$$f' = \frac{3\varphi K - 1}{4\pi K + 2} \quad (6)$$

che differisce da quella dello spostamento nella teoria di Maxwell, data dalla (4). Il rapporto tra queste quantità è

$$\frac{f'}{f} = \frac{K - 1}{K}$$

è anche il rapporto tra le intensità di corrente dello spostamento nelle due teorie. Nell'aria l'intensità di corrente di spostamento è nulla quando si adottano le idee di Poisson poiché la (6) dà  $f' = 0$  per  $K = 1$  e il potere induttore specifico dell'aria è l'unità. Nella teoria di Maxwell, lo spostamento in aria ha, dalla (4), il valore  $f = \frac{\varphi}{4\pi}$ , e quindi, contrariamente a quanto avviene nella teoria di Poisson, l'intensità della corrente di spostamento non è nulla in questo mezzo. Questa è la principale differenza esistente tra le due teorie di cui confronteremo le conseguenze.

**61.** Ma, così come annunciato all'inizio di questo capitolo, è possibile introducendo nella teoria di Poisson alcune modifiche secondarie di accordare i suoi risultati con quelli della teoria di Maxwell. Questo andremo a mostrare.

Osserviamo che se le formule (5) e (7), che danno  $h$  il rapporto degli spostamenti, non sono omogenei, ciò perché abbiamo scelto l'unità per il potere induttore specifico della sostanza isolante che separa le sfere conduttrici in quella di Poisson.

Sarà facile verificare che se indichiamo con  $K_1$  il potere induttore di questa sostanza, le formule (5) e (7) divengono

$$h = \frac{K - K_1}{K + 2K_1} \quad \frac{f'}{f} = \frac{K - K_1}{K}$$

Quest'ultima formula mostra che se  $K_1$  è molto piccolo il rapporto tra gli spostamenti è vicino all'unità. Le intensità delle correnti di spostamento avrebbero quindi sensibilmente lo stesso valore nelle due teorie se  $K_1$  fosse infinitamente piccolo, ciò che richiede che  $h$  differisca infinitamente poco dall'unità, cioè che lo spazio non conduttore che separa le sfere conduttrici sia infinitamente piccolo. Abbiamo però introdotto solo l'ipotesi della forma sferica dei conduttori sparsi nel dielettrico per avere più semplicità nei calcoli; restando vere le conseguenze per qualsiasi forma di conduttore, possiamo immaginare un dielettrico come formato da *cellule* conduttrici separate da partizioni non conduttrici. Basta allora mettere in accordo la teoria di Poisson con quella di Maxwell per assumere che tali partizioni abbiano uno spessore infinitamente piccolo, poiché allora  $h$  differisce infinitamente poco dall'unità e che siano formate da una sostanza isolante con potere induttore specifico  $K$  infinitamente piccolo. Mostriamo che questo accordo si ritrova in tutte le conseguenze della teoria di Maxwell e che dal punto di vista matematico quest'ultima teoria è identica a quella di Poisson così modificata.

## 62. Propagazione del calore in un mezzo omogeneo

La serie dei calcoli necessari ci condurrà a fatti del tutto simili a quelli stabiliti da Fourier nello studio della conducibilità del calore. Per evidenziare l'analogia matematica che esiste tra fenomeni elettrici e fenomeni calorifici, inizieremo richiamando brevemente la teoria di Fourier.

Questa teoria si basa sulle seguenti ipotesi: quando due molecole di un corpo si trovano a temperature diverse, si ha un passaggio di calore dalla più calda alla più fredda; la quantità di calore che passa in un dato tempo è funzione della distanza, che tende rapidamente a zero al crescere della distanza, e che non dipende dalla temperatura; infine questa quantità di calore è

proporzionale alla differenza  $V_1 - V_2$  tra le temperature delle due molecole. Da ciò risulta che la quantità di calore che passa durante un tempo  $dt$  da una molecola a un'altra è

$$dq = -Cdt\Delta V \quad (1)$$

dove  $\Delta V$  è la variazione della temperatura quando ci si sposta nel verso del flusso calorifico e  $C$  una quantità indipendente dalla temperatura.

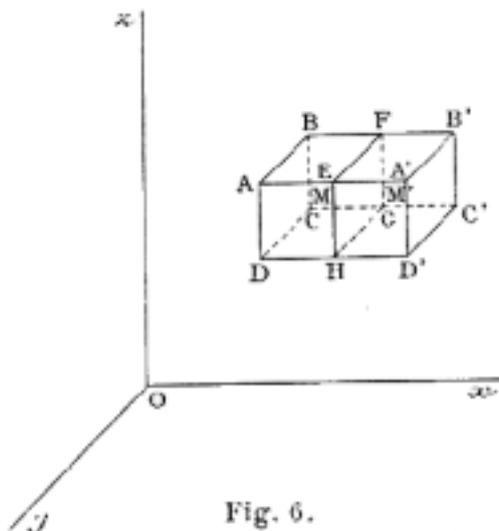
**63.** Consideriamo un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo ABCDA'B'C'D' (fig. 6) posto nel corpo e prendiamo tre assi coordinati rispettivamente paralleli ai tre spigoli del parallelepipedo. Siano  $d\tau$  il suo volume,  $d\omega$  la superficie della sua sezione per un piano perpendicolare all'asse  $x$ ,  $a$  e  $b$  le coordinate delle due estremità A e A' di uno spigolo parallelo a questo asse; si ha la relazione

$$d\tau = d\omega (b - a)$$

Cerchiamo la quantità di calore  $Qd\omega dt$  che attraversa la sezione  $d\omega$  nell'intervallo di tempo  $dt$ . Per questo calcoliamo in due modi diversi l'integrale

$$\int_a^b (Qd\omega dt) dx \quad (2)$$

che esprime la somma delle quantità di calore che attraversano tutte le sezioni del parallelepipedo perpendicolare a  $Ox$  nel tempo  $dt$ .



L'integrazione dà immediatamente, se si considera come costante la quantità di calore che attraversa ogni sezione  $d\omega$  del parallelepipedo infinitamente piccolo,

$$Qd\omega dt (b - a) = Qd\tau dt$$

**64.** Per trovare un'altra espressione di questa quantità, tagliamo il parallelepipedo con una sezione qualunque EFGH perpendicolare a  $Ox$  e prendiamo da una parte e dall'altra due molecole M e M'. Dalle ipotesi di Fourier la quantità di calore che passa da una all'altra nel tempo  $dt$  è

$$qdt = -Cdt\Delta V \quad (3)$$

e la somma delle quantità di calore che passano per tutte le sezioni del parallelepipedo è

$$\int_a^b (qdt) dx$$

Ma per le sezioni che non sono comprese tra le molecole non vi è passaggio di calore e gli elementi dell'integrale che corrispondono a tali sezioni sono nulli. Basta quindi prendere come limiti dell'integrale i valori  $x$  e  $x + \Delta x$  delle coordinate dei punti  $M$  e  $M'$ ; si ottiene

$$\int_x^{x+\Delta x} (qdt) dx = q\Delta x dt$$

Le altre coppie di molecole del parallelepipedo danno quantità analoghe. La loro somma è precisamente il valore dell'integrale (2) e abbiamo

$$Dd\tau dt = \sum q\Delta x dt \quad (4)$$

Ma la relazione (3) ci dà per  $q$

$$q = -C \left( \frac{dN}{dx} \Delta x + \frac{dN}{dy} \Delta y + \frac{dN}{dz} \Delta z \right)$$

trascurando nello sviluppo delle potenze di  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , uguali e superiori a 2, cosa permessa, essendo gli scambi di calore supposti avvenire solo tra molecole molto vicine ed essendo i termini trascurati allora molto piccoli rispetto ai primi termini dello sviluppo. Portando questo valore di  $q$  nella (4), otteniamo

$$Qd\tau = -\frac{dV}{dx} \sum C\Delta x^2 - \frac{dV}{dy} \sum C\Delta x\Delta y - \frac{dV}{dz} \sum C\Delta x\Delta z \quad (5)$$

essendo  $C$  per ipotesi indipendente dalla temperatura. I coefficienti delle derivate parziali di  $V$  non ne dipendono più. Di conseguenza  $Q$  è una funzione lineare e omogenea di queste derivate.

**65.** Se il corpo considerato è isotropo, questa funzione si riduce a un solo termine. Infatti, in questo caso l'espressione di  $Q$  non deve cambiare sostituendo  $x$  con  $-x$  ed è necessario, perché sia così, che le derivate parziali di  $V$  rispetto a  $y$  e  $z$  svaniscano dal secondo membro. Abbiamo quindi semplicemente

$$Qd\tau = -\frac{dV}{dx} \sum C\Delta x^2$$

e se poniamo

$$A = \frac{\sum C\Delta x^2}{d\tau}$$

si ha

$$Q = -A \frac{dV}{dx}$$

La costante  $A$  è il *coefficiente di conducibilità termica* del mezzo.

Siccome il mezzo è supposto isotropo, il valore di questo coefficiente è lo stesso per tutte le direzioni; avremo quindi per la quantità di calore per unità di superficie attraverso un elemento di superficie perpendicolare a uno degli altri assi di coordinate

$$Q = -A \frac{dV}{dy}$$

$$Q = -A \frac{dV}{dz}$$

In un modo generale, avremo per un elemento orientato in maniera qualunque

$$Q = -A \frac{dV}{dn}$$

essendo  $dn$  una lunghezza infinitamente piccola presa sulla normale all'elemento.

### 66. Analogia con il spostamento dell'elettricità nelle celle

All'interno di ciascuna cella conduttrice il potenziale  $\psi$  è costante, ma tale potenziale varia improvvisamente quando si attraversano le pareti isolanti che delimitano le celle;  $\psi$  è quindi una funzione discontinua delle coordinate. Non potremmo introdurre questa funzione nei nostri calcoli senza fare ipotesi sulla sua forma, è più semplice considerare al suo posto una funzione continua il cui valore in ogni punto differisce poco da quello di  $\psi$ . Supporremo che queste due funzioni assumano gli stessi valori nei centri di gravità  $G_1, G_2, G_3, \dots$  delle diverse celle; l'errore commesso sostituendo a  $\psi$  una funzione continua sarà allora dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni delle celle, dimensioni che possiamo sempre supporre molto piccole.

Consideriamo una di queste celle (fig. 7). Quando il dielettrico non più sottoposto all'azione di un campo questa celle è allo stato neutro; nel caso contrario essa presenterà sulle sue facce  $S_1, S_2, S_3, S_4$  quantità di elettricità  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , ma poiché la cella conduttrice non cessa di essere isolata, la somma di queste quantità è nulla

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$$

Se il valore del campo cambia, le cariche di ciascuna delle facce della cella variano, ma rimanendo la loro somma nulla, si ha, chiamando  $dq_1, dq_2, \dots$  le variazioni prodotte nell'intervallo di tempo  $dt$ ,

$$dq_1 + dq_2 + dq_3 + dq_4 = 0$$

Pertanto può verificarsi un aumento della carica su una delle facce solo se vi è una diminuzione su un'altra. Supponiamo, per stabilire le idee, che la carica di  $S_3$  aumenti e quella di  $S_1$  diminuisca. Una certa quantità di energia elettrica passerà da  $S_1$  a  $S_3$  seguendo un percorso che rappresenteremo con APB.

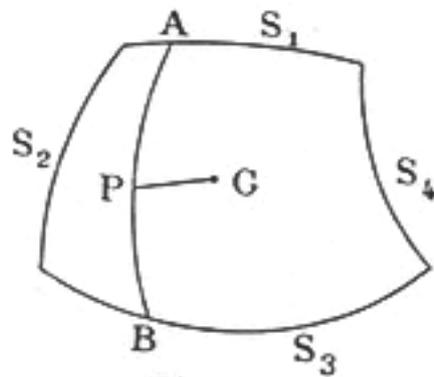


Fig. 7.

Ma equivale ovviamente alla stessa cosa supporre che l'elettricità segua il percorso APGPB poiché il tratto PG che congiunge un punto qualsiasi P del percorso reale al centro di gravità della cella è percorso successivamente nei due sensi. Si può quindi considerare il passaggio di una certa quantità di elettricità da  $S_1$  a  $S_3$  come risultante del passaggio di questa stessa quantità da  $G$  a  $S_3$  e del passaggio di una uguale quantità ma di segno contrario da  $G$  a  $S_1$ . Tutto avviene quindi come se, a causa della variazione del campo, quantità  $dq_1, dq_2, \dots$  di elettricità vadano dal centro di gravità  $G$  alle diverse superfici della cella.

**67.** Prendiamo ora due celle contigue con centro di gravità  $G_1$  e  $G_2$  (fig. 8). Siano  $S_1$  e  $S_2$  le facce di ciascuna di queste celle opposte tra loro. Queste due facce si possono considerare come le armature di un condensatore a facce parallele e infinitamente vicine e se supponiamo che la carica di  $S_1$  aumenti di  $dq$ , ne deriva necessariamente una diminuzione di carica  $-dq$  sulla superficie di fronte a  $S_2$ . Da quanto detto, l'aumento  $dq$  della carica di  $S_1$  si può considerare

come risultante dal passaggio di  $dq$  da  $G_1$  a  $S_1$ . Analogamente, la diminuzione della carica di  $S_2$ , o similmente, del passaggio di  $dq$  da  $S_2$  in  $G_2$ . Ma allora è come se la quantità  $dq$  andasse da  $G_1$  a  $G_2$ . Si può quindi dire che vi è uno scambio di elettricità tra le molecole  $G_1$  e  $G_2$  e iniziamo a veder comparire l'analogia con i fenomeni calorifici.

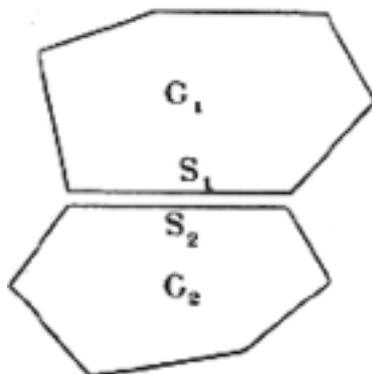


Fig. 8.

**68.** Chiamiamo  $C$  la capacità del condensatore formato dalle facce  $S_1$  e  $S_2$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  i valori del potenziale in ciascuna cella; avremo per il valore assoluto della quantità di elettricità posta su  $S_1$  e  $S_2$

$$q = C(\psi_1 - \psi_2)$$

Poiché è la faccia della cella a potenziale più alto ad essere caricata di elettricità positiva, l'elettricità positiva, nello spostamento fittizio che abbiamo supposto, che avviene tra i centri di gravità, passa da un centro di gravità ad un altro di potenziale inferiore. Di conseguenza, chiamando  $\Delta\psi$  la variazione del potenziale nel verso dello spostamento, abbiamo per la quantità di elettricità che passa da un centro di gravità a un altro

$$q = -C\Delta\psi$$

Durante un intervallo di tempo  $dt$ , la variazione della differenza di potenziale  $\Delta\psi$  tra i punti considerati sarà  $dt \frac{d}{dt} \Delta\psi$  o  $dt \Delta \frac{d\psi}{dt}$ ; pertanto, la quantità di elettricità che passa da uno questi punti all'altro in questo stesso intervallo è

$$dq = -C dt \Delta \frac{d\psi}{dt}$$

Questa formula è identica alla formula (1) del n. 62 che dà la quantità di calore che passa da una molecola all'altra, essendo  $C$  del resto in entrambe le formule indipendente dalla quantità la cui variazione è indicata con  $\Delta$ .

**69.** La legge degli scambi di elettricità è la stessa di quella degli scambi di calore nella teoria di Fourier e, quindi, possiamo ottenere la quantità di elettricità riferita all'unità di superficie attraverso un elemento qualsiasi sostituendo nella (6) (65), la temperatura  $V$  con la quantità  $\frac{d\psi}{dt}$ . Indicando, come fatto da Maxwell,

$$u d\omega dt \quad v d\omega dt \quad w d\omega dt$$

le quantità di elettricità che attraversano nel tempo  $dt$  elementi  $d\omega$  rispettivamente perpendicolari agli assi delle coordinate, avremo

$$\begin{cases} u = -A \frac{d^2\psi}{dt dx} \\ v = -A \frac{d^2\psi}{dt dy} \\ w = -A \frac{d^2\psi}{dt dz} \end{cases} \quad (7)$$

Ora,  $u, v, w$  sono nella teoria di Maxwell le componenti della velocità dello spostamento elettrico, e quindi, poiché  $f, g, h$ , rappresentano le componenti di questo spostamento

$$u = \frac{df}{dt} \quad v = \frac{dg}{dt} \quad w = \frac{dh}{dt}$$

Se quindi si adottano per  $u, v, w$  i valori trovati, si ottiene per  $f$

$$f = -A \frac{d\psi}{dx} \quad (8)$$

Siccome nella teoria di Maxwell

$$f = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx}$$

si vede che la teoria delle celle sarà in accordo con quella di Maxwell se poniamo

$$A = \frac{K}{4\pi}$$

**70.** Cerchiamo di trovare la relazione che, nella teoria di Maxwell, esprime l'incomprimibilità del fluido induttore.

Poiché la quantità totale di elettricità contenuta in ciascuna cella è nulla in ogni istante, anche la quantità di elettricità che penetra in un qualsiasi intervallo di tempo attraverso una superficie chiusa che delimita un volume è nulla. Ora, essendo  $u, v, w$  le componenti lungo i tre assi della velocità con cui avviene il movimento dell'elettricità, la componente di tale velocità lungo la normale ad un elemento  $d\omega$  della superficie è

$$\alpha u + \beta v + \gamma w$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori della normale. Pertanto, la quantità di elettricità che attraversa  $d\omega$  nell'unità di tempo è

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w) d\omega$$

e la quantità che attraversa la superficie chiusa nello stesso tempo è uguale all'integrale

$$\int (\alpha u + \beta v + \gamma w) d\omega$$

esteso a tutti gli elementi di questa superficie. Durante un intervallo di tempo  $dt$ , la quantità di elettricità che attraversa la superficie chiusa è il prodotto dell'integrale precedente per  $dt$ . Integrando rispetto al tempo otterremo la quantità di elettricità che attraversa la superficie in un tempo qualunque e, poiché questa quantità è nulla, l'integrale ottenuto dovrà essere uguale a 0. Se notiamo che  $u, v, w$  sono le derivate rispetto al tempo delle componenti  $f, g, h$  dello spostamento, abbiamo per questo integrale

$$\int (\alpha f + \beta g + \gamma h) d\omega = 0 \quad (9)$$

Si sa che

$$\int \alpha f d\omega = \int \frac{df}{dx} d\tau$$

il primo integrale essendo esteso ad una superficie chiusa, il secondo al volume limitato da tale superficie. Trasformando allo stesso modo gli altri due termini dell'integrale (9), si ottiene

$$\int \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) d\tau = 0$$

Questa uguaglianza deve essere soddisfatta qualunque sia il volume considerato, e, quindi, ne concluderemo

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

Questa è infatti la relazione che, nella teoria di Maxwell, lega tra loro le derivate delle componenti dello spostamento del fluido induttore di un mezzo dielettrico.

## 71. Identità delle espressioni dell'energia potenziale

Infine, mostriamo che la teoria delle celle porta alla stessa espressione di energia potenziale della teoria di Maxwell. Sappiamo che l'energia potenziale di un sistema di conduttori elettrizzati è uguale alla semi somma dei prodotti della carica di ciascun conduttore per il suo potenziale. Le cariche delle superfici affacciate di due celle contigue sono uguali e di segno opposto; di conseguenza, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono i loro potenziali, il termine fornito all'energia potenziale da queste cariche è

$$\frac{1}{2} (q\psi_1 - q\psi_2) = -\frac{1}{2} q\Delta\psi$$

D'altra parte se  $C$  è la capacità del condensatore formato dalle superfici considerate, si ha

$$q = -C\Delta\psi$$

e il termine precedente diviene

$$\frac{1}{2} C (\Delta\psi)^2$$

Sviluppando  $\Delta\psi$  rispetto alle potenze crescenti di  $\Delta$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , e trascurando le potenze di queste quantità superiori alla prima, otteniamo

$$\Delta\psi = \frac{d\psi}{dx}\Delta x + \frac{d\psi}{dy}\Delta y + \frac{d\psi}{dz}\Delta z$$

Consideriamo quindi un elemento di volume  $d\tau$  sufficientemente piccolo da poter ammettere che le derivate parziali di  $\psi$  abbiano lo stesso valore in ogni punto di questo elemento, ma sufficientemente grande da contenere un numero molto elevato di celle, e quindi un numero molto grande di piccoli condensatori, si avrà quindi

$$dW = \frac{1}{2} \sum C (\Delta\psi)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 \sum C \Delta x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 \sum C \Delta y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 \sum C \Delta z^2 + \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dy} \sum C \Delta x \Delta y + \dots \quad (10)$$

Ma abbiamo osservato a proposito di questi fenomeni calorifici che nel caso di un mezzo isotropo, le somme

$$\sum C \Delta x \Delta y \quad \sum C \Delta y \Delta z \quad \sum C \Delta z \Delta x$$

sono nulle. Abbiamo posto

$$A = \frac{\sum C \Delta x^2}{d\tau} = \frac{\sum C \Delta y^2}{d\tau} = \frac{\sum C \Delta z^2}{d\tau}$$

Di conseguenza, avremo per l'energia potenziale dell'elemento  $d\tau$ ,

$$W = \frac{Ad\tau}{2} \left[ \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 \right]$$

Se sostituiamo in questa espressione le derivate parziali con i loro valori ricavati dalla relazione (8) del n° 69,

$$f = -A \frac{d\psi}{dx}$$

e dalle relazioni analoghe che contengono  $g$  e  $h$ , e se diamo ad  $A$  il valore  $\frac{K}{4\pi}$  che gli abbiamo attribuito per mettere in accordo la teoria delle celle con quella di Maxwell, otteniamo

$$dW = \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

L'energia potenziale del volume finito sarà data dall'integrale

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

Questa espressione è identica a quella che abbiamo dedotto (§ 32) dalla teoria di Maxwell e, siccome in quest'ultima teoria, l'energia potenziale di un sistema elettrizzato si trova nel mezzo dielettrico che separa i conduttori.

## 72. Osservazione

Nei calcoli precedenti abbiamo ammesso che in ogni punto del dielettrico la forza elettrica dipenda solo dallo stato elettrostatico del sistema elettrizzato. Se così non fosse, se, ad esempio, oltre alla forza elettromotrice dovuta ad azioni elettrostatiche, si esercitasse una forza elettromotrice di induzione, le formule andrebbero modificate.

In particolare, la componente  $f$  dello spostamento non sarebbe più data dalla formula

$$f = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx}$$

ma dalla formula

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} - X \right)$$

dove  $X$  indica la componente lungo l'asse  $x$  della forza elettromotrice d'induzione.

Per mostrarlo, cerchiamo la variazione  $\Delta\psi$  del potenziale quando si passa dal centro di gravità  $G_1$  di una cella al centro di gravità  $G_2$  di una cella contigua. Essa è uguale alla rapida variazione  $H$  che si produce quando si attraversa la parete isolante, aumentata dal lavoro che si deve effettuare contro le forze di induzione per far passare l'unità di elettricità positiva da  $G_1$  a  $G_2$ . Se quindi  $-X, -Y, -Z$  sono le componenti della forza elettromotrice di induzione quando si passa da  $G_1$  a  $G_2$ , si ha per  $\Delta\psi$ ,

$$\Delta\psi = H + X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z$$

La carica elettrica  $q$  di uno dei nostri piccoli condensatori sarà uguale al prodotto della capacità di questo condensatore per la differenza di potenziale  $H$  tra le sue due armature, e verrà quindi:

$$q = -CH = -C\Delta\psi + C(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)$$

e, invece di avere semplicemente

$$q = -C\Delta\psi = -C \left( \frac{d\psi}{dx} \Delta x + \frac{d\psi}{dy} \Delta y + \frac{d\psi}{dz} \Delta z \right)$$

si avrà

$$q = -C \left[ \Delta x \left( \frac{d\psi}{dx} - X \right) + \Delta y \left( \frac{d\psi}{dy} - Y \right) + \Delta z \left( \frac{d\psi}{dz} - Z \right) \right]$$

In tutte le nostre formule, bisognerà quindi sostituire

$$\frac{d\psi}{dx}, \frac{d\psi}{dy}, \frac{d\psi}{dz}$$

con

$$\frac{d\psi}{dx} - X, \frac{d\psi}{dy} - Y, \frac{d\psi}{dz} - Z$$

La formula

$$f = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx}$$

diviene pertanto

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} - X \right)$$

o

$$\frac{d\psi}{dx} = X - \frac{K}{4\pi} f$$

### 73. Caso di corpi anisotropi

Per poter stabilire la teoria elettromagnetica della doppia rifrazione, è importante vedere cosa succede a queste formule nei corpi anisotropi.

Torniamo alla formula (10) del n. 71. Se in essa si considerano  $\frac{d\psi}{dx}$ ,  $\frac{d\psi}{dy}$ ,  $\frac{d\psi}{dz}$  come le coordinate di un punto nello spazio e  $dW$  come una costante, si avrà l'equazione di un ellissoide.

Se si introduce un cambiamento di assi coordinati, questo ellissoide fittizio manterrà la stessa forma, ma varierà la sua posizione rispetto agli assi.

Prendiamo quindi come assi coordinati quelli dell'ellissoide, la sua equazione diverrà

$$dW = \frac{Ad\tau}{2} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{A'd\tau}{2} \left( \frac{d\psi}{dy} \right)^2 + \frac{A''d\tau}{2} \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2$$

e si avrà

$$\begin{cases} A = \frac{\sum C\Delta x^2}{d\tau} & A' = \frac{\sum C\Delta y^2}{d\tau} & A'' = \frac{\sum C\Delta z^2}{d\tau} \\ \sum C\Delta x\Delta y = 0 & \sum C\Delta x\Delta z = 0 & \sum C\Delta y\Delta z = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Riprendiamo le formule (5) della teoria di Fourier (§ 64). In virtù delle equazioni (11) essa si ridurrà a

$$Q = -A \frac{dV}{dx}$$

Abbiamo visto al n° 69 che per passare dalla teoria di Fourier a quella degli scambi di elettricità che avvengono tra le nostre celle, basta cambiare  $V$  con  $\frac{d\psi}{dt}$ . Si ha pertanto ancora

$$u = -A \frac{d^2\psi}{dt dx}$$

e anche

$$v = -A' \frac{d^2\psi}{dt dy} \quad w = -A'' \frac{d^2\psi}{dt dz}$$

La sola differenza con le equazioni (7), è che i coefficienti di  $\frac{d^2\psi}{dt dx}$ ,  $\frac{d^2\psi}{dt dy}$ ,  $\frac{d^2\psi}{dt dz}$  non sono più uguali tra loro.

Se ne deduce

$$\begin{aligned} f &= -A \frac{d\psi}{dx} = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \\ g &= -A' \frac{d\psi}{dy} = -\frac{K'}{4\pi} \frac{d\psi}{dy} \\ h &= -A'' \frac{d\psi}{dz} = -\frac{K''}{4\pi} \frac{d\psi}{dz} \end{aligned}$$

ponendo

$$K = 4\pi A \quad K' = 4\pi A' \quad K'' = 4\pi A''$$

Se esistono forze elettromotrici di induzione le cui componenti siano  $X, Y, Z$ , queste formule diventano:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} - X \right) \\ g &= -\frac{K'}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dy} - Y \right) \\ h &= -\frac{K''}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dz} - Z \right) \end{aligned}$$

Si trova, d'altronde:

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

e

$$W = \int dW = \int 2\pi d\tau \left( \frac{f^2}{K^2} + \frac{g^2}{K'^2} + \frac{h^2}{K''^2} \right)$$

#### 74. Discussione

La teoria delle celle non può essere adottata in modo definitivo più di quella del fluido induttore. Questa struttura eterogenea sembra difficile da accettare per i dielettrici liquidi o gassosi e soprattutto per il vuoto interplanetario. Ho voluto tuttavia esporre queste due teorie: sarebbero incompatibili se le considerassimo esprimenti la realtà oggettiva, saranno utili entrambe se le consideriamo provvisorie. Se mi fossi limitato a svilupparne una, avrei portato a credere (cosa che molti credono, ma che sembra falsa) che Maxwell vedesse lo spostamento elettrico come il movimento reale di una materia reale.

La base del suo pensiero è molto diversa, come vedremo più avanti.

## 4. Spostamento dei conduttori sotto l'azione delle forze elettriche - Teoria particolare di Maxwell

### 75. Forze che si esercitano tra conduttori elettrizzati

Finora nel nostro studio abbiamo ipotizzato che i conduttori elettrizzati rimangano stazionari. Ora sappiamo, ad esempio, che due conduttori elettrizzati si respingono o si attraggono a seconda che siano caricati con elettricità con lo stesso nome o con nomi opposti. L'elettricità agisce quindi sulla materia. Qual è la natura di questa azione? Questo è ciò che non possiamo dire con precisione, ignorando la natura della causa dell'azione, la natura dell'elettricità. Non abbiamo però bisogno di conoscerla per conoscere il valore della forza che si esercita tra due conduttori; basta applicare il principio di conservazione dell'energia.

Infatti, consideriamo due conduttori  $C$  e  $C'$  dotati di cariche  $M$  e  $M'$ . Supponiamo che il conduttore  $C$  possa spostarsi, ma senza ruotare attorno al proprio centro di gravità. La conoscenza delle coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di questo punto basterà allora per definire la posizione di  $C$  nello spazio. L'energia potenziale del sistema dei due conduttori dipende dalla posizione del conduttore  $C$  rispetto al conduttore  $C'$  e anche dalle loro rispettive cariche. La posizione di  $C$  è definita, secondo la nostra ipotesi, dalle coordinate del suo centro di gravità e l'energia potenziale  $W$  del sistema è quindi funzione delle sue coordinate e delle cariche  $M$  e  $M'$ ; possiamo porre

$$W = F(\xi, \eta, \zeta, M, M')$$

Affinché il sistema sia in equilibrio, basta applicare al conduttore mobile  $C$  una forza uguale e contraria alla forza esercitata su di esso da  $C'$ ; siano  $-X, -Y, -Z$  le componenti della forza che bisogna applicare a  $C$ . Essendoci in equilibrio, la somma dei lavori virtuali di tutte le forze agenti sul sistema, sia interne che esterne, deve essere nulla. Per uno spostamento  $\delta\xi$  del centro di gravità di  $C$  il lavoro della forza esterna è  $-X\delta\xi$ , quello delle forze interne è  $\frac{dW}{d\xi}\delta\xi$ ; abbiamo pertanto

$$-X\delta\xi + \frac{dW}{d\xi}\delta\xi = 0$$

Ricaviamo da questa equazione per il valore della componente  $X$  della forza esercitata da  $C'$  su  $C$

$$X = \frac{dW}{d\xi}$$

**76.** L'ipotesi più semplice e naturale che si può fare per spiegare le attrazioni e le repulsioni tra conduttori elettrizzati è quella di attribuire queste azioni all'elasticità del fluido distribuito tra i conduttori e cercare di applicare al fluido i principi ordinari della teoria dell'elasticità. Purtroppo le conseguenze di questa ipotesi non sono coerenti con i fatti sperimentali. In un fluido elastico, infatti, le forze elastiche risultanti da spostamenti molto piccoli sono funzioni lineari di tali spostamenti. Di conseguenza l'ipotesi in cui ci siamo posti porterebbe ad ammettere che la forza che si esercita tra due conduttori elettrizzati è una funzione lineare delle cariche elettriche dei conduttori. Ne risulterebbe che raddoppiando le cariche di ciascun conduttore si avrebbe una forza doppia; sappiamo però che se le cariche di due conduttori raddoppiano, la forza esercitata

tra loro risulta quadruplicata. Molte altre ipotesi sono state avanzate per spiegare questa azione dei conduttori elettrizzati. Se alcune hanno il merito di portare a conseguenze coerenti con l'esperienza, hanno lo svantaggio di essere complicate e non si può addurre alcuna ragione per favorire una di queste teorie rispetto all'altra. Non ci soffermeremo quindi su questo argomento e ci limiteremo ad esporre la teoria proposta da Maxwell.

### 77. Teoria di Maxwell

Prendiamo un elemento di volume  $d\tau$  di un conduttore elettrizzato e sia  $\rho$  la densità dell'elettricità libera nel centro di gravità di questo elemento. Per elettricità libera intendiamo nella teoria dei due fluidi, l'eccesso di elettricità positiva rispetto a quella negativa; e nella teoria del fluido unico l'eccesso di elettricità contenuta nell'elemento rispetto alla quantità che questo stesso elemento conterrebbe allo stato neutro. Le due teorie sono anche assolutamente equivalenti.

La massa elettrica dell'elemento è quindi  $\rho d\tau$ , e se  $\psi$  è il valore del potenziale nel centro di gravità la forza che si esercita su questa massa elettrica ha come componenti

$$\rho d\tau \frac{d\psi}{dx} \quad \rho d\tau \frac{d\psi}{dy} \quad \rho d\tau \frac{d\psi}{dz}$$

L'esperienza ci insegna che la forza che agisce sull'elemento materiale stesso è uguale a quella che agisce sull'elettricità in esso contenuta e di conseguenza che questo elemento potrà mantenersi in equilibrio solo se gli si applica una forza destinata a controbilanciare l'attrazione elettrostatica.

Se si indicano con  $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$  le componenti di questa forza, si dovrà avere

$$X = \rho \frac{d\psi}{dx} \quad Y = \rho \frac{d\psi}{dy} \quad Z = \rho \frac{d\psi}{dz} \quad (1)$$

Nell'idea di Maxwell, che in tutte le sue teorie cerca di evitare l'ipotesi di azioni elettriche esercitate a distanza, le repulsioni e le attrazioni dei conduttori sono dovute a pressioni sulla materia ponderabile trasmessa attraverso il materiale dielettrico. Cerchiamo la risultante di queste pressioni.

**78.** La pressione che si esercita su un elemento di superficie non è necessariamente normale ad esso. Indichiamo con

$$P_{xx} d\omega \quad P_{xy} d\omega \quad P_{xz} d\omega$$

le componenti lungo i tre assi della pressione che si esercita su un elemento perpendicolare all'asse  $x$ ; con

$$P_{yx} d\omega \quad P_{yy} d\omega \quad P_{yz} d\omega$$

le componenti della pressione che si esercita su un elemento perpendicolare all'asse  $Oy$ ; infine con

$$P_{zx} d\omega \quad P_{zy} d\omega \quad P_{zz} d\omega$$

le componenti su un elemento perpendicolare a  $Oz$ . Queste nuove quantità bastano a determinare la pressione su un elemento di superficie orientate in un modo qualunque. D'altra parte, queste nuove quantità si riducono a sei. Infatti la teoria dell'elasticità ci insegna che si deve avere:

$$P_{xy} = P_{yx} \quad P_{yz} = P_{zy} \quad P_{xz} = P_{zx} \quad (2)$$

**79.** Consideriamo ora un parallelepipedo rettangolo (fig. 9) i cui spigoli, che supporremo paralleli agli assi delle coordinate, sono lunghi  $dx, dy, dz$  e scriviamo che questo parallelepipedo è in equilibrio sotto l'azione delle pressioni che si esercitano sulle sei facce e della forza esterna le cui componenti sono  $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$ .

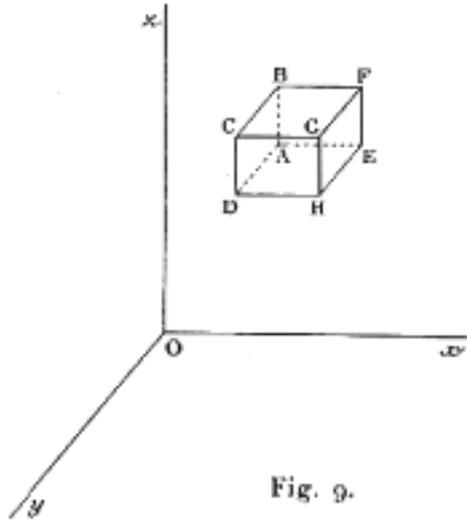


Fig. 9.

Le equazioni che esprimono che la somma dei momenti delle forze rispetto a ciascuno dei tre assi è nulla portano precisamente alla relazione (2). Esprimiamo quindi soltanto che la somma delle componenti lungo uno degli assi delle forze agenti sul parallelepipedo è nulla.

La pressione che si esercita sulla faccia ABCD ha per componente parallela a  $Ox$ ,  $P_{xx}dydz$ ; la pressione che si esercita sulla faccia opposta EFGH ha per componente lungo la stessa direzione  $(P_{xx} + \frac{dP_{xx}}{dx}dx)dydz$ . Adotteremo la notazione di Maxwell che riguarda le tensioni come positive e le pressioni come negative; la risultante di queste due forze si riduce allora alla loro somma algebrica.

$$\frac{dP_{xx}}{dx}dxdydz = \frac{dP_{xx}}{dx}d\tau$$

Troveremo allo stesso modo per la somma algebrica delle componenti parallele a  $Ox$  pressioni che si esercitano sulle altre facce del parallelepipedo.

$$\frac{dP_{yx}}{dy}d\tau \quad \frac{dP_{xz}}{dz}d\tau$$

La somma di queste quantità deve essere uguale a  $-Xd\tau$ ; abbiamo pertanto

$$\frac{dP_{xx}}{dx}d\tau + \frac{dP_{yx}}{dy}d\tau + \frac{dP_{xz}}{dz}d\tau = -Xd\tau = -\rho d\tau \frac{d\psi}{dx}$$

Scrivendo che le somme delle componenti delle pressioni lungo gli assi  $y$  e  $z$  sono uguali alle componenti della forza esterna lungo gli stessi assi, otterremo due equazioni analoghe. Dividendo i due membri di ciascuna di queste equazioni per  $d\tau$ , avremo, tenendo conto delle relazioni (2):

$$\begin{cases} \frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{xz}}{dz} = -\rho \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{dP_{yx}}{dx} + \frac{dP_{yy}}{dy} + \frac{dP_{yz}}{dz} = -\rho \frac{d\psi}{dy} \\ \frac{dP_{zx}}{dx} + \frac{dP_{zy}}{dy} + \frac{dP_{zz}}{dz} = -\rho \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (3)$$

**80.** Questo sistema di tre equazioni contiene sei incognite; ammette pertanto una infinità di soluzioni. Maxwell assume la seguente:

$$\begin{cases} P_{xx} = \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dy} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] \\ P_{yy} = \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{d\psi}{dy} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right] \\ P_{zz} = \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \left( \frac{d\psi}{dy} \right)^2 \right] \\ P_{yx} = P_{xy} = \frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dy} \\ P_{zy} = P_{yz} = \frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\psi}{dz} \\ P_{xz} = P_{zx} = \frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (4)$$

Mostriamo che questo sistema di soluzioni soddisfa le equazioni (3). Si ha

$$\frac{dP_{xx}}{dx} = \frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d\psi}{dy} \frac{d^2\psi}{dxdy} - \frac{d\psi}{dz} \frac{d^2\psi}{dxdz} \right)$$

$$\frac{dP_{yy}}{dy} = \frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d\psi}{dy} \frac{d^2\psi}{dxdy} \right)$$

$$\frac{dP_{zz}}{dz} = \frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d^2\psi}{dxdz} \right)$$

e il primo membro della prima equazione diviene, dopo la riduzione

$$\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \left( \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} - \frac{d^2\psi}{dz^2} \right) = \frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx} \Delta\psi$$

Abbiamo visto al § 12 che in un mezzo dielettrico omogeneo, si ha

$$K\Delta\psi = -4\pi\rho$$

Di conseguenza il primo membro dell'equazione considerata si può scrivere

$$-\rho \frac{d\psi}{dx}$$

il che dimostra che questa equazione è soddisfatta. Ci assicureremo allo stesso modo che le ultime due delle equazioni (3) siano verificate dalla soluzione adottata da Maxwell.

**81.** Prendiamo per asse  $x$  la direzione della forza elettromotrice in un punto e per assi  $y$  e  $z$  due rette rettangolari perpendicolari a questa direzione. Se designiamo con  $F$  il valore assoluto della forza elettromotrice, abbiamo in questo nuovo sistema di assi

$$\frac{d\psi}{dx} = -F \quad \frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \frac{d\psi}{dz} = 0$$

Portando questi valori nella relazione (4), otteniamo

$$P_{xx} = \frac{KF^2}{8\pi}$$

$$P_{yy} = P_{zz} = -\frac{KF^2}{8\pi}$$

$$P_{xy} = P_{yx} = P_{yz} = P_{zy} = P_{zx} = P_{xz} = 0$$

Da queste uguaglianze consegue che la pressione su un elemento superficiale perpendicolare alla direzione della forza elettromotrice o parallela a questa direzione è normale a questo elemento. Su un elemento obliquo a questa direzione la pressione è obliqua; essendo positiva la componente lungo la direzione della forza elettromotrice, vi è una *tensione* lungo questa direzione; per una direzione normale la pressione è negativa, esiste quindi secondo la notazione adottata da Maxwell, *pressione* nel senso letterale della parola lungo tale direzione. Inoltre la tensione che si esercita su un elemento perpendicolare alla forza elettromotrice e la pressione che si esercita su un elemento parallelo a tale forza sono uguali in valore assoluto.

## 82. Discussione

La teoria precedente, considerata di per sé, ben spiega le leggi conosciute delle attrazioni elettrostatiche. Se la si adotta, bisognerà ammettere che queste attrazioni sono dovute a pressioni e tensioni che si sviluppano in un particolare fluido elastico che riempirebbe i dielettrici.

Ma bisognerà supporre allo stesso tempo che le leggi dell'elasticità di questo fluido differiscono assolutamente dalle leggi di elasticità dei corpi materiali che conosciamo, dalle leggi di elasticità accettate per l'etere luminifero, che infine differiscono da leggi che siamo stati indotti ad ammettere per l'elasticità del fluido induttore.

Per questi due ipotetici fluidi, infatti, come per gli stessi fluidi ponderabili, le forze elastiche sono proporzionali agli spostamenti che le producono, e lo stesso varrebbe per le variazioni di pressione dovute all'azione di tali forze. La pressione, qualunque siano le ipotesi aggiuntive che si fanno, dovrebbe quindi essere espressa linearmente utilizzando il potenziale e le sue derivate. Al contrario, siamo appena stati portati a valori di pressione che sono del 2° grado rispetto alle derivate del potenziale.

Una volta che, rompendo con le inveterate abitudini mentali, avremo acconsentito ad attribuire queste proprietà paradossali all'ipotetico fluido che riempie i dielettrici, non avremo più alcuna obiezione da muovere alla precedente teoria. Ma tuttavia, se essa non implica una contraddizione interna, possiamo chiederci se sia compatibile con le altre teorie di Maxwell, ad esempio con la teoria dello spostamento elettrico che abbiamo esposto prima sotto il nome di teoria del fluido induttore.

È evidente che la conciliazione tra queste due teorie è impossibile; perché siamo stati indotti ad attribuire al fluido induttore una pressione uguale a  $\psi$ ; nella nuova teoria invece la pressione del fluido che riempie i dielettrici ha un valore completamente diverso.

Non bisogna dare troppa importanza a questa contraddizione. Ho spiegato sopra infatti le ragioni che mi fanno pensare che Maxwell considerasse soltanto provvisoria la teoria dello spostamento elettrico o del fluido induttore, e che questo fluido, al quale manteneva il nome di elettricità, non avesse ai suoi occhi più realtà oggettiva rispetto ai due fluidi di Coulomb.

**83.** Sfortunatamente vi è una difficoltà più grave. Per Maxwell, ed è un punto al quale teneva evidentemente molto, l'energia potenziale

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

è localizzata nei diversi elementi di volume del dielettrico, in modo tale che l'energia contenuta nell'elemento  $d\tau$  vale

$$\frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

o, supponendo  $K = 1$ , per semplificare, e chiamando  $F$  la forza elettromotrice

$$\frac{F^2 d\tau}{8\pi}$$

Se allora  $F$  subisce un incremento molto piccolo  $dF$ , questa energia dovrà subire un incremento uguale a

$$dW = \frac{2FdF}{8\pi} d\tau$$

Prenderemo come elemento di volume  $d\tau$  un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo uno spigolo del quale sarà parallelo alla forza elettromotrice  $F$  e i tre spigoli avranno per lunghezza  $\alpha, \beta, \gamma$ , di modo che

$$\alpha\beta\gamma = d\tau$$

Cerchiamo ora un'altra espressione di questa energia.

È naturale supporre che questo incremento  $dW$  dell'energia localizzata in questo elemento  $d\tau$  è dovuto al lavoro delle pressioni che agiscono sulle facce di questo parallelepipedo. Gli spigoli, quando le pressioni nulle, sono lunghi  $\alpha, \beta, \gamma$ , che, assumono sotto l'influenza di pressioni di lunghezze

$$\alpha(1 + \varepsilon_1) \quad \beta(1 + \varepsilon_2) \quad \gamma(1 + \varepsilon_3)$$

Se supponiamo che queste quantità  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  acquistano incrementi  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ , i lavori delle pressioni  $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}$  sulle diverse facce del parallelepipedo saranno

$$\begin{aligned} \frac{F^2}{8\pi} \beta \gamma \alpha d\varepsilon_1 &= \frac{F^2}{8\pi} d\tau d\varepsilon_1 \\ -\frac{F^2}{8\pi} \gamma \alpha \beta d\varepsilon_2 &= -\frac{F^2}{8\pi} d\tau d\varepsilon_2 \\ -\frac{F^2}{8\pi} \alpha \beta \gamma d\varepsilon_3 &= -\frac{F^2}{8\pi} d\tau d\varepsilon_3 \end{aligned}$$

La loro somma è

$$\frac{F^2}{8\pi} d\tau (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)$$

Se attribuiamo l'energia potenziale ai lavori delle pressioni, dobbiamo avere uguaglianza tra questi lavori e la variazione  $dW$  dell'energia, cioè

$$\frac{F^2}{8\pi} d\tau (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3) = \frac{2FdF}{8\pi} d\tau$$

o

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 = \frac{2dF}{F}$$

Integrando, otteniamo

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2 \log F + \text{cost}$$

Questo risultato è inammissibile, poiché nella condizione di equilibrio, abbiamo  $F = 0$  e la precedente uguaglianza potrebbe allora valere solo se  $\varepsilon_2$  o  $\varepsilon_3$  divenissero infiniti, conseguenza evidentemente assurda.

**84.** La teoria del § 77 è quindi incompatibile con l'ipotesi fondamentale della localizzazione dell'energia nel dielettrico, se la si considera come potenziale. Non sarebbe più la stessa cosa se si considerasse questa energia come cinetica, cioè se si assumesse che il dielettrico sia la sede di movimenti vorticosi e che  $W$  rappresenti la forza viva dovuta ad essi. Ma non si può ancora adottare questa interpretazione del pensiero di Maxwell senza incontrare grandi difficoltà.

Quando lo scienziato inglese applica le equazioni di Lagrange alla teoria dei fenomeni elettrodinamici, suppone espressamente, come vedremo in seguito, che l'energia elettrostatica

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

è l'energia potenziale e che l'energia elettrodinamica è al contrario cinetica.

Così si riserva la spiegazione con i moti vorticosi per le attrazioni magnetiche ed elettrodinamiche e non cerca di applicarla ai fenomeni elettrostatici.

Concludo qui questa lunga discussione che mi sembra aver dimostrato che la teoria precedente, perfettamente accettabile in se stessa, non rientra nel quadro generale delle idee di Maxwell.

È vero che supporre che l'energia elettrostatica  $W$  rappresenta la forza viva, come l'energia elettrodinamica, ma che se ne differenzia perché è la forza viva dovuta a moti molto più sottili di quelli che danno origine all'energia elettrodinamica. Non credo che ci sia molto vantaggio nello sviluppare un'interpretazione così complicata; in ogni caso non se ne vede traccia nel Trattato di Maxwell nella sua forma definitiva.

# 5. Elettrocinetica

## 85. Conduttori lineari

La propagazione dell'elettricità, in regime stazionario nei conduttori lineari è regolata da due leggi: *la legge di Ohm e la legge di Kirchhoff*.

Secondo la prima, la forza elettromotrice che agisce tra gli estremi di un conduttore è proporzionale alla quantità di elettricità che attraversa l'unità di sezione di tale conduttore nell'unità di tempo. Nel caso in cui la sezione del conduttore sia ovunque la stessa, come in un filo cilindrico, la forza elettromotrice è proporzionale alla quantità di elettricità che attraversa questa sezione nell'unità di tempo. Questa quantità si chiama *l'intensità* di corrente che attraversa il conduttore; la designeremo con  $i$ . Se il conduttore è omogeneo e nessuno dei suoi punti è sede di forze elettromotrici, la forza elettromotrice tra i suoi capi è pari alla differenza  $\psi_1 - \psi_2$  dei valori del potenziale in questi punti e la legge di Ohm porta alla relazione

$$Ri = \psi_1 - \psi_2$$

Ma nel caso più generale esistono in diversi punti del conduttore forze elettromotrici dovute sia a un difetto di omogeneità, sia a effetti di induzione. Indicando con  $\sum E$  la somma delle forze elettromotrici di questa natura che esistono in diversi punti del conduttore lineare, abbiamo allora

$$Ri = \psi_1 - \psi_2 + \sum E \quad (1)$$

In queste due formule  $R$  è quella che si chiama *resistenza* del conduttore. Questa resistenza è legata alla lunghezza  $l$  e alla sezione  $d\omega$  del conduttore dalla relazione

$$R = \frac{l}{Cd\omega} \quad (2)$$

dove  $C$  è un fattore dipendente solo dalla natura del conduttore e che si chiama *coefficiente di conducibilità*.

La legge di Kirchhoff non è altro che l'applicazione del principio di continuità. Secondo questa legge, se numerosi conduttori lineari terminano nello stesso punto dello spazio, la somma delle intensità delle correnti che li attraversano è nulla.

## 86. Nuova espressione analitica della legge di Ohm

Se introduciamo nella formula (1) il valore della resistenza data dalla relazione (2) otteniamo

$$\frac{l}{C} \frac{i}{d\omega} = \psi_1 - \psi_2 + \sum \Delta E$$

Consideriamo un elemento infinitamente piccolo di lunghezza  $dx$  del conduttore. Chiamiamo  $-d\psi$  la differenza di potenziale tra due estremità quando si sposta nel verso del flusso di elettricità, e  $Xdx$  la variazione delle forze elettromotrici di tutt'altra natura. L'equazione precedente diviene allora

$$\frac{idx}{Cd\omega} = -d\psi + Xdx$$

o

$$\frac{i}{C d\omega} = -\frac{d\psi}{dx} + X$$

Ma poiché  $i$  è la quantità di elettricità che attraversa nell'unità di tempo la sezione del conduttore, il quoziente  $\frac{i}{d\omega}$  è la velocità dello spostamento dell'elettricità; chiamando  $u$  questa velocità abbiamo

$$\frac{u}{C} = -\frac{d\psi}{dx} + X$$

equazione equivalente alla legge di Ohm nel caso di un conduttore lineare.

### 87. Conduttori di forma qualunque

L'analogia tra la conducibilità elettrica e la conducibilità termica porta ad estendere la legge di Ohm ai conduttori tridimensionali. Del resto, tale estensione è giustificata dall'accordo tra le conseguenze teoriche ed i fatti sperimentali osservati in alcuni casi particolari.

Ammettiamo quindi questa generalizzazione della legge di Ohm. Se chiamiamo  $\psi$  il potenziale in un punto qualsiasi di un elemento  $d\tau$  del conduttore,  $X, Y, Z$  le componenti della forza elettromotrice di qualsiasi origine che si esercita in questo punto, e infine  $u, v, w$  le componenti della velocità dell'elettricità in questo punto avremo per ciascuna delle direzioni parallele agli assi coordinati una relazione analoga alla (3). Queste tre relazioni sono

$$\begin{cases} \frac{u}{C} = -\frac{d\psi}{dx} + X \\ \frac{v}{C} = -\frac{d\psi}{dy} + Y \\ \frac{w}{C} = -\frac{d\psi}{dz} + Z \end{cases} \quad (4)$$

Osserviamo che  $u, v, w$  designano le stesse quantità dell'elettricità statica: le componenti della velocità dello spostamento elettrico. Queste sono quindi ancora le derivate rispetto al tempo delle componenti  $f, g, h$  dello spostamento di Maxwell.

Per quanto riguarda la legge di Kirchhoff, è evidente che essa può essere estesa ai conduttori tridimensionali poiché è solo una conseguenza del principio di continuità. Essendo le intensità proporzionali a  $u, v, w$ , questa legge porta alla relazione

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

Nella teoria di Maxwell dove si assume l'elettricità come incomprimibile, questa relazione, che esprime la condizione di incomprimibilità del fluido, è sempre soddisfatta, sia che venga raggiunto o meno lo stato stazionario.

### 88. Differenze tra le correnti di conduzione e quelle di spostamento

Secondo Maxwell, il fluido induttore che riempie un mezzo dielettrico tende a muoversi sotto l'influenza di forze elettromotrici come l'elettricità che riempie un mezzo conduttore. Ma mentre nel primo caso questo movimento si arresta presto grazie alla reazione elastica del fluido inducente, nel secondo caso non è più così, in quanto il fluido diffuso all'interno dei mezzi conduttori non gode di proprietà elastiche. Di conseguenza, le correnti di spostamento possono durare solo per il brevissimo tempo necessario a stabilire l'equilibrio. Al contrario, le correnti di conduzione possono essere mantenute finché un agente esterno mantiene una forza elettromotrice tra due punti di un conduttore. Questa è una prima differenza tra correnti di conduzione e correnti di spostamento.

Una seconda differenza risulta dalle equazioni che esprimono le leggi alle quali obbediscono queste correnti. Le equazioni (4) stabilite per le correnti di conduzione, si possono scrivere

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = X - \frac{u}{C} \\ \frac{d\psi}{dy} = Y - \frac{v}{C} \\ \frac{d\psi}{dz} = Z - \frac{w}{C} \end{cases} \quad (5)$$

D'altra parte, abbiamo dimostrato (72) che se esistono all'interno di un dielettrico forze elettromotrici (che abbiamo supposto dovute all'induzione, ma che potremmo assumere di altra natura se fosse possibile immaginarne una), le equazioni delle correnti di spostamento si devono scrivere

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = X - \frac{4\pi}{k} f \\ \frac{d\psi}{dy} = Y - \frac{4\pi}{k} g \\ \frac{d\psi}{dz} = Z - \frac{4\pi}{k} h \end{cases} \quad (6)$$

Mettendo insieme le equazioni (5) e (6) si vede immediatamente che mentre le correnti di spostamento dipendono dall'entità dello spostamento, le correnti di conduzione dipendono dalla velocità di tale spostamento.

**89.** Per comprendere appieno la differenza che risulta per le due correnti, prendiamo come termini di paragone i due esempi seguenti. Supponiamo innanzitutto di sollevare un corpo pesante lungo un piano inclinato dove l'attrito è nullo; si compie un lavoro che si ritrova sotto forma di energia potenziale. Supponiamo ora che il movimento avvenga su un piano orizzontale dove l'attrito è notevole; quando la potenza cesserà di agire il corpo resterà a riposo; il lavoro compiuto non si ritrova più sotto forma di energia potenziale, ma sotto forma di calore. Nel primo caso il lavoro dipende dallo spostamento del corpo, nel secondo dalla sua velocità. Troviamo qualcosa di analogo nelle due specie di correnti: la produzione di correnti di spostamento produce una variazione dell'energia potenziale del sistema che dipende dal quadrato dello spostamento; le correnti di conduzione danno luogo all'emissione di calore.

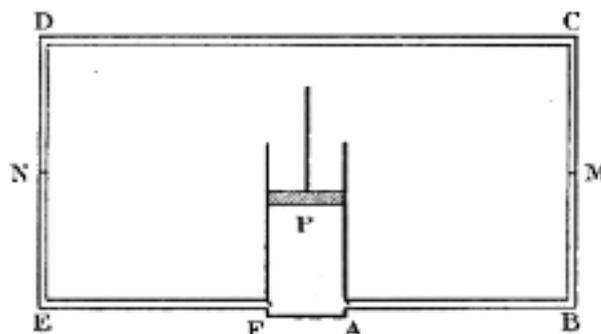


Fig. 10.

Anche un altro paragone preso dall'idrodinamica ci permette di renderci conto della differenza che esiste tra i due tipi di correnti. Prendiamo una pompa P (fig. 10) portante due tubi laterali AB e FE comunicanti tra loro tramite due tubi verticali BC ed ED e un tubo orizzontale CD. Supponiamo che questa pompa sia piena di mercurio, così come parte dei tubi, e siano M e N i livelli del mercurio, situato originariamente sullo stesso piano orizzontale, nei tubi verticali. Ammettiamo infine che il tubo CD e le parti dei tubi verticali, non occupate da mercurio, siano riempite d'acqua. Se azioniamo la pompa, si produce una corrente nel verso del liquido ABCDEF, ad esempio, e il livello del mercurio s'innalza in M e si abbassa in N, fino a quando la differenza di livello dà origine a una pressione sufficiente ad evitare contraccolpi della pompa. Il lavoro impiegato viene poi utilizzato per produrre una differenza di livello; si ritrova sotto

forma di aumento dell'energia potenziale del sistema e tale energia dipende dalla posizione dei livelli di mercurio. Qui abbiamo un'immagine fedele di una corrente di spostamento.

Modifichiamo leggermente il dispositivo precedente. Diamo ai tubi una sezione molto piccola e assumiamo che essi e la pompa siano completamente pieni di mercurio. Quando si muove la pompa, il mercurio si sposta e a causa della sua viscosità oppone una resistenza al movimento del pistone. Quando questa resistenza è uguale alla potenza agente sulla pompa, il mercurio si muove con velocità costante e questo movimento avviene finché la pompa funziona. Il lavoro della potenza si ritrova sotto forma di calore sviluppato dall'attrito delle molecole liquide e la quantità di calore liberato dipende dalla velocità. In questo esempio troviamo l'immagine completa di una corrente di conduzione: regime variabile durante il periodo di raggiungimento del regime costante che interviene successivamente, trasformazione del lavoro in calore.

### 90. Legge di Joule

La quantità di calore liberata in un conduttore percorso da corrente è, secondo la legge di Joule, proporzionale al quadrato dell'intensità di tale corrente. Nella teoria di Maxwell il lavoro necessario per vincere la resistenza opposta da un elemento di volume  $d\tau$  alla propagazione dell'elettricità ha per espressione

$$\left(\frac{u}{C}df + \frac{v}{C}dg + \frac{w}{C}dh\right) d\tau dt$$

essendo  $df, dg, dh$  le componenti dello spostamento che avviene in un intervallo di tempo  $dt$ . Questa espressione si può scrivere:

$$\left(u\frac{df}{dt} + v\frac{dg}{dt} + w\frac{dh}{dt}\right) \frac{d\tau}{C} dt$$

o.

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau dt$$

Per l'intero conduttore, questo lavoro è

$$\frac{1}{C} dt \int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau$$

È proporzionale al quadrato dell'intensità; lo è quindi anche la quantità di calore che risulta dalla sua trasformazione, come vuole la legge di Joule. Maxwell, nella sua opera, dedica diversi capitoli interessanti allo studio della conduzione. Non lo seguiremo in tutti gli sviluppi che dà su questo argomento e limiteremo la presentazione dell'elettrocinetica a quanto appena detto.

# 6. Magnetismo

## 91. Fluidi magnetici

Ricordiamo i punti principali dello studio del magnetismo.

Sappiamo che nei fenomeni magnetici tutto accade come se ci fossero due fluidi magnetici che godono, come i fluidi elettrici, di proprietà opposte nelle loro azioni reciproche: fluidi della stessa specie si respingono, fluidi di specie opposte si attraggono.

Le leggi di queste attrazioni e repulsioni sono identiche a quelle delle azioni dei fluidi elettrici: la forza esercitata tra due masse magnetiche varia inversamente al quadrato della distanza e proporzionalmente alle masse agenti. Prendendo come unità di massa magnetica quella che, agendo su una massa uguale posta a distanza unitaria, esercita una forza pari all'unità, e accettando di dare segni contrari a masse magnetiche di diversa natura, abbiamo per valore della forza esercitata tra due masse  $m$  e  $m'$  poste a distanza  $r$

$$f = -\frac{mm'}{r^2}$$

In queste condizioni una forza repulsiva è negativa; una forza attrattiva è positiva. La formula precedente è stata stabilita sperimentalmente da Coulomb e la sua accuratezza è confermata dalla concordanza delle sue conseguenze con i risultati sperimentali.

## 92. Massa magnetica di un magnete

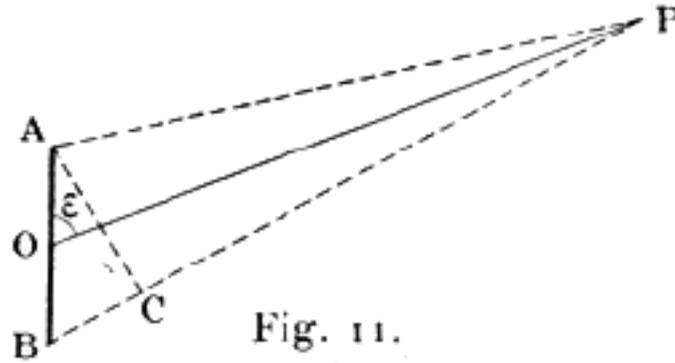
La seconda legge fondamentale del magnetismo è che in qualsiasi magnete la somma algebrica delle masse magnetiche, definite come abbiamo appena visto, è nulla. Questa legge nasce dal fatto sperimentale che un magnete posto in un campo magnetico uniforme, come quello prodotto dalla Terra, non assume un moto traslatorio. Infatti, se la massa magnetica totale del magnete non fosse nulla, esso sarebbe soggetto ad una forza e non ad una coppia e questo magnete si muoverebbe sotto l'azione del campo.

## 93. Struttura dei magneti

La rottura di una calamita in tanti piccoli pezzetti dà origine ad altrettanti piccoli magneti e ciascuno di essi ha due poli della stessa intensità e di segno opposto. Accostando questi piccoli magneti riproduciamo il magnete primitivo con tutte le sue proprietà. Si può quindi ammettere che un magnete sia formato da piccole particelle contenenti due masse magnetiche uguali e di segno opposto. La somma algebrica delle masse di ciascuna particella è nulla e, di conseguenza, anche la massa totale dell'intero magnete è nulla, come richiede la legge precedente. Questa ipotesi sulla struttura dei magneti non è quindi in contraddizione con l'esperienza.

## 94. Potenziale di un elemento di magnete. Componenti della magnetizzazione

Prendiamo una delle particelle elementari, di volume  $d\tau$ , che compongono un magnete e cerchiamo il valore del potenziale in un punto P (fig. 11).



Siano  $m$  e  $-m$  le masse magnetiche poste in punti infinitamente vicini A e B di questo elemento;  $r_1, r_2$  le distanze di questi punti da P. Il potenziale in P è

$$d\Omega = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Abbassiamo da A la perpendicolare AC sulla retta BP:  $r_2 - r_1$  è, ameno di infinitamente piccoli del secondo ordine, uguale a BC. Con la stessa approssimazione abbiamo, chiamando  $da$  la distanza AB, e  $\varepsilon$  l'angolo tra OP e BA, e anche

$$r_1 r_2 = r^2$$

essendo  $r$  la distanza dal punto P al punto O.

Di conseguenza, il valore del potenziale in P è

$$d\Omega = \frac{mda \cos \varepsilon}{r^2} \quad (1)$$

Trasformiamo questa espressione introducendo le componenti  $A, B, C$  della *magnetizzazione*  $I$ . Esse sono definite dalle seguenti relazioni

$$mdx = Ad\tau \quad mdy = Bd\tau \quad mdz = Cd\tau$$

dove  $dx, dy, dz$  indicano le proiezioni della retta BA lungo tre assi rettangolari.

Abbiamo, se  $\xi, \eta, \zeta$  sono le coordinate del punto P e  $x, y, z$  quelle del punto O

$$\cos \varepsilon = \frac{dx}{da} \frac{\xi - x}{r} + \frac{dy}{da} \frac{\eta - y}{r} + \frac{dz}{da} \frac{\zeta - z}{r}$$

e di conseguenza per il valore di  $d\Omega$

$$d\Omega = m \frac{da \cos \varepsilon}{r^2} = m \left( \frac{\xi - x}{r^3} dx + \frac{\eta - y}{r^3} dy + \frac{\zeta - z}{r^3} dz \right)$$

Ma il quadrato della distanza tra i punti O e P è,

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

e ne ricaviamo

$$\xi - x = -r \frac{dr}{dx}$$

e

$$\frac{\xi - x}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{r}$$

Avremo allo stesso modo

$$\frac{\eta-y}{r^3} = \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \quad \frac{\zeta-z}{r^3} = \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

Possiamo pertanto scrivere

$$d\Omega = m dx \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + m dy \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + m dz \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

o tenendo conto delle relazioni che definiscono le componenti della magnetizzazione

$$d\Omega = \left( A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + B \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + C \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\tau$$

## 95. Potenziale di un magnete

Il potenziale di un magnete si otterrà sommando i potenziali dovuti a ciascuno dei suoi elementi; varrà

$$\Omega = \int \left( A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + B \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + C \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\tau$$

Essendo un magnete delimitato da una superficie chiusa, possiamo modificare questa espressione. Indicando con  $l, m, n$  i coseni direttori della normale a un elemento  $d\omega$  della superficie del magnete con gli assi coordinati abbiamo infatti

$$\int l A \frac{1}{r} d\omega = \int \frac{d}{dx} \frac{A}{r} d\tau = \int A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau + \int \frac{dA}{dx} \frac{1}{r} d\tau$$

o

$$\int A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\tau = \int l A \frac{1}{r} d\omega - \int \frac{dA}{dx} \frac{1}{r} d\tau$$

Se trasformiamo nello stesso modo gli altri due termini dell'integrale che dà  $\Omega$  otterremo per questa quantità

$$\Omega = \int \frac{lA + mB + nC}{r} d\omega - \int \frac{\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}}{r} d\tau$$

Si può considerare il potenziale in un punto come risultante da uno strato di magnetismo distribuito sulla superficie del magnete e di densità

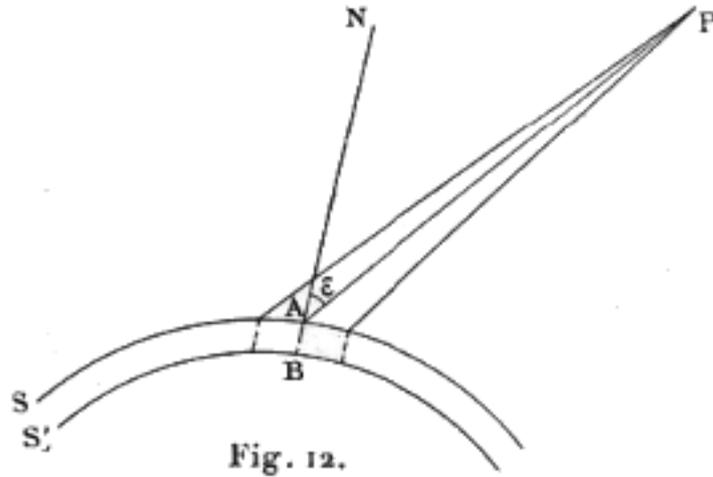
$$\sigma = lA + mB + nC$$

e di una massa magnetica che occupa l'intero volume del magnete e di densità

$$\rho = - \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

## 96. Potenziale di un foglio magnetico

Supponiamo un magnete delimitato da due superfici infinitamente vicine cariche di strati magnetici uguali e di segni opposti. Se in ogni punto della superficie la magnetizzazione è normale a questa superficie, e se il prodotto  $Ie$  dell'intensità di magnetizzazione  $I$  per lo spessore  $e$  del magnete è costante, il magnete prende il nome di *foglio magnetico*. Il prodotto costante  $Ie$  è detto la *potenza*  $\Phi$  del foglio.



Prendiamo un elemento A di area  $d\omega$  sulla superficie del foglio; la carica di questo elemento è  $\sigma d\omega$ , essendo  $\sigma$  la densità dello strato magnetico S nel punto A. La porzione AB del foglio che corrisponde a questo elemento di superficie può essere considerata come un magnete infinitamente piccolo avente cariche  $\sigma d\omega$  e  $-\sigma d\omega$  nei punti A e B distanti da  $e$ . La formula (1) del § 94 fornisce il potenziale in P di questo elemento,

$$d\Omega = \sigma d\omega \frac{e \cos \varepsilon}{r^2}$$

Questa espressione può essere trasformato. Infatti, essendo la magnetizzazione diretta lungo BA, si ha

$$\sigma d\omega e = Id\tau = Id\omega e = \Phi d\omega$$

e quindi

$$d\Omega = \frac{\Phi d\omega \cos \varepsilon}{r^2}$$

Per un foglio di dimensione finite, si avrà

$$\Omega = \Phi \phi$$

cioè:

Il potenziale di un foglio magnetico in un punto esterno è uguale al prodotto della sua potenza per l'angolo solido sotto il quale il foglio è visto dal punto considerato; questo prodotto è preso con il segno + o il segno - a seconda che la faccia vista sia positiva o negativa.

### 98. Forza magnetica in un punto esterno

Le componenti della forza esercitata sull'unità di massa magnetica positiva posta in un punto esterno sono le derivate parziali del potenziale in quel punto prese di segno opposto. Designandoli con  $\alpha, \beta, \gamma$ , abbiamo

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

### 99. Forza magnetica nell'interno di un magnete

Non possiamo conoscere la forza esercitata sull'unità di massa magnetica posta all'interno del magnete senza scavare una piccola cavità che ci permetta di posizionare un piccolo magnete di prova; ma l'esistenza di questa cavità modifica l'azione del magnete e questa modifica dipende dalla forma data alla cavità. Per calcolare la forza in un punto della cavità è necessario pertanto conoscerne la forma.

Maxwell considera solo due casi particolari in cui la cavità è un piccolissimo cilindro le cui generatrici sono parallele alla direzione di magnetizzazione. Nel primo caso l'altezza del cilindro è infinitamente grande in rapporto alla sua sezione; nella seconda è infinitamente piccola.

Chiamiamo  $\Omega$  il potenziale dell'intero magnete in un punto interno e  $\Omega_1$  il potenziale della massa cilindrica tolta per formare la cavità in questo stesso punto. La differenza  $\Omega - \Omega_1$  è il valore del potenziale del magnete in P quando si è praticata la cavità. La forza sull'unità di massa magnetica ha allora per componenti

$$-\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega_1}{dx} \quad -\frac{d\Omega}{dy} + \frac{d\Omega_1}{dy} \quad -\frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega_1}{dz}$$

**100.** Cerchiamo il valore di  $\Omega_1$  quando l'altezza del cilindro è grande rispetto alla sezione.  $\Omega_1$  è la somma di due integrali, uno esteso alla superficie, l'altro al volume. Quest'ultimo è infinitamente piccolo del terzo ordine e può essere trascurato rispetto al primo. Ma in questo si possono trascurare anche gli elementi corrispondenti alle basi del cilindro, essendo queste infinitamente piccole rispetto all'altezza; è quindi necessario tenere conto solo della superficie laterale. Ora, in ogni punto di questa superficie la normale è perpendicolare alla direzione di magnetizzazione; di conseguenza, la proiezione  $lA + mB + nC$  della magnetizzazione su questa normale è nulla e gli elementi dell'integrale corrispondente alla superficie laterale sono pure nulli. Ne risulta pertanto che è possibile trascurare la quantità  $\Omega_1$ . Si ha per le componenti della forza magnetica

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

espressioni identiche a quelle che danno le componenti in un punto esterno.

### 101. Induzione magnetica

Passiamo ora al caso in cui l'altezza della cavità cilindrica è molto piccola rispetto alla base. Come prima, possiamo nel valore di  $\Omega$  trascurare l'integrale esteso al volume. Nell'integrale doppio gli elementi forniti dalla superficie laterale sono nulli poiché la normale a ciascun elemento di superficie è perpendicolare alla direzione di magnetizzazione, è quindi sufficiente estendere l'integrale doppio alla superficie delle basi del cilindro.

Per trovare il valore di questo integrale prendiamo per asse  $x$  una parallela alla direzione di magnetizzazione; questo asse sarà allora perpendicolare a ciascuna delle basi del cilindro. Per ogni elemento di una di esse avremo  $l = 1, m = 0, n = 0$  e per ogni elemento dell'altra  $l = -1, m = n = 0$ . In questo sistema di assi particolare abbiamo quindi per il valore di  $\Omega_1$

$$\Omega_1 = \int \frac{A}{r} d\omega - \int \frac{A}{r} d\omega$$

essendo ognuno dei due integrali esteso alla superficie delle basi. Questo valore è lo stesso se si supponesse che ogni base del cilindro sia ricoperta da uno strato di magnetismo avente rispettivamente per densità  $+A$  e  $-A$ . Essendo l'estensione di questi strati molto grande in rapporto alla loro distanza, che è pari all'altezza del cilindro, l'azione che esercitano sull'unità di massa magnetica posta tra loro ha il valore di  $4\pi A$ . Questa forza è diretta verso lo strato negativo, cioè nella direzione opposta alla magnetizzazione.

La cavità, che ha un effetto opposto a quello del cilindro magnetizzato di pari volume, produrrà quindi un aumento della forza nella direzione della magnetizzazione e tale aumento sarà di  $4\pi A$ . Di conseguenza la componente lungo  $Ox$  della forza esercitata dal magnete sull'unità di massa posta all'interno della cavità è

$$a = -\frac{d\Omega}{dx} + 4\pi A = \alpha + 4\pi A$$

È evidente che se invece di prendere il particolare sistema di assi che abbiamo utilizzato, prendiamo degli assi qualunque otterremo per le componenti della forza espressioni simili alla precedente.

Queste componenti sono

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases}$$

Maxwell le chiama le componenti dell'*induzione magnetica all'interno del magnete*.

**102.** Osserviamo che la quantità

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

è un differenziale totale, poiché è uguale a  $-d\Omega$ , mentre la quantità

$$a dx + b dy + c dz$$

non lo è.

Un'altra differenza tra la forza magnetica e l'induzione magnetica consiste nel valore della somma delle derivate parziali delle loro componenti: questa somma è nulla per l'induzione magnetica; non lo è per la forza magnetica.

Mostriamo infatti che

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

Si ha

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} + 4\pi \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

o

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = -\Delta\Omega + 4\pi \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} \right)$$

Ora,

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = \rho$$

e la relazione di Poisson dà, per un punto interno,

$$\Delta\Omega = -4\pi\rho$$

La somma considerata è pertanto nulla.

### 103. Magnetismo indotto

Alcuni corpi posti in un campo magnetico si magnetizzano per influenza. Poisson ammette che le componenti della magnetizzazione indotta in un punto di un tale corpo sono proporzionali alle componenti della forza magnetica in quel punto. Poniamo quindi

$$A = \chi\alpha \quad B = \chi\beta \quad C = \chi\gamma$$

Dalle formule precedenti, le componenti dell'induzione saranno, nello stesso punto,

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A = (1 + 4\pi\chi)\alpha \\ b = \beta + 4\pi B = (1 + 4\pi\chi)\beta \\ c = \gamma + 4\pi C = (1 + 4\pi\chi)\gamma \end{cases}$$

Ponendo

$$\mu = (1 + 4\pi\chi)$$

queste formule diventano

$$\begin{cases} a = \mu\alpha \\ b = \mu\beta \\ c = \mu\gamma \end{cases}$$

Maxwell chiama  $\mu$  la *capacità magnetica induttiva*. Questa quantità è analoga al potere induttore specifico  $K$  dell'elettrostatica; è maggiore dell'unità per i corpi magnetici, uguale all'unità nel vuoto, minore dell'unità per i corpi diamagnetici.

**104.** La semplicità delle formule precedenti può creare l'illusione sulla difficoltà di determinare l'induzione in un punto di un corpo. Questo perché non abbiamo tenuto conto del fatto che  $\chi$  e  $\mu$  non sono costanti; in secondo luogo abbiamo ipotizzato di avere solo magneti permanenti in cui la forza coercitiva è infinita e magneti prodotti per influenza in cui la forza coercitiva è nulla.

I corpi naturali non soddisfano queste condizioni. La forza coercitiva non può mai essere né strettamente nulla né strettamente infinita. Inoltre, il coefficiente  $\chi$  non è una costante. È una funzione dell'intensità del magnetismo  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  alla quale si è dato il nome di *funzione magnetizzante*. Si ha il diritto di considerare  $\chi$  e  $\mu$  come costanti solo se la magnetizzazione è molto debole.

Questo è ciò che supporremo sempre nel seguito, e sarà tanto più legittimo in quanto per la maggior parte degli corpi differisce ben poco da 1.



# 7. Elettromagnetismo

## 105. Leggi fondamentali

Si possono adottare diverse modalità di esposizione per individuare l'azione esercitata da una corrente chiusa su un polo magnetico e mostrare che tale azione può essere paragonata a quella di un *foglio magnetico* dello stesso contorno. Non seguiremo quella di Maxwell che prende come punto di partenza l'equivalenza di una corrente infinitamente piccola e di un magnete; per arrivare alle formule di Maxwell, faremo affidamento su tre leggi dimostrate dall'esperienza e su un'ipotesi.

Le tre leggi sperimentali sono le seguenti:

1° Due correnti parallele della stessa intensità e di verso opposto esercitano azioni uguali e segni opposti su un polo magnetico;

2° Una corrente sinusoidale esercita un'azione uguale a quella di una corrente rettilinea avente le stesse estremità;

3° La forza esercitata da una corrente su un polo magnetico è proporzionale all'intensità della corrente, cioè alla quantità di elettricità che attraversa una sezione del conduttore nell'unità di tempo.

Le prime due di queste leggi furono dimostrate da Ampère; la terza è stata verificata da numerosi esperimenti: alcuni effettuati scaricando batterie caricate con quantità note di elettricità, come negli esperimenti di Colladon e Faraday; gli altri più precisi, fatti con il voltmetro.

## 106. Ipotesi

L'ipotesi che uniremo alle leggi precedenti è che le componenti della forza agente su un polo magnetico siano le derivate parziali di una stessa funzione che dipende solo dalla posizione del polo rispetto al circuito.

Questa ipotesi sembrerà la più naturale se consideriamo che nel sistema deve esserci conservazione dell'energia. Ma osserviamo che non è l'unica compatibile con il principio di conservazione dell'energia; l'ipotesi adottata potrebbe quindi ritenersi carente senza che il principio di conservazione dell'energia cessi di essere verificato.

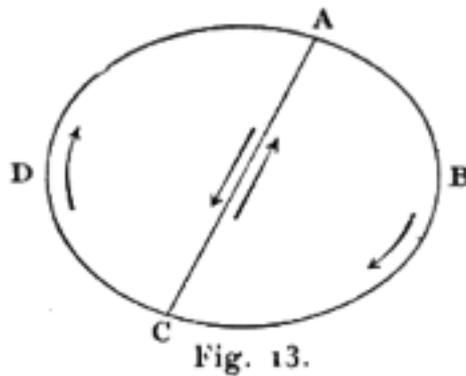
In base a questa ipotesi possiamo porre per il valori  $\alpha, \beta, \gamma$  componenti della forza agenti sull'unità del polo

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

La funzione  $\Omega$  è detta il *potenziale* del circuito percorso dalla corrente. Per trovarne l'espressione faremo ricorso ad alcuni teoremi che prima stabiliremo. Trascureremo anche, per maggiore comodità, la costante di integrazione della funzione  $\Omega$ .

**Teorema 1. 107.** *Il potenziale dovuto a un circuito è uguale alla somma dei potenziali dovuti ai diversi circuiti secondo i quali lo si può scomporre.*

Questa proprietà deriva immediatamente dalla legge fondamentale delle azioni esercitate da due correnti parallele e di verso contrario.

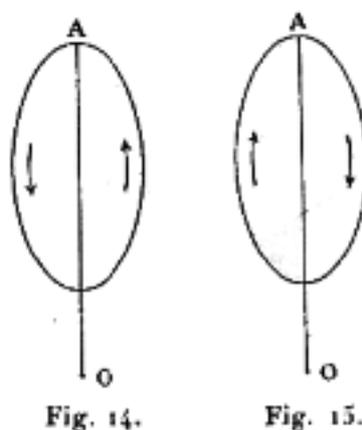


Sia infatti ABCD (fig. 13) una corrente chiusa; possiamo scomporla in due circuiti ABCA e ACDA percorsi nel senso delle frecce. Il circuito AC, essendo percorso da due correnti della stessa intensità ma di verso opposto, non esercita alcuna azione su un polo magnetico; quindi il potenziale del circuito totale deve essere uguale alla somma dei potenziali dei due circuiti parziali ABCA e ACDA.

La generalizzazione di questo teorema a qualsiasi numero di circuiti parziali è evidente.

**Teorema 2. 108.** *Il potenziale di un circuito piano e chiuso in un punto esterno posto nel suo piano è nullo.*

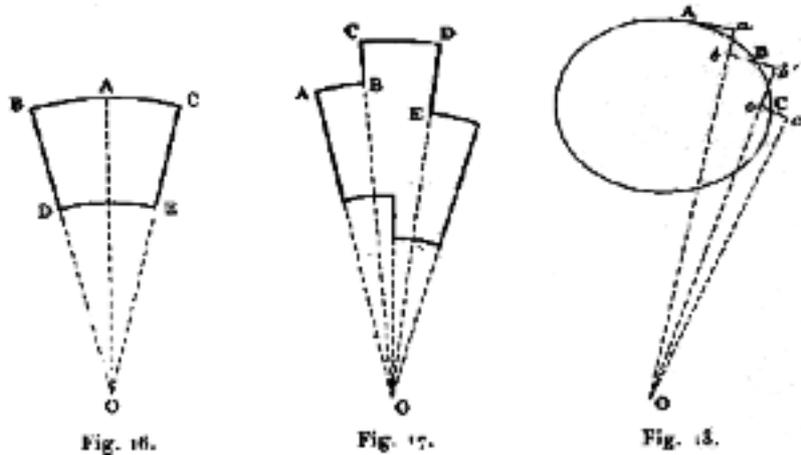
a. Supponiamo innanzitutto che il circuito abbia un asse di simmetria OA (fig. 14), e poniamo un polo magnetico in un qualsiasi punto O di questo asse. Se ruotiamo il circuito attorno al suo asse di simmetria, il polo magnetico mantiene sempre la stessa posizione rispetto al circuito e, di conseguenza, il potenziale a O non varia. Ma quando il circuito ruota di un angolo di  $180^\circ$ , ritorna sul piano originario e il verso della corrente rappresentato nella posizione iniziale dalle frecce di figura 14, viene, dopo questa rotazione, rappresentato dalle frecce di figura 15. La corrente ha quindi cambiato verso rispetto al punto O e, secondo la legge delle correnti di versi opposti, la forza esercitata sul polo ha cambiato verso. Questo cambiamento nel verso della forza provoca un cambiamento nel segno del potenziale  $\Omega$ ; poiché d'altronde questo potenziale deve mantenere lo stesso valore e deve essere nullo.



b. Se il circuito ha la forma di un rettangolo curvilineo BCDE (fig. 16), formato dagli archi di cerchio BC e DE e dalle porzioni BD e CE dei raggi BO e CO il potenziale in O è nullo poiché il punto appartiene all'asse di simmetria OA della figura.

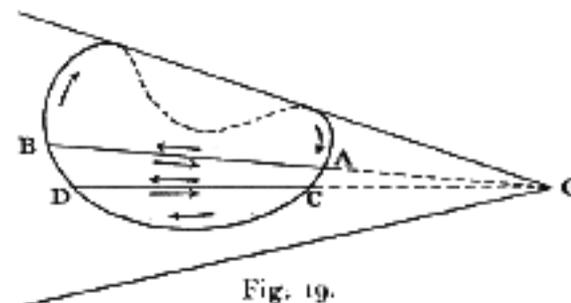
c. Quando il circuito chiuso è composto da una serie di archi di cerchi concentrici AB, CD,... (fig. 17), uniti da porzioni rettilinee CD, DE,... passanti per il centro comune O, il potenziale in questo punto è evidentemente nullo, secondo quanto precede e per il Teorema I.

d. Passiamo infine al caso generale di un circuito piano di forma qualsiasi (fig. 18). Prendiamo i punti A, B, C,... molto vicini sul circuito e facciamo passare per questi punti archi di cerchio aventi come centro un punto O qualsiasi sul piano del circuito. Facendo passare per O un numero uguale di raggi opportunamente scelti, potremo formare un circuito chiuso  $abb'cc'$ ., i cui vari elementi sono molto vicini agli elementi del circuito dato. Secondo il principio delle correnti sinusoidali, l'azione di questi due circuiti su un polo magnetico è la stessa. Ora, abbiamo appena visto che il potenziale in O dovuto alla corrente sinusoidale composta da archi di cerchi concentrici e di porzioni rettilinee dirette verso il centro è nullo. Di conseguenza, è lo stesso per un circuito di qualsiasi forma.



**Teorema 3. 109.** *Quando un circuito chiuso è tracciato sulla superficie laterale di un cono, in modo tale che ognuna delle generatrici del cono incontri il circuito un numero pari di volte, essendo zero uno di questi numeri, il potenziale nel vertice del cono, supposto non involuppato dal circuito, è nullo.*

Infatti, tracciando sulla superficie del cono (fig. 19) delle generatrici infinitamente vicine, possiamo scomporre il circuito in elementi piani come ACDBA. Essendo il punto O posto nel piano di ciascuno di questi circuiti parziali il potenziale in questo punto dovuto a uno qualunque di essi è nullo; la somma di questi potenziali, cioè il potenziale dovuto al circuito totale, è pertanto nullo.



**Teorema 4. 110.** *Quando due circuiti chiusi, tracciati sulla superficie laterale di un cono e intersecanti tutte le generatrici almeno una volta, sono percorsi da correnti della stessa intensità e nello stesso verso rispetto a un osservatore posto nel vertice del cono il potenziale in questo punto ha lo stesso valore per ognuno dei circuiti.*

Siano ACE e BDF (fig. 20) i due circuiti percorsi da correnti il cui verso è indicato dalle frecce poste esternamente. Se supponiamo questi circuiti percorsi contemporaneamente da correnti di uguale intensità ma il cui verso, indicato dalle frecce interne, è contrario a quello della corrente reale che li attraversa, il potenziale in O dovuto a tutte queste quattro correnti è evidentemente nullo. Sarà ancora nullo se a queste correnti ne aggiungiamo altre della stessa intensità ma con versi diversi che fluiscono attraverso due generatrici qualsiasi del cono AB e CD. Ma essendo l'intensità la stessa per tutte le correnti, possiamo considerare il sistema come formato:

1° Dal circuito chiuso ACDB percorso nel senso indicato dall'ordine delle lettere; 2° del circuito chiuso ABFDCEA; 3° dal circuito BDF; 4° dal circuito AEC. Il potenziale in O dovuto a ciascuno dei primi due circuiti è nullo, perché ciascuno di essi soddisfa le condizioni del teorema precedente. Il potenziale dovuto all'insieme del terzo e quarto circuito è quindi nullo e di conseguenza il potenziale risultante dal circuito BDF percorso dalla corrente reale è uguale e di segno opposto al potenziale risultante dal circuito AEC percorso dalla corrente fittizia nel senso opposto alla corrente effettiva che scorre attraverso questo circuito. Il potenziale della corrente reale che attraversa il circuito ACE è uguale e di segno opposto al potenziale della corrente fittizia che attraversa lo stesso circuito in senso opposto; è quindi uguale al potenziale della corrente reale che attraversa BDF.

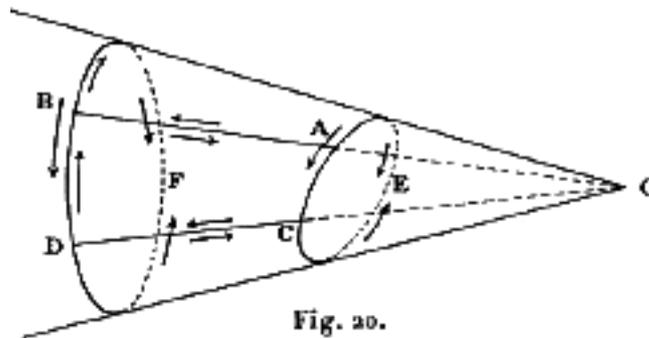


Fig. 20.

Facciamo inoltre presente che i due circuiti considerati, anziché essere posti sulla superficie di uno stesso cono, come abbiamo supposto, potrebbero appartenere a due coni distinti ma sovrapponibili.

### 111. Potenziale di una corrente chiusa

Prendiamo un circuito chiuso qualsiasi percorso da una corrente, e cerchiamo il potenziale in un punto O esterno al circuito.

Dal punto O preso come vertice tracciamo un cono avente per base il contorno del circuito. Questo cono ritaglierà sulla superficie della sfera di raggio unitario una superficie il cui valore  $\varphi$  misura l'angolo solido sotto il quale il circuito è visto dal punto O. Possiamo scomporre questo cono in un'infinità di coni infinitamente sciolti dello stesso angolo solido e supponiamo che il circuito dato sia scomposto in un'infinità di piccoli circuiti chiusi tracciati sulla superficie di questi coni. Questi coni dello stesso angolo solido, essendo infinitamente piccoli, possono essere scelti sovrapponibili e il potenziale in O è lo stesso per ciascuno dei circuiti tracciati sulla superficie di uno di essi. Il potenziale del circuito totale è la somma di questi potenziali; è quindi proporzionale al numero dei coni elementari e, di conseguenza, all'angolo solido  $\varphi$ .

Ma, secondo la terza legge fondamentale da noi enunciata, l'azione esercitata da una corrente chiusa su un polo magnetico è proporzionale all'intensità di questa corrente; quindi, trascurando la costante di integrazione nell'espressione della funzione potenziale, anche questa funzione deve essere proporzionale all'intensità di corrente. Quindi possiamo scrivere.

$$\Omega = \varphi i$$

essendo l'intensità misurata per mezzo di un'unità tale che il coefficiente di proporzionalità si uguale a 1, unità detta *unità elettromagnetica dell'intensità*.

L'azione di un circuito su un polo magnetico cambia segno quando si cambia la direzione della corrente che lo attraversa, il segno di  $\varphi_i$  deve dipendere dal verso della corrente. Chiamando *faccia positiva* del circuito quella che si trova alla sinistra di un osservatore posto sul circuito nel senso della corrente e rivolto verso l'interno del circuito, si conviene di dare al valore dell'angolo solido il segno + oppure il segno - a seconda che si tratti della faccia positiva o della faccia opposta vista dal punto considerato. Adottando questa convenzione e quella che consiste nel considerare positiva una forza attrattiva e negativa una forza repulsiva, le componenti della forza esercitata da una corrente chiusa sull'unità di polo sono date dalle relazioni già scritte:

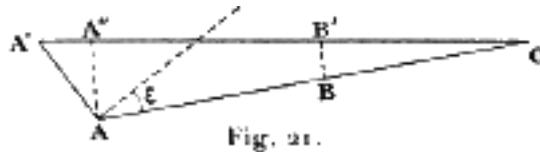
$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

### 112. Caso di un circuito infinitamente piccolo

Siano AA' (fig. 21) la proiezione di un circuito infinitamente piccolo e AOA' il cono elementare di angolo solido  $d\varphi$  passante per questo circuito. Il potenziale nel punto O vale

$$d\Omega = id\varphi$$

Ora, essendo  $d\varphi$  l'area della sezione BB' intersecata dal cono sulla sfera di raggio 1, l'area della sezione AA' ritagliata da questo stesso cono sulla sfera di raggio  $OA = r$ , è  $r^2 d\varphi$ . D'altra parte trascurando gli infinitamente piccoli di ordine superiore, si può considerare quest'area AA' come la proiezione dell'area  $d\omega$  del circuito AA' su un piano perpendicolare a OA.



Abbiamo pertanto

$$r^2 d\varphi = d\omega \cos \varepsilon$$

e di conseguenza

$$d\Omega = \frac{id\omega \cos \varepsilon}{r^3} \quad (1)$$

Questa espressione è analoga alla formula

$$d\Omega = \frac{\Phi d\omega \cos \varepsilon}{r^3} \quad (2)$$

trovata alla sez. 47 per il potenziale di un elemento di foglio magnetico di potenza  $\Phi$ . Di conseguenza un elemento di corrente chiusa allo stesso potenziale di un elemento del foglio della stessa superficie e di potenza uguale all'intensità della corrente.

### 113. Equivalenza di una corrente chiusa e di un foglio magnetico

Gli integrali delle formule (1) e (2) estesi alla stessa superficie daranno, il primo, il potenziale di una corrente chiusa di forma qualsiasi, il secondo, il potenziale di un foglio dello stesso contorno. Se si suppone  $\Phi = i$ , questi integrali hanno lo stesso valore, a meno di una costante. Di conseguenza, le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza esercitata da una corrente chiusa sull'unità di massa magnetica di uguale contorno e la cui potenza  $\Phi$  sarebbe uguale all'intensità elettromagnetica  $i$

della corrente. Vi è quindi una equivalenza negli effetti di una corrente chiusa e di un foglio magnetico.

Va tuttavia notato che le funzioni potenziali non hanno proprietà identiche nei due casi. Mostriamo che in effetti il potenziale di un magnete è una funzione uniforme, mentre il potenziale di una corrente chiusa può assumere un numero infinito di valori in ogni punto dello spazio.

La variazione del potenziale di una corrente o di un foglio quando passa da un punto a un altro con un percorso qualsiasi è uguale e di segno opposto all'integrale

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

preso lungo il percorso percorso poiché  $\alpha, \beta, \gamma$  sono le derivate parziali del potenziale cambiate di segno.

Le condizioni di integrabilità

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx} \quad \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\gamma}{dx} \quad \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy}$$

essendo soddisfatte, l'integrale preso lungo una qualsiasi curva chiusa  $C$  sarà nullo; tuttavia c'è una condizione per questo.

Per questa curva  $C$  facciamo passare una qualsiasi superficie e sia  $A$  la porzione di questa superficie limitata dalla curva chiusa  $C$ . Perché l'integrale sia nullo, le forze  $\alpha, \beta, \gamma$  e le loro derivate prime devono essere finite in tutti i punti dell'area  $A$ .

Ma se la curva chiusa intreccia la corrente, questa taglierà l'area  $A$  almeno in un punto, e nel punto d'incontro le forze magnetiche  $\alpha, \beta, \gamma$  saranno infinite. L'integrale preso lungo una curva chiusa che che intreccia la corrente non è quindi nullo e la funzione  $\Omega$  può assumere due valori diversi nello stesso punto.

#### 114. Lavoro delle forze elettromagnetiche lungo una curva chiusa intersecante il circuito

La differenza tra questi due valori, che è uguale all'integrale

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

preso lungo la curva descritta  $C$ , rappresenta il lavoro della forza elettromagnetica nello spostamento. Per ottenere questo lavoro, consideriamo il foglio  $F$  (fig. 22) equivalente alla corrente. Il suo potenziale è una funzione uniforme e dovrà riassumere lo stesso valore quando di ritornerà nel punto  $P$  dopo aver percorso la curva chiusa  $C$ . Ora la variazione subita dal potenziale è uguale all'integrale

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

preso lungo la curva  $C$ , più la rapida variazione che subisce il potenziale quando attraversa il foglio che va da  $P$  dal punto infinitamente vicino  $P'$ . Sia  $H$  questa variazione; si avrà pertanto

$$H \int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 0$$

Ci resta quindi da calcolare questa variazione rapida  $H$ .

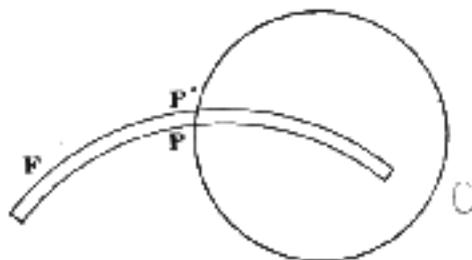


Fig. 22.

Abbiamo facilmente questa variazione nel caso particolare in cui il foglio forma una superficie chiusa. In un punto esterno il potenziale è nullo poiché l'angolo sotto il quale foglio è visto da questo punto è nullo. In un punto interno è  $\pm 4\pi\Phi$ , a seconda che è la faccia positiva del foglio oppure la sua faccia negativa ad essere rivolta verso l'interno della superficie chiusa. La variazione del potenziale quando si passa dalla faccia negativa a un punto della faccia positiva è quindi  $4\pi\Phi$ .

Nel caso in cui il foglio non forma una superficie chiusa la variazione del potenziale è ancora la stessa. Sia ABC (fig. 23) un foglio di cui assumeremo il lato positivo, situato sul lato convesso. Per mezzo di un secondo foglio ADC dello stesso contorno e della stessa potenza del primo e la cui faccia positiva è anch'essa rivolta dalla parte convessa, possiamo formare un foglio chiuso ABCD. Quando si passa dal punto P ad un punto P' infinitamente vicino situato dall'altra parte del foglio, l'angolo sotto il quale si vede questo foglio chiuso aumenta di  $4\pi$ . Poiché l'angolo sotto cui è visto il foglio ADC rimane lo stesso, l'angolo solido corrispondente all'altro foglio ABC deve aumentare di  $4\pi$ . Di conseguenza la variazione del potenziale è ancora  $4\pi\Phi$ .

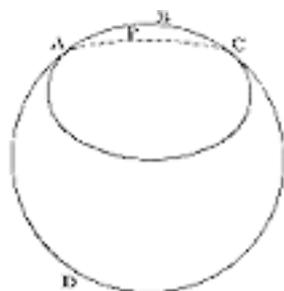


Fig. 23.

Se nella figura 22 supponiamo che la faccia negativa del foglio equivalente alla corrente è dalla parte del punto P, il potenziale aumenterà di  $4\pi i$  quando si passerà da P a P' e, per quanto detto, il lavoro della forza elettromagnetica sarà  $-4\pi i$  quando un polo unitario descriverà la curva chiusa PCP'P nel senso indicato dall'ordine delle lettere, cioè penetrando nel foglio attraverso la sua faccia positiva. Possiamo quindi scrivere quando l'integrale è preso lungo una curva chiusa

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = \pm 4\pi i$$

essendo il secondo membro preso con il segno + quando il contorno di integrazione concatena il circuito penetrando dalla sua faccia negativa e con il segno - nel caso contrario.

Facciamo osservare che il contorno di integrazione può concatenare numerose volte il circuito; allora il lavoro elettromagnetico è uguale ad altrettante volte  $\pm 4\pi i$  quante intersezioni vi sono.

### 115. Caso di più correnti

Se sono presenti più correnti la forza esercitata sull'unità di polo posta in un punto dello spazio è uguale alla risultante delle forze esercitate da ciascuna di esse, ed il lavoro elettromagnetico, quando il polo descrive una curva chiusa, è uguale alla somma dei lavori delle componenti, cioè a  $\sum \pm 4\pi i$ , sommatoria che si estende a tutte le correnti intrecciate dalla curva. Si ha quindi

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \sum \pm i \quad (1)$$

Questa relazione può anche essere interpretata diversamente. Infatti se consideriamo una superficie S passante per la curva C, tutte le correnti per le quali l'intensità è presa nella formula (1) con lo stesso segno, il segno + ad esempio, attraversano questa superficie nello stesso verso;

le correnti per le quali l'intensità è presa con il segno  $-$  attraversano al contrario la superficie in senso inverso. Essendo l'intensità di una corrente la quantità di elettricità che attraversa una sezione del circuito nell'unità di tempo, possiamo considerare  $\sum \pm 4\pi i$  uguale alla quantità di elettricità che attraversa in un certo verso la superficie  $S$  nell'unità di tempo. Di conseguenza, il lavoro elettromagnetico, quando ci si sposta su una curva  $C$  chiusa che intreccia più circuiti, è uguale al prodotto per  $4\pi$  della quantità di elettricità che attraversa nell'unità di tempo una superficie  $S$  limitata alla curva  $C$ .

**116. Nuova espressione del lavoro elettromagnetico lungo una curva chiusa**

Se designiamo con  $u, v, w$  le componenti della velocità dell'elettricità in uno dei circuiti, con  $d\omega$  la sezione di questo circuito lungo la superficie  $S$  e infine con  $l, m, n$  i coseni direttori della normale a questo elemento presa in una direzione opportuna, avremo per la quantità di elettricità che attraversa la superficie  $S$

$$\sum i = \sum (lu + mv + nw) d\omega$$

Ma possiamo sostituire il simbolo  $\sum$  del secondo membro con il simbolo  $\int$  ed estendere l'integrazione a tutta la superficie  $S$ , gli elementi di questa superficie non attraversate da una corrente che dà nell'integrale elementi nulli. Di conseguenza, la formula (1) si può scrivere

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \int (lu + mv + nw) d\omega \quad (2)$$

essendo il primo integrale preso lungo la curva  $C$ , il secondo esteso alla superficie  $S$ .

**117. Trasformazione dell'integrale curvilineo**

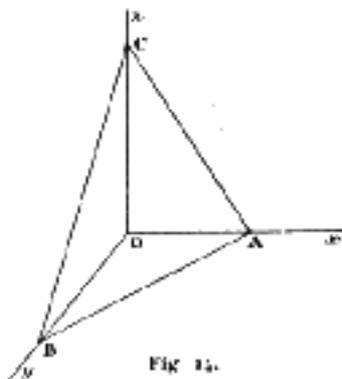
Possiamo trasformare l'integrale curvilineo del primo membro. Nel caso in cui la curva  $C$  sia piana questa trasformazione è molto semplice. Infatti, se prendiamo il piano di questa curva come piano  $xy$ , l'integrale considerato si riduce a

$$\int \alpha dx + \beta dy$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni continue e uniformi di coordinate  $x$  e  $y$ . Ora, si sa che in queste condizioni il valore dell'integrale precedente, quando il contorno di integrazione è descritto in modo tale che lo spazio illimitato si trova a sinistra, è uguale a quello dell'integrale

$$\int \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) dx dy$$

esteso all'area piana limitata dalla curva  $C$ .



Effettuiamo una trasformazione dello stesso tipo nel caso in cui l'integrale curvilineo è preso lungo un contorno triangolare ABC i cui vertici sono posti sugli assi delle coordinate (fig. 24). Possiamo ottenere il valore dell'integrale prendendo successivamente come contorno d'integrazione OAB, OBC, OCA e sommando i tre risultati ottenuti, poiché operando così ognuna delle rette OA, OB, OC è presa due volte in versi contrari e i lati del triangolo sono percorsi nel verso ABC. Abbiamo quindi

$$\int_{ABC} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int_{OBC} (\beta dy + \gamma dz) + \int_{OCA} (\gamma dz + \alpha dx) = \int_{OAB} (\alpha dx + \beta dy)$$

o, trasformando gli integrali curvilinei del secondo membro per i quali il contorno di integrazione è in uno dei piano delle coordinate

$$\int_{ABC} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) dy dz + \int \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) dz dx + \int \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) dx dy$$

Supponiamo il tetraedro OABC infinitamente piccolo e indichiamo con  $d\omega$  l'area del triangolo ABC e con  $l, m, n$  i coseno direttori della normale al piano di questo triangolo. Abbiamo per le proiezioni del triangolo sui piano delle coordinate

$$OBC = l d\omega \quad OCA = m d\omega \quad OAB = n d\omega$$

Dovendo estendere gli integrali del secondo membro dell'uguaglianza precedente ad una di queste superfici infinitamente piccole, le quantità poste sotto il segno di integrazione mantengono sostanzialmente lo stesso valore e possono essere poste fuori dal segno di integrazione; abbiamo quindi per il valore dell'integrale curvilineo preso lungo un contorno triangolare infinitamente piccolo,

$$\int_{ABC} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = l \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) d\omega + m \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) d\omega + n \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) d\omega$$

Se si vuole prendere l'integrale curvilineo lungo una qualsiasi curva C che delimita una superficie finita, possiamo sempre scomporre questa superficie in elementi triangolari infinitamente piccoli e ottenere l'integrale curvilineo sommando gli integrali presi lungo i contorni triangolari che limitano tali elementi; quindi, poiché ogni integrale triangolare è dato dall'uguaglianza precedente, abbiamo per l'integrale curvilineo preso lungo il contorno C,

$$\int_{ABC} (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int \left[ l \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + m \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + n \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] d\omega$$

essendo l'integrale del secondo membro esteso all'area limitata dalla curva C.

## 118. Relazioni di Maxwell

Sostituiamo nell'equazione (2) l'integrale curvilineo con il valore trovato, troviamo

$$\int \left[ l \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + m \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + n \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] d\omega = 4\pi \int (lu - mv + nw) d\omega$$

Dovendo valore questa uguaglianza qualunque sia la superficie di integrazione e di conseguenza qualunque siano  $l, m, n$ , si ha

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) \\ v &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \\ w &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \end{aligned}$$

Queste formule, stabilite da Maxwell, collegano le componenti  $u, v, w$  dell'intensità di corrente alle componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza elettromagnetica. Osserviamo che si applicano sia alle correnti di spostamento che alle correnti di conduzione, supponendo che le correnti di spostamento obbediscano alle leggi di Ampere.

**119. Azione di un polo su un elemento di corrente**

Poiché nella teoria di Maxwell ogni corrente è una corrente chiusa, l'assimilazione di una corrente fissa ad un foglio magnetico permette di determinare l'azione esercitata da un qualsiasi sistema di correnti su un sistema di magneti. Applicando il principio di uguaglianza di azione e reazione si deduce immediatamente l'azione che un sistema di magneti esercita su un sistema di correnti. Il problema di determinare le azioni reciproche che avvengono tra correnti e magneti è quindi completamente risolto. Ma possiamo considerare l'azione esercitata da un polo magnetico su una corrente chiusa come il risultato delle azioni esercitate dal polo sui diversi elementi del circuito percorso dalla corrente. Siamo quindi portati a cercare l'espressione di queste azioni elementari.

**120.** Consideriamo il sistema formato da un polo magnetico uguale all'unità e un circuito percorso da una corrente di intensità 1. Se  $\varphi$  è l'angolo solido sotto il quale si vede il circuito dal punto P dove è posto il polo, i componenti della forza esercitata dalla corrente su questo polo sono

$$-\frac{d\varphi}{dx} \quad -\frac{d\varphi}{dy} \quad -\frac{d\varphi}{dz}$$

Essendo le componenti della forza esercitata dal polo sulla corrente uguali e di segni contrari a queste quantità, il lavoro di questa forza per uno spostamento infinitamente piccolo del circuito sarà  $d\varphi$ , cioè la variazione dell'angolo solido sotto il quale il circuito è visto dal punto P.

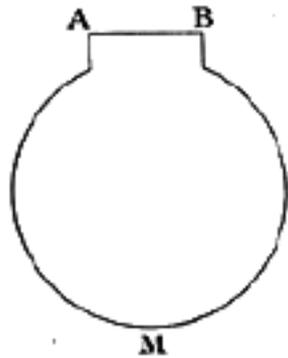


Fig. 25.

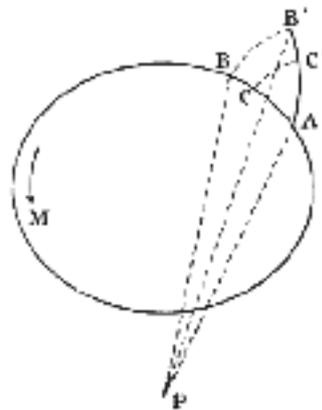


Fig. 26.

Ciò posto, prendiamo un circuito AMB di cui un elemento AB (fig. 25) si può muovere lungo la propria direzione. Se diamo ad AB uno spostamento lungo questa direzione l'angolo solido sotto il quale il circuito è visto da P non varia. Il lavoro della forza elettromagnetica in questo spostamento è quindi nullo e pertanto la forza non ha componenti lungo AB: *l'azione elementare è normale all'elemento.*

**121.** Per ottenere l'espressione di questa forza e determinare completamente la sua direzione, valutiamo in due modi differenti il lavoro che esso compie quando l'elemento AB del circuito AMB (fig. 26) passa dalla posizione AB alla AB'. Bisogna supporre che vi sia un filo metallico, diretto lungo BB' e il suo prolungamento, e sul quale la parte mobile AB del circuito scorre appoggiandosi costantemente.

Questo lavoro è uguale all'angolo solido  $d\varphi$  sotto il quale il triangolo ABB' è visto dal polo P. Le dimensioni di questo triangolo sono infinitamente piccole rispetto alle lunghezze delle rette PA, PB, PB' e quindi possiamo considerarle come uguali tra loro; cioè possiamo confondere la superficie del triangolo con la superficie tagliata nella sfera di raggio  $PA = r$  dall'angolo diedro P. La superficie del triangolo ABB' è quindi  $r^2 d\varphi$  e il volume del tetraedro PABB' è

$$\frac{r^2 d\varphi}{3}$$

M si può valutare il volume di questo tetraedro in un altro modo prendendo come base il triangolo PAB. Se indichiamo con P l'angolo BPA sotto il quale l'elemento di corrente è visto dal punto P e con  $h$  la proiezione di BB' su una normale al piano PAB, abbiamo per il volume del tetraedro

$$Pr \frac{r h}{2 \cdot 3}$$

e uguagliando le due espressioni trovate per questo volume

$$d\varphi = \frac{P h}{r \cdot 2} \quad (1)$$

Tale è il lavoro della forza  $f$  che si esercita sull'elemento AB.

Avremo un'altra espressione scrivendo che è uguale al prodotto della forza per la proiezione, sulla direzione della forza, del cammino percorso dal punto di applicazione. Se assumiamo che la forza sia applicata nel centro C dell'elemento, il percorso descritto dal punto di applicazione è CC', che è la metà di BB'. Chiamando  $h'$  la proiezione di BB' sulla direzione della forza  $f$ , il lavoro di questa forza è

$$f \frac{h'}{2}$$

e, poiché è già dato dalla relazione (1), abbiamo

$$f h' = \frac{P}{r} h$$

Questa uguaglianza è soddisfatta se  $h = h'$  e se  $f = \frac{P}{r}$ ; ma  $h = h'$  ci dice che la forza è normale al piano PAB. *Di conseguenza la forza esercitata da un polo magnetico su un elemento di corrente è normale al piano passante per il polo e per l'elemento.* Il suo valore per un polo magnetico di massa  $m$  e per una intensità  $i$  della corrente attraversante l'elemento è

$$f = \frac{miP}{r}$$

Siccome l'angolo P dipende da  $r$  e varia in ragione inversa di questa quantità, l'azione elementare  $f$  varia in ragione inversa del quadrato della distanza tra il polo e l'elemento.



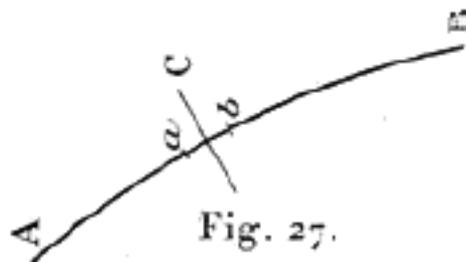
## 8. Elettrodinamica

### 122. Lavoro elettrodinamico

Ammetteremo che essendo in presenza di due circuiti percorsi da correnti di intensità  $i$  e  $i'$ , il lavoro delle forze che agiscono su una di esse, quando si sposta rispetto all'altra, è dato da un certo potenziale  $T$  proporzionale alle intensità  $i$  e  $i'$  e dipendenti, quando  $i$  e  $i'$  rimangono costanti, solo dalla forma e dalla posizione relativa dei due circuiti. Questa ipotesi è verificata sperimentalmente dalle conseguenze che ne derivano.

### 123. Solenoidi

Dividiamo una curva AB (fig. 27) in un'infinità di archi uguali  $ab$  di lunghezza infinitamente piccola  $\delta$  dai punti medi di questi archi conduciamo i piani C normali alla curva. In ciascuno di questi piani disegniamo delle curve uguali chiuse, di area  $d\omega$ , e contenenti il punto di intersezione del loro piano con la curva AB. Se supponiamo che ciascuna di queste curve sia percorsa nella stessa direzione da correnti della stessa intensità  $i$ , questo sistema di correnti si chiama *solenoid*.



Ognuna di queste correnti che compongono il solenoide è equivalente, dal punto di vista dell'azione esercitata su un polo magnetico, a un foglio magnetico dello stesso contorno e di potenza  $i$ . Se prendiamo per spessore di questo foglio la lunghezza  $\delta$  delle aree elementari, le quantità di magnetismo che possiede ognuno delle loro facce saranno  $+\frac{i}{\delta}d\omega$  e  $-\frac{i}{\delta}d\omega$ ; le facce a contatto di due fogli consecutivi possiedono pertanto masse magnetiche uguali e segni contrari e il loro insieme non svolge alcuna azione su un punto esterno. Di conseguenza l'azione del solenoide si riduce a quella di due masse magnetiche  $+\frac{i}{\delta}d\omega$  e  $-\frac{i}{\delta}d\omega$  poste alle estremità di AB. Questi sono i poli del solenoide.

Se la curva AB è limitata, il solenoide ha due poli uguali con nomi contrari; se la curva AB ha una delle sue estremità all'infinito il polo corrispondente del solenoide è respinto all'infinito e l'azione del solenoide si riduce a quella dell'altro polo; infine se la curva AB è chiusa il solenoide non ha più poli.

### 124. Solenoidi e correnti

L'esperienza mostra che l'azione di un solenoide chiuso su una corrente è nulla. Da questo fatto sperimentale è facile dedurre che l'azione di un solenoide aperto dipende solo dalla posizione dei suoi poli.

Siano  $T$  il potenziale relativo all'azione esercitata da un solenoide ACB (fig. 28) su una corrente che si sposta nelle sue vicinanze e  $T'$  il potenziale relativo all'azione di un secondo

solenoidi BDA scelto in modo da formare con il primo solenoide chiuso; avremo per il potenziale dell'insieme di questi due solenoidi

$$T + T' = 0$$

Questa uguaglianza è soddisfatta finché il solenoide ACBDA resta chiuso, qualunque siano le deformazioni che facciamo subire alle porzioni componenti. Se in particolare deformiamo solo il solenoide ACB il potenziale di BDA mantiene lo stesso valore  $T'$  e, per l'uguaglianza precedente,  $T$  non varia. Il potenziale di un solenoide ACB mantiene quindi lo stesso valore quando i suoi poli A e B rimangono nelle stesse posizioni; in altre parole il potenziale dipende solo dalla posizione dei poli del solenoide.

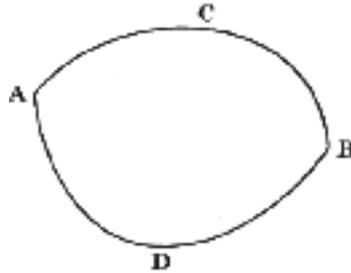


Fig. 28.

**125.** Il ragionamento precedente vale ancora quando uno dei poli, ad esempio B, del solenoide ACB viene respinto all'infinito, perché per ottenere un solenoide chiuso basta aggiungere un secondo solenoide il cui polo opposto a B viene anch'esso respinto all'infinito. Ma in queste condizioni l'azione del solenoide ACB si riduce a quella del polo A, il potenziale di un polo del solenoide dipende quindi solo dalla sua posizione rispetto alle correnti che agiscono su di esso.

**126.** Facciamo presente che agli inizi dell'elettromagnetismo abbiamo ammesso che il potenziale di un polo magnetico sottoposto all'azione di correnti chiuse dipendeva solo dalla posizione del polo rispetto alle correnti; ed è su quest'unica ipotesi che si è basato tutto il nostro ragionamento. Poiché vale lo stesso per il potenziale di un polo di solenoide sottoposto all'azione di correnti chiuse, dimostreremo allo stesso modo che in questo nuovo caso il potenziale è ancora della stessa forma. Il potenziale elettrodinamico di un polo del solenoide sarà quindi proporzionale all'angolo solido  $\varphi$  sotto il quale si vedono di questo polo sotto le facce positive delle correnti che agiscono su di esso, e alla massa magnetica  $\pm \frac{id\omega}{\delta}$  equivalente al polo del solenoide nelle azioni elettromagnetiche. Poiché d'altronde abbiamo ammesso (121) che il potenziale di una corrente che si sposta in presenza di un'altra corrente di intensità  $i'$  è proporzionale a  $i'$  avremo per il potenziale di un polo di solenoide sottoposto all'azione di un corrente unica

$$T = \pm a \frac{ii'd\omega}{\delta} \varphi$$

Precisi esperimenti hanno mostrato che il coefficiente  $a$  è uguale all'unità quando le intensità sono espresse in unità elettromagnetiche; quindi abbiamo

$$T = \pm \frac{id\omega}{\delta} i' \varphi$$

vale a dire che l'azione elettrodinamica che avviene tra un polo del solenoide e una corrente è uguale all'azione elettromagnetica che avviene tra questa corrente ed una massa magnetica  $\pm \frac{id\omega}{\delta}$  il cui segno è determinato dalla direzione della corrente nel polo del solenoide.

**127.** Quando il solenoide ha due poli A e B (fig. 29) si può, senza cambiare la sua azione, aggiungergli un solenoide BC che si estende all'infinito in una direzione C e percorso da due correnti di versi opposti di uguale intensità a quella della corrente che percorre AB. L'insieme di

questi tre solenoidi si può considerare come due solenoidi infinito uno dei quali ha il suo polo in A, e l'altro polo in B e nei quali circolano correnti della stessa intensità e di versi contrari. Questi due poli equivalgono a due masse magnetiche uguali e di segni contrari in modo che il solenoide finito AB è assimilabile a un magnete uniforme della stessa lunghezza.

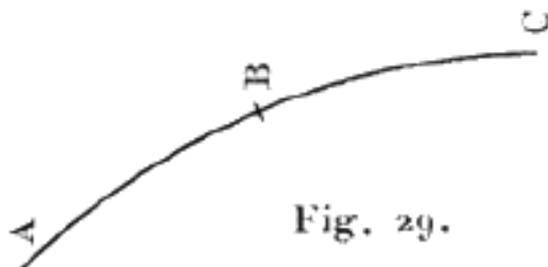


Fig. 29.

### 128. Potenziale elettrodinamico di una corrente infinitamente piccola

Una corrente infinitamente piccola può essere considerata come un elemento di solenoide di lunghezza  $\delta$ . Se quindi la sua superficie è  $d\omega$  e la sua intensità  $i$ , può essere assimilata a due masse magnetiche  $+\frac{id\omega}{\delta}$  e  $-\frac{id\omega}{\delta}$  poste in A e B a una distanza  $\delta$  l'una dall'altra.

Chiamiamo  $\Omega$  il potenziale dell'azione che esercita il sistema di correnti fisse sull'unità di magnetismo positivo posta nel punto A (fig. 30). Nel punto B, infinitamente vicino ad A, il potenziale sarà  $\Omega + d\Omega$ . Di conseguenza il potenziale delle due masse magnetiche che sostituiscono la corrente infinitamente piccola è espresso da

$$\Omega \frac{id\omega}{\delta} - (\Omega + d\Omega) \frac{id\omega}{\delta} = -d\Omega \frac{id\omega}{\delta}$$

Indicando con  $x, y, z$  le coordinate del punto A, viene

$$d\Omega = \frac{d\Omega}{dx} dx + \frac{d\Omega}{dy} dy + \frac{d\Omega}{dz} dz$$

o ancora

$$d\Omega = -(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

essendo  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti della forza che esercita il sistema di correnti fisse sull'unità di polo magnetico posta in A.

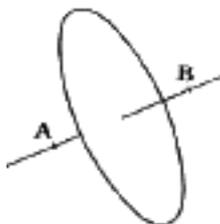


Fig. 30.

Se chiamiamo  $l, m, n$  i coseni direttori della direzione AB della normale al piano della corrente infinitamente piccola, le quantità  $dx, dy, dz$  valgono

$$dx = l\delta \quad dy = m\delta \quad dz = n\delta$$

e l'espressione di  $d\Omega$  si può mettere nella forma

$$d\Omega = -(\alpha l + \beta m + \gamma n) \delta$$

Si ha allora per il potenziale della corrente infinitamente piccola,

$$-d\Omega \frac{i l d\omega}{\delta} = i(\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega$$

cioè *il potenziale di una corrente elementare è uguale al prodotto della sua intensità per il flusso di forza che penetra dalla sua faccia positiva.*

### 129. Potenziale elettrodinamico di una corrente chiusa

Nel caso in cui si ha un sistema di correnti fisse agenti su una corrente mobile finita si può scomporre la corrente mobile in un'infinità di correnti elementari della stessa intensità e circolanti nello stesso verso. Il potenziale della corrente così scomposta è uguale alla somma dei potenziali delle correnti elementari; è quindi

$$T = i \int (\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega \quad (1)$$

essendo l'integrale esteso all'intera superficie di un'area curva su un piano qualunque limitato dalla corrente mobile.

### 130. Altra espressione del potenziale di una corrente

Il precedente integrale esteso ad una superficie può essere sostituito da un integrale curvilineo preso lungo il circuito percorso dalla corrente. Questa è la trasformazione inversa a quella utilizzata nel paragrafo 117. Facendo riferimento a quanto ivi detto è facile vedere che l'integrale

$$T = i \int_C (Fl + Gm + Hn) \quad (2)$$

preso lungo il circuito mobile è uguale a

$$i \iint \left[ l \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\omega$$

esteso a una superficie limitata dallo stesso circuito. Se pertanto si vuole che l'integrale (2) rappresenti il potenziale, dato dall'integrale (1), di una corrente chiusa, si deve avere

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (3)$$

Le quantità  $F, G, H$  così introdotte sono dette da Maxwell *le componenti del momento elettromagnetico* (il termine *momento* è preso nel senso della *quantità di moto*).

### 131. Caso di una corrente che si sposta in un mezzo magnetico

Finora abbiamo implicitamente assunto che se ci sono dei magneti in presenza della corrente mobile, questa non li attraversa. Esaminiamo il caso in cui la corrente mobile si sposta in un mezzo magnetico.

Può esserci indecisione sulla scelta delle quantità da prendere per le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza che viene esercitata sull'unità polare. Abbiamo visto, infatti, per quanto riguarda i magneti, che la forza che agisce su un polo posto all'interno di una cavità scavata in un mezzo magnetico dipende dalla forma della cavità, e tra i valori che può assumere ne abbiamo considerato due: uno (*la forza magnetica*) avente come componenti

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

l'altra (*l'induzione magnetica*) di componenti

$$a = \alpha + 4\pi A \quad b = \beta + 4\pi B \quad c = \gamma + 4\pi C$$

dove  $\Omega$  indica il potenziale del magnete e  $A, B, C$  le componenti della magnetizzazione in un punto considerato.

Ma la forma delle equazioni (3) permette di togliere facilmente l'indeterminazione e mostra che bisogna introdurre le componenti dell'induzione magnetica. Infatti, prendendo le derivate dei due membri di ciascuna di esse rispettivamente rispetto a  $x, y, z$ , si ottiene

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$$

Ora abbiamo visto che questa condizione non è soddisfatta dalle componenti della forza magnetica nel caso di un punto interno alle masse magnetiche mentre è sempre soddisfatta per le componenti dell'induzione. È quindi quest'ultima che dovrà essere introdotta nelle formule che diventeranno;

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (4)$$

**132.** Un'indeterminazione dello stesso tipo è avvenuta per le formule del paragrafo 118 che danno le componenti  $u, v, w$ , della velocità di una corrente in funzione di  $\alpha, \beta, \gamma$ , ma è facile rimuoverla mostrando che in questo caso non bisogna prendere le componenti dell'induzione.

Poniamoci infatti nel caso particolare in cui il circuito mobile non è attraversato da alcuna corrente; avremo allora  $u = v = w = 0$ . Se quindi si prendessero le componenti dell'induzione si arriverebbe a

$$\frac{dc}{d} - \frac{db}{dz} = 0 \quad \frac{da}{dz} - \frac{dc}{dx} = 0 \quad \frac{db}{dx} - \frac{da}{dy} = 0$$

condizioni che generalmente non sono soddisfatte. Non possiamo quindi prendere le componenti dell'induzione e dobbiamo conservare le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza magnetica. Ci accontenteremo di questa doppia situazione, in assenza di una teoria più soddisfacente.

### 133. Determinazione delle componenti del momento elettromagnetico

Abbandoniamo il caso in cui la corrente mobile si muove in un mezzo magnetico e cerchiamo le componenti  $F, G, H$  del momento magnetico.

Le tre equazioni differenziali (3) non bastano a determinare queste grandezze, poiché è facile vedere che se  $F, G, H$  è una soluzione di queste equazioni, il gruppo di valori

$$F + \frac{d\chi}{dx} \quad G + \frac{d\chi}{dy} \quad H + \frac{d\chi}{dz}$$

dove  $\chi$  è una funzione qualunque delle coordinate, è pure una soluzione del sistema. Infatti, il secondo membro della prima delle equazioni diviene quando si sostituiscono a  $F, G, H$  i valori precedenti

$$\frac{d}{dy} \left( H + \frac{d\chi}{dz} \right) - \frac{d}{dz} \left( G + \frac{d\chi}{dy} \right) = \frac{dH}{dy} + \frac{d^2\chi}{dydz} - \frac{dG}{dz} - \frac{d^2\chi}{dydz} = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

e l'ultimo membro di questa serie di uguaglianze è uguale ad  $\alpha$  poiché, per ipotesi,  $F, G, H$  formano una soluzione del sistema. Con un calcolo simile si vedrebbe che anche le altre due equazioni sono soddisfatte.

**134.** Per determinare le componenti  $F, G, H$  dobbiamo quindi imporre loro la condizione di soddisfare una nuova equazione. Maxwell prende per questa equazione di condizione,

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0 \quad (5)$$

Tenendo conto di questa relazione è possibile trovare tra le componenti  $u, v, w$  della velocità della corrente e le componenti  $F, G, H$  del momento magnetico tre relazioni che ci permetteranno di ottenere i valori di queste ultime quantità. Abbiamo, secondo le formule del paragrafo 118 e le formule (3) del paragrafo 130:

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2G}{dx dy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dx dz}$$

o, sommando e sottraendo al secondo membro la quantità  $\frac{d^2F}{dx^2}$  e raggruppando i termini in modo opportuno

$$4\pi u = \frac{d^2F}{dx^2} \frac{d^2G}{dx dy} + \frac{d^2H}{dx dz} - \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}$$

o infine

$$4\pi u = \frac{dJ}{dx} - \Delta F \quad (6)$$

Se si suppone che l'equazione (5) sia sempre soddisfatta, cioè che sia un'identità, le derivate parziali di  $J$  sono nulle e la relazione (6) si riduce a

$$\Delta F + 4\pi u = 0$$

Essendo questa equazione analoga all'equazione di Poisson,  $F$  può essere considerata come il potenziale di una materia attrattiva di densità  $u$ . Da quanto sappiamo sulla forma del potenziale che soddisfa tale equazione possiamo immediatamente porre

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau$$

essendo l'integrale esteso a tutti gli elementi  $d\tau$  dell'intero spazio;  $u$  è il valore della prima componente della corrente nel centro di gravità dell'elemento  $d\tau$  e  $r$  è la distanza da questo elemento al punto  $x, y, z$ .

Otterremo con calcoli analoghi

$$G = \int \frac{v}{r} d\tau \quad H = \int \frac{w}{r} d\tau$$

Questi valori di  $F, G, H$  soddisfano necessariamente le equazioni differenziali (3); mostriamo che è soddisfatta anche l'equazione di condizione (5) e per questo cerchiamo le derivate parziali di  $F, G, H$  che vi entrano.

**135.** Diamo a un punto di coordinate  $x, y, z$  uno spostamento  $dx$  parallelo all'asse  $x$ ; la distanza di questo punto dai diversi elementi della materia attraente fittizia di densità  $u$  cresce di  $dr$  e il potenziale  $F$  nel punto considerato aumenta di  $\frac{dF}{dx} dx$ . Ma supponiamo che invece di spostare il punto attratto  $x, y, z$ , come abbiamo appena fatto lasciando fissa la materia attrattiva, diamo ai vari punti della materia attrattiva, uno spostamento uguale a  $-dx$ , lasciando fisso il punto  $x, y, z$ ; sarà assolutamente la stessa cosa. L'aumento  $dr$  della distanza dal punto attratto al punto attrattivo sarà ovviamente lo stesso, se diamo uno spostamento qualsiasi al punto

attratto, oppure se è il punto attratto a subire un uguale spostamento parallelo in senso opposto. Ciò equivale a supporre che la densità  $u$  nel centro di gravità dell'elemento diventi, dopo lo spostamento,  $u + \frac{du}{dx}dx$ . Abbiamo pertanto

$$\frac{dF}{dx} = \int \frac{u + \frac{du}{dx}dx}{r} d\tau - \int \frac{u}{r} d\tau$$

il primo integrale essendo esteso all'intero volume occupato dal materiale attrattivo dopo lo spostamento. Ora questi due campi di integrazione sono gli stessi poiché entrambi comprendono l'intero spazio; quindi, abbiamo semplicemente

$$\frac{dF}{dx} dx = \int \frac{du}{r} d\tau$$

da cui

$$\frac{dF}{dx} = \int \frac{1}{r} \frac{du}{dx} d\tau$$

Otterremo espressioni analoghe per i differenziali parziali di  $G$  rispetto a  $y$  e di  $H$  rispetto a  $z$ ; sommandoli si ha

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = \int \frac{1}{r} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau$$

Tutti gli elementi di quest'ultimo integrale sono nulli poiché, per Maxwell, l'elettricità è incomprimibile e l'equazione che esprime questa proprietà è

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

L'equazione della condizione (5) è pertanto soddisfatta.

**136.** Ritorniamo al caso in cui il mezzo essendo magnetico, le componenti  $F, G, H$  del momento elettromagnetico sono legate a quelle dell'induzione mediante le equazioni (4). È facile garantire che queste equazioni e l'equazione della condizione (5) saranno soddisfatte se si prende per  $F, G, H$  il prodotto dei valori trovati per il coefficiente di permeabilità magnetica  $\mu$  del mezzo; quindi abbiamo

$$F = \mu \int \frac{u}{r} d\tau \quad G = \mu \int \frac{v}{r} d\tau \quad H = \mu \int \frac{w}{r} d\tau$$

### 137. Valori di $F, G, H$ per una corrente lineare

Poniamoci nel caso particolare in cui in presenza di corrente mobile esiste una sola corrente il cui circuito è formato da un filo di piccola sezione  $d\sigma$ . Essendo l'intensità di quest'ultima corrente indicata con  $i$ , la velocità dell'elettricità è  $\frac{i}{dx}$  e la direzione di questa velocità è quella della tangente al circuito tracciato nel verso della corrente. I coseni direttori di questa tangente sono  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  (chiamando  $ds$  l'elemento d'arco del circuito), di modo che si ha per le componenti  $u, v, w$  della velocità dell'elettricità

$$u = \frac{i}{d\sigma} \frac{dx}{dx} \quad v = \frac{i}{d\sigma} \frac{dy}{dx} \quad w = \frac{i}{d\sigma} \frac{dz}{dx}$$

o, poiché  $d\sigma ds = d\tau$ ,

$$u = \frac{idx}{d\tau} \quad v = \frac{id y}{d\tau} \quad w = \frac{idz}{d\tau} \quad (7)$$

Di conseguenza la componente  $F$  del momento elettromagnetico in un punto dello spazio si può scrivere

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau = \int \frac{idx}{r} d\tau = i \int \frac{dx}{r}$$

e abbiamo per le tre componenti

$$F = i \int \frac{dx}{r} \quad G = i \int \frac{dy}{r} \quad H = i \int \frac{dz}{r} \quad (8)$$

**138. Formule di Neumann**

Sia  $C$  (fig. 31) un circuito fisso percorso da una corrente di intensità  $i$ , e  $C'$  un circuito mobile percorso da una corrente di intensità  $i'$ . Il potenziale elettrodinamico  $T$  della corrente  $C'$  rispetto alla corrente  $C$  vale

$$T = i' \int (F dx' + G dy' + H dz')$$

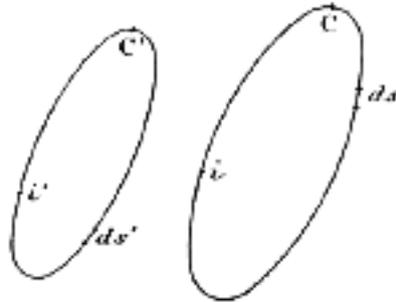


Fig. 31.

In questa espressione  $F, G, H$  sono relativi al circuito  $C$  poiché esso è solo in presenza del circuito mobile; se quindi supponiamo che questo circuito è formato da un filo di piccola sezione,  $F, G, H$  sono dati dalle espressioni (8) trovate in precedenza e nelle quali  $r$  è la distanza del mezzo dell'elemento  $ds$  dall'elemento  $ds'$ . Portando questi valori nell'espressione di  $T$ , otteniamo

$$T = ii' \iint \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r}$$

e indicando con  $\varepsilon$  l'angolo dei due elementi  $ds$  e  $ds'$

$$T = ii' \iint \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$$

Tale è la forma data da Neumann al potenziale elettrodinamico di una corrente rispetto a un'altra.

La simmetria di questa formula rispetto a  $i$  e  $i'$ , a  $ds$  e  $ds'$  mostra che il potenziale elettrodinamico di  $C'$  rispetto a  $C$  è uguale al potenziale elettrodinamico di  $C$  rispetto a  $C'$ .

**139. Nuova espressione del potenziale elettrodinamico di una corrente**

La formula

$$T = i \int (F dx + G dy + H dz)$$

si può facilmente mettere sotto un'altra forma che risulterà utile nel seguito.

Dai valori (7) stabiliti al § 137 si ricava immediatamente

$$i dx = u d\tau \quad i dy = v d\tau \quad i dz = w d\tau$$

e introducendo questi valori nell'espressione di  $T$ , si ha

$$T = \int (Fu + Gv + Hw) \quad (10)$$

dove l'integrale è esteso allo spazio occupato dalla materia conduttrice che costituisce il circuito mobile.

#### 140. Potenziale elettrodinamico di una corrente rispetto a se stesso

Si può pensare di scomporre un circuito attraversato da una corrente in un numero infinito di circuiti di sezione infinitamente piccola. Ciascuna delle correnti così ottenute ha un potenziale elettrodinamico relativo alle altre; la somma di questi potenziali è ciò che chiamiamo potenziale della corrente rispetto a se stessa. Cerchiamo l'espressione del potenziale.

Siano  $u, v, w$  le componenti della velocità dell'elettricità in un punto del circuito,  $F, G, H$  le componenti del momento elettromagnetico in questo stesso punto, e  $T$  il potenziale della corrente rispetto a se stessa. Se diamo a  $u, v, w$ , gli incrementi  $du, dv, dw$ , queste quantità  $F, G, H$  e  $T$  prenderanno rispettivamente gli incrementi  $dF, dG, dH$  e  $dT$ . La corrente che circola allora nel circuito può essere considerata come risultante dalla sovrapposizione della corrente originaria e della corrente proveniente dall'aumento dato alla velocità dell'elettricità; chiameremo quest'ultima corrente aggiuntiva. L'aumento  $dT$  del potenziale può quindi essere considerato uguale alla somma del potenziale della vecchia corrente rispetto alla corrente aggiuntiva e del potenziale della corrente aggiuntiva rispetto a se stessa. Il potenziale della corrente originaria rispetto alla corrente aggiuntiva è, secondo l'espressione (10) il potenziale di una corrente

$$\int (udF + vdG + wdH) d\tau$$

Quanto al potenziale della corrente addizionale rispetto a se stessa, sarà una quantità infinitamente piccola del secondo ordine e possiamo trascurarla; si ha quindi

$$dT = \int (udF + vdG + wdH) d\tau$$

Ma si può considerare  $dT$  uguale al potenziale della corrente addizionale rispetto alla corrente originaria aumentato del potenziale della corrente addizionale rispetto a se stessa. Trascurando quest'ultimo, si ha

$$dT = \int (Fdu + Gdv + Hdw) d\tau$$

e sommando i due valori di  $dT$  e poi dividendo per 2

$$dT = \frac{1}{2} \int (Fdu + udF + Gdv + vdG + Hdw + wdH) d\tau$$

o

$$dT = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau$$

L'integrazione dà per il valore del potenziale della corrente rispetto a se stessa

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau \quad (11)$$

**141.** Si noti che il ragionamento che ci ha portato a questa espressione vale sia nel caso di un sistema di più correnti sia in quello di una corrente unica. Questa espressione rappresenta quindi in modo generale il potenziale elettrodinamico di un sistema di correnti rispetto a se stesso. Occorre allora estendere l'integrazione all'intero volume occupato dai conduttori materiali del sistema, o anche all'intero spazio, il che è la stessa cosa poiché si presuppone che il sistema non sia in presenza di nessun altro sistema di correnti.

**142. Espressioni diverse del potenziale di un sistema di correnti rispetto a se stesse**

Abbiamo stabilito al § 134 che la componente  $F$  del momento elettromagnetico in un punto dello spazio è data dalla formula

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

dove  $r$  è la distanza del punto considerato dall'elemento di volume  $d\tau'$  per il quale la componente della velocità è  $u'$ . Nel punto dello spazio occupato da un elemento di volume  $d\tau$  di un sistema di correnti le componenti del momento elettromagnetico relativo al sistema stesso saranno pertanto

$$F = \int \frac{u' d\tau'}{r} \quad G = \int \frac{v' d\tau'}{r} \quad H = \int \frac{w' d\tau'}{r}$$

Portando questi valori nell'espressione (10) del potenziale elettrodinamico del sistema rispetto a se stesso si ha

$$T = \frac{1}{2} \int \left( u \int \frac{u' d\tau'}{r} + v \int \frac{v' d\tau'}{r} + w \int \frac{w' d\tau'}{r} \right) d\tau$$

Ciascuno degli integrali doppi del secondo membro di questa uguaglianza deve essere esteso a tutte le possibili combinazioni di due elementi  $d\tau$  e  $d\tau'$ . Questi elementi appartengono allo stesso sistema di correnti, uno stesso elemento di volume svolge il ruolo di  $d\tau$  e  $d\tau'$  e ciascun integrale contiene due volte lo stesso elemento differenziale. Se si prende ogni elemento differenziale una sola volta, è necessario, nell'uguaglianza precedente, riportare il doppio del risultato ottenuto dall'integrazione così effettuata. il fattore  $\frac{1}{2}$  scompare e si ha la formula

$$T = \iiint \frac{uu' + vv' + ww'}{r} d\tau d\tau' \quad (12)$$

**143.** Nell'espressione (11) del lavoro elettrodinamico, possiamo sostituire  $u, v, w$  con i loro valori:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) \\ v = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \\ w = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \end{cases}$$

otteniamo

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \left[ F \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + G \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + H \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] d\tau$$

Consideriamo l'integrale

$$\int F \frac{d\gamma}{dy} d\tau$$

integrando per parti, si ha

$$\iiint F \frac{d\gamma}{dy} d\tau = \iiint F \gamma m d\omega - \iiint \gamma \frac{dF}{dy} d\tau$$

essendo  $m$  il coseno dell'asse  $y$  con la normale all'elemento  $d\omega$  della superficie che limita il volume di integrazione. Se, come possiamo, estendiamo gli integrali tripli tutto lo spazio, le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza che si esercita su un punto della superficie che ne delimita il volume sono nulle, poiché il punto viene respinto all'infinito. Gli elementi dell'integrale doppio sono quindi nulli e l'integrale stesso è uguale a zero. Abbiamo quindi semplicemente

$$\int F \frac{d\gamma}{dy} d\tau = - \int \gamma \frac{dF}{dy} d\tau$$

Effettuando una trasformazione analoga per gli altri integrali della precedente espressione di  $T$  e riportando i valori ottenuti in tale espressione, si ottiene

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \left[ \alpha \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + \beta \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + \gamma \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\tau$$

**144.** Questa nuova forma del potenziale può essere semplificata tenendo conto dei gruppi di equazioni (3) e (4) che danno i valori delle differenze delle derivate parziali di  $F, G, H$ , nel caso in cui il sistema di correnti si trova in un mezzo non magnetico e nel caso in cui si trovi invece in un mezzo magnetico. Abbiamo nel primo caso

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

e nel secondo

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha a + \beta b + \gamma c) d\tau$$

#### 145. Caso di un sistema di conduttori lineari

Quando i circuiti che compongono il sistema sono lineari, il potenziale elettrodinamico del sistema rispetto a se stesso può essere messo nella forma che Neumann ha dato al potenziale di due sistemi di correnti lineari l'una rispetto all'altra. Infatti, dalle formule (7) e (8) stabilite al § 137 le componenti della velocità dell'elettricità in un punto sono

$$u = \frac{idx}{d\tau} \quad v = \frac{id y}{d\tau} \quad w = \frac{idz}{d\tau}$$

e le componenti del momento elettromagnetico nello stesso punto sono

$$F = i' \int \frac{dx'}{r} \quad G = i' \int \frac{dy'}{r} \quad H = i' \int \frac{dz'}{r}$$

Portando questi diversi valori nell'espressione (9), essa diviene

$$T = \frac{1}{2} ii' \iiint \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r}$$

o, indicando con  $\varepsilon$  l'angolo formato da due elementi qualsiasi del sistema di correnti

$$T = \frac{1}{2} ii' \iint \frac{ds ds' \cos \varepsilon}{r}$$

#### 146. Caso di un sistema di due correnti lineari

Chiamiamo con  $C_1$  e  $C_2$  queste due correnti e assegniamo alle quantità che entrano nelle nostre formule degli indici 1 e 2 a seconda che si riferiscano alla corrente  $C_1$  o alla corrente  $C_2$ . Abbiamo per le componenti del momento elettromagnetico in un punto

$$F = i_1 \int_{C_1} \frac{dx_1}{r} + i_2 \int_{C_2} \frac{dx_2}{r}$$

$$G = i_1 \int_{C_1} \frac{dy_1}{r} + i_2 \int_{C_2} \frac{dy_2}{r}$$

$$H = i_1 \int_{C_1} \frac{dz_1}{r} + i_2 \int_{C_2} \frac{dz_2}{r}$$

queste sono funzioni lineari e omogenee delle intensità  $i_1$  e  $i_2$ .

Il potenziale elettrodinamico di questo sistema di correnti rispetto a se stesso è dato dalla formula (11)

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau$$

Ora, in un punto del primo circuito si ha

$$ud\tau = i_1 dx_1 \quad vd\tau = i_1 dy_1 \quad wd\tau = i_1 dz_1$$

e in un punto del secondo

$$ud\tau = i_2 dx_2 \quad vd\tau = i_2 dy_2 \quad wd\tau = i_2 dz_2$$

Di conseguenza l'integrale (9) dà

$$T = \frac{i_1}{2} \int (Fdx_1 + Gdy_1 + Hdz_1) + \frac{i_2}{2} \int (Fdx_2 + Gdy_2 + Hdz_2)$$

$T$  è quindi una funzione ed omogenea rispetto a  $i_1$  e  $i_2$  e rispetto a  $F, G, H$ . Ma abbiamo appena visto che queste ultime quantità sono omogenee e di primo grado in  $i_1$  e  $i_2$ ; quindi  $T$  è una funzione omogenea e di secondo grado in  $i_1$  e  $i_2$ , e possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} (Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2)$$

Le quantità  $L, M, N$  dipendono evidentemente solo dalla forma e dalla posizione relativa delle due correnti  $C_1$  e  $C_2$ . È anche facile cogliere il loro significato. Infatti essendo  $M$  il coefficiente di  $i_1i_2$  nel valore di  $T$ ,  $M$  è uguale all'integrale

$$\int \frac{dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2 + dz_1 dz_2}{r}$$

preso lungo uno dei circuiti; è quindi il potenziale elettrodinamico di una delle correnti rispetto all'altra. Notiamo anche semplicemente che  $L$  è il potenziale dell'attuale  $C_1$  assunto solo rispetto a se stesso e che  $N$  è il potenziale di  $C_2$  assunto solo rispetto a se stesso.

# 9. Induzione

## 147. Forze elettromotrici di induzione

Nello studio dell'elettromagnetismo e dell'elettrodinamica abbiamo implicitamente assunto che le intensità di corrente rimangano costanti. Si sa però che quando c'è uno spostamento relativo di correnti o correnti e magneti si verificano particolari fenomeni detti fenomeni di induzione, la cui scoperta si deve a Faraday. Questi fenomeni si manifestano nei circuiti mediante la produzione di correnti temporanee le cui intensità si sommano all'intensità della corrente originaria e che possono essere attribuite a forze elettromotrici che chiamiamo *forze elettromotrici di induzione*.

Da esperienze fatte sull'induzione, risulta che se le intensità  $i_1$  e  $i_2$  di due correnti fisse  $C_1$  e  $C_2$  subiscono nell'intervallo di tempo  $dt$  incrementi  $di_1$  e  $di_2$ , le forze elettromotrici indotte sviluppate nei circuiti sono, per il circuito  $C_1$ ,

$$A \frac{di_1}{dt} + B \frac{di_2}{dt}$$

e per il circuito  $C_2$

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt}$$

**148.** Cerchiamo l'espressione della forza elettromotrice risultante dallo spostamento di circuiti attraversati da correnti di intensità costante.

Consideriamo innanzitutto il caso in cui solo uno dei circuiti si sposta da  $C$  a  $C'$ . L'esperienza prova che tutto avviene come se la corrente  $C$  fosse soppressa e si creasse in  $C'$  una nuova corrente della stessa intensità. Da quanto esposto nel paragrafo precedente, a una variazione  $di$  dell'intensità  $i$  della corrente  $C$  corrisponde una forza elettromotrice di induzione  $A \frac{di}{dt}$  nel circuito  $C$ . Di conseguenza, la soppressione della corrente  $C$ , che equivale a una riduzione  $i$  dell'intensità di questa corrente, produce una forza elettromotrice  $-\frac{Ai}{dt}$ ; e la creazione della corrente  $C'$  una forza elettromotrice  $(A + dA) \frac{i}{dt}$ , essendo  $dA$  la variazione del coefficiente  $A$  quando la corrente passa da  $C$  in  $C'$ . Abbiamo pertanto per la forza elettromotrice risultante dello spostamento

$$(A + dA) \frac{i}{dt} - A \frac{di}{dt} = i \frac{dA}{dt}$$

Sarà facile vedere che se sono presenti due correnti  $C_1$  e  $C_2$  sono in presenza le forze elettromotrici risultanti dal loro spostamento relativo sono, per il circuito  $C_1$ ,

$$i_1 \frac{dA}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt}$$

e per il circuito  $C_2$

$$i_1 \frac{dB}{dt} + i_2 \frac{dC}{dt}$$

Nel caso in cui le due correnti variano di intensità nello stesso tempo in cui si spostano, le forze elettromotrici di induzione sono, per ciascuno dei due circuiti, uguali alla somma delle forze elettromotrici risultanti da ciascun tipo di variazione preso separatamente; si ha quindi per il circuito  $C_1$ ,

$$A \frac{di_1}{dt} + B \frac{di_2}{dt} + i_1 \frac{dA}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} (Ai_1 + Bi_2)$$

**149. Determinazione dei coefficienti  $A, B, C$**

I coefficienti che entrano nell'espressione delle forze elettromotrici di induzione possono essere determinati mediante l'applicazione del principio di conservazione dell'energia.

Prendiamo due circuiti in cui le correnti di intensità  $i_1$  e  $i_2$  sono fornite da batterie di forze elettromotrici  $E_1$  e  $E_2$ . La quantità di energia chimica consumata nella batteria viene in parte trasformata in calore nella batteria stessa e in parte si ritrova sotto forma di energia voltaica. L'esperienza mostra che la quantità di energia voltaica prodotta nel tempo  $dt$  è

$$E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt$$

Questa energia voltaica si ritrova sotto forma di calore prodotto nei conduttori dall'effetto Joule e sotto forma di lavoro meccanico derivante dallo spostamento dei conduttori. Se  $R_1$  e  $R_2$  sono le resistenze dei due circuiti le quantità di calore liberate sono  $R_1 i_1^2 dt$  e  $R_2 i_2^2 dt$ . Quanto al lavoro meccanico fornito dal sistema, esso è pari alla variazione  $dT$  del potenziale elettrodinamico del sistema rispetto a se stesso, o più precisamente alla parte di tale variazione dovuta allo spostamento dei circuiti, senza tener conto della parte di questa variazione dovuta all'aumento delle intensità. Questo potenziale ha per espressione nel caso di due circuiti

$$T = \frac{1}{2} [L i_1^2 + 2M i_1 i_2 + N i_2^2]$$

Se ne deduce

$$dT = \frac{1}{2} [i_1^2 dL + 2i_1 i_2 dM + i_2^2 dN]$$

L'eccesso di energia voltaica fornito al sistema nel tempo  $dt$  all'energia raccolta sotto forma di calore e di lavoro meccanico nello stesso tempo è pertanto

$$E_{e1} i_1 dt + E_2 i_2 dt - R_1 i_1^2 dt - R_2 i_2^2 dt - dT \quad (1)$$

Secondo il principio di conservazione dell'energia, questa espressione deve essere nulla nel caso in cui il sistema descriva un *ciclo chiuso*. Se il ciclo non è chiuso, deve esserci un differenziale esatto. Esprimendo che si tratta di un differenziale esatto otterremo i valori di  $A, B, C$ .

**150.** Per trasformare l'espressione (1), scriviamo le leggi di Ohm per ciascuno dei circuiti osservando che, poiché vi è spostamento dei circuiti vi è produzione di forze elettromotrici di induzione; abbiamo

$$E_1 + \frac{d}{dt} (A i_1 + B i_2) = R_1 i_1$$

e

$$E_2 + \frac{d}{dt} (B i_1 + C i_2) = R_2 i_2$$

Moltiplicando i due membri di queste relazioni rispettivamente per  $i_1 dt$  e  $i_2 dt$  otteniamo

$$E_1 i_1 dt - R_1 i_1^2 dt = -i_1 d(A i_1 + B i_2)$$

e

$$E_2 i_2 dt - R_2 i_2^2 dt = -i_2 d(B i_1 + C i_2)$$

Se sostituiamo i primi termini dell'espressione (1) con la somma dei secondi membri delle relazioni precedenti, abbiamo

$$-i_1 d(A i_1 + B i_2) - i_2 d(B i_1 + C i_2) - \frac{1}{2} [i_1^2 dL + 2i_1 i_2 dM + i_2^2 dN] \quad (2)$$

Nel caso dove non vi sarebbe né spostamento né deformazione dei circuiti questa espressione si ridurrebbe a

$$-A i_1 d(A i_1 + B i_2) - B i_1 d i_2 - B i_2 d i_1 - C i_2 d i_2$$

o

$$-\frac{1}{2}d(Ai_1^2 + 2Bi_1i_2 + Ci_2^2) \quad (3)$$

essa sarà quindi il differenziale esatte della quantità

$$-\frac{1}{2}(Ai_1^2 + 2Bi_1i_2 + Ci_2^2)$$

Quando vi è uno spostamento di circuiti il differenziale di questa quantità è

$$-Ai_1di_1 - Bi_1di_2 - Ci_2di_2 - \frac{1}{2}i_1^2dA - i_1i_2dB - \frac{1}{2}i_2^2dC$$

e affinché l'espressione (2) resta il differenziale della stessa quantità (3) bisogna che si abbia identità tra questo differenziale e lo sviluppo dell'espressione (2) che è

$$-Ai_1di_1 - Bi_1di_2 - Bi_2di_1 - Ci_2di_2 - i_1^2dA - 2i_1i_2dB - i_2^2dC - \frac{1}{2}i_1^2dL - i_1i_2dM - \frac{1}{2}i_2^2dN$$

L'identificazione dà le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}dA &= dA + \frac{1}{2}dL \\ dB &= 2dB + dM \\ \frac{1}{2}dC &= dC + \frac{1}{2}dN \end{aligned}$$

che si riducono a

$$dA = -dL \quad dB = -dM \quad dC = -dN$$

da cui si ricava integrando e supponendo nulla la costante d'integrazione

$$A = -L \quad B = -M \quad C = -N$$

Pertanto i coefficienti che entrano nell'espressione delle forze elettromotrice di induzione sono, approssimati al segno, i coefficienti  $L, M, N$  dell'espressione del potenziale elettrodinamico del sistema di correnti. Questi ultimi vengono generalmente chiamati anche coefficienti di induzione;  $L$  e  $N$  sono *coefficienti di autoinduzione* e  $M$  il *coefficiente di mutua induzione* delle due correnti.

## 151. Teoria di Maxwell

La teoria dell'induzione nella forma che abbiamo appena dato, è stata sviluppata per la prima volta da Helmholtz nel suo articolo sulla *Conservazione della forza* e poco dopo da Lord Kelvin; quella di Maxwell è diversa e più completa sotto molti aspetti. Si può infatti, applicando le equazioni di Lagrange allo studio del movimento delle molecole del fluido imponderabile che Maxwell suppone governare la manifestazione dei fenomeni elettrici, ritrovare le leggi dell'Induzione e quella dell'Elettrodinamica.

**152.** Nei capitoli precedenti siamo stati portati a concludere che le ipotesi avanzate dallo scienziato inglese erano solo provvisorie, e che, pur soddisfacendo meglio l'ipotesi dei due fluidi, non risultava, nemmeno agli occhi del loro autore, una realtà più oggettiva. *Al contrario, tocchiamo qui, ciò che credo, il vero pensiero di Maxwell.*

All'inizio della sua teoria, Maxwell avanza le due seguenti ipotesi:

1° Le coordinate delle molecole del fluido imponderabile dipendono dalle coordinate delle molecole materiali dei corpi soggetti a fenomeni elettrici e anche dalle coordinate delle molecole materiali di ipotetici fluidi (elettricità positiva ed elettricità negativa) della teoria ordinaria dell'Elettricità; ma ignoriamo completamente la legge di questa dipendenza;

2° Il potenziale elettrodinamico di un sistema di correnti non è altro che la semi forza viva del fluido di Maxwell; è quindi energia cinetica.

**153.** Per introdurre nelle equazioni di Lagrange i parametri che definiscono la posizione di una molecola del fluido di Maxwell è necessario, seguendo la prima ipotesi, conoscere i parametri che definiscono la posizione di una molecola dei nostri ipotetici fluidi. Ora la posizione di una molecola di elettricità A che percorre un circuito lineare C è perfettamente determinata se si conosce da un lato la posizione del circuito nello spazio e dall'altro la lunghezza  $s$  dell'arco OA contata a partire da un'origine determinata O. Di conseguenza se  $x_1, x_2, x_3, \dots$  sono i parametri che definiscono la posizione delle molecole materiali che costituiscono il circuito, la posizione di una molecola del fluido imponderabile di Maxwell dipende dai parametri  $s, x_1, x_2, x_3, \dots$ .

Ma al posto di  $s$  possiamo prendere una funzione di quest'arco perché la conoscenza di questa funzione permetterebbe di determinare  $s$  e quindi la posizione di una molecola elettrica sul circuito C; Maxwell prende la quantità

$$y = \int_0^t i dt$$

che è, come dimostreremo, una funzione di  $s$ .

Infatti la sezione del conduttore, che può essere variabile da un punto all'altro, è una funzione  $\varphi(s)$  dell'arco  $s$ ; la velocità dell'elettricità, quoziente dell'intensità con la sezione del conduttore, è allora  $\frac{i}{\varphi(s)}$  e siccome questa velocità vale anche  $\frac{ds}{dt}$ , dobbiamo avere

$$\frac{ds}{dt} = \frac{i}{\varphi(s)}$$

da cui ricaviamo

$$\int i dt = \int \varphi(s) ds = \psi(s)$$

e

$$\int_0^t i dt = \psi(s) - \psi(s_0)$$

essendo  $s_0$  la posizione della molecola dell'elettricità all'origine del tempo. Di conseguenza  $y$  è funzione solo di  $s$  e possiamo assumere come parametri da cui dipende la posizione di una molecola del fluido imponderabile di Maxwell le quantità  $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

### 154. Applicazione al caso di due circuiti

Se indichiamo con  $i_1$  e  $i_2$  le intensità di corrente che attraversano questi circuiti e se poniamo

$$y_1 = \int_0^t i_1 dt \quad e \quad y_2 = \int_0^t i_2 dt$$

la posizione di una molecola del fluido imponderabile di Maxwell dipenderà dai parametri  $y_1$  e  $y_2$  e dagli  $n$  parametri  $x_1, \dots, x_n$  che definiscono la posizione delle molecole materiali dei conduttori. Di conseguenza il moto del sistema formato dalle due correnti sarà dato da un sistema di  $n + 2$  equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'_i} - \frac{dT}{dq_i} = Q_i$$

dove  $q_i$  è un qualunque dei parametri e  $Q$  il coefficiente di  $\delta q_i$  nell'espressione

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_i \delta q_i + \dots + Q_n \delta q_n$$

del lavoro corrispondente a uno spostamento virtuale del sistema.

**155.** L'energia cinetica  $T$  che entra in queste equazioni è la somma della forza semi forza viva  $T_1$  delle molecole materiali del sistema e dell'energia cinetica delle molecole del fluido imponderabile di Maxwell. Essendo quest'ultimo, per la seconda ipotesi, il potenziale elettrodinamico del sistema rispetto a se stesso, abbiamo nel caso considerato in cui sono presenti solo due correnti,

$$T = T_1 + \frac{1}{2} (Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2)$$

Il primo termine  $T_1$  di questa somma dipende solo dalle derivate  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  dei parametri  $x_1, x_1, \dots, x_n$  delle molecole materiali.

Dipendendo la posizione delle molecole del fluido imponderabile dai parametri  $y_1, y_2, x_1, x_2, \dots, x_n$ , l'insieme degli ultimi tre termini della somma precedente potrebbe dipendere da questi  $n + 2$  parametri e dalle loro derivate. Ma,  $L, M, N$  dipendono solo dalla forma e posizione relativa dei circuiti e sono funzioni solo di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; inoltre  $i_1$  e  $i_2$  sono, dagli integrali che definiscono  $y_1$  e  $y_2$ , le derivate  $y'_1$  e  $y'_2$  di queste quantità rispetto al tempo. Di conseguenza, l'energia cinetica delle molecole del fluido imponderabile dipende unicamente da  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e da  $y'_1$  e  $y'_2$ .

**156.** Ora occupiamoci del secondo membro delle equazioni. Se supponiamo la corrente nel circuito  $C_1$  mantenuto da una pila di forza elettromotrice  $E_1$ , la quantità di energia voltaica che essa fornisce nel tempo  $dt$  è  $E_1i_1dt$  o  $E_1\delta y_1$ . Ora nelle idee di Maxwell la forza elettromotrice è una forza che agisce sulle molecole del fluido imponderabile; di conseguenza  $E_1\delta y_1$  è un lavoro risultante dallo spostamento delle molecole di questo fluido.

Ma la forza elettromotrice della pila non è l'unica forza che agisce sulle molecole del fluido imponderabile; bisogna tenere conto anche della resistenza che l'ambiente oppone al loro movimento e il cui lavoro si ritrova sotto forma di calore nel conduttore. Essendo la quantità di calore così prodotta, dalla legge di Joule,  $R_1i_1^2dt$ , il lavoro compiuto dal fluido imponderabile è  $-R_1i_1^2dt$ , o  $-R_1i_1\delta y_1$ .

Abbiamo quindi per il lavoro del fluido imponderabile nel circuito  $C_1$

$$(E_1 - R_1i_1) \delta y_1$$

e per l'insieme dei due circuiti

$$(E_1 - R_1i_1) \delta y_1 + (E_2 - R_2i_2) \delta y_2$$

Il lavoro delle molecole materiali dipende solo dai parametri  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; li rappresenteremo con

$$X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + \dots + X_n\delta x_n$$

di modo che avremo per il lavoro compiuto in uno spostamento virtuale sia dalle molecole del fluido imponderabile sia dalle molecole materiali

$$(E_1 - R_1i_1) \delta y_1 + (E_2 - R_2i_2) \delta y_2 + X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + \dots + X_n\delta x_n$$

e bisognerà, in ciascuna delle equazioni di Lagrange, prendere come secondo membro il coefficiente dell'espressione precedente che si riferisce al parametro considerato.

### 157. Valori delle forze elettromotrici di induzione

L'equazione di Lagrange relativa al parametro  $y'_1$  è

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT_1}{dy'_1} + \frac{1}{2} \frac{d(Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2)}{dy'_1} \right) - \frac{dT}{dy_1} = E_1 - Ri_1$$

Ma  $T$  dipende non dipende da  $y_1$  poiché nessuno dei sei termini ne dipende; pertanto  $\frac{dT}{dy_1} = 0$ . Si ha pure  $\frac{dT_1}{dy_1} = 0$  poiché  $T_1$ , essendo l'energia cinetica delle molecole materiali non dipende da  $y_1$ . L'equazione precedente si riduce quindi a

$$\frac{d}{dt} (Li_1 + Mi_2) = E_1 - R_1 i_1$$

o

$$E_1 - \frac{d}{dt} (Li_1 + Mi_2) = R_1 i_1$$

La forza elettromotrice di induzione è quindi la derivata rispetto al tempo, cambiata di segno, di  $Li_1 + Mi_2$ . Questa è l'espressione a cui siamo arrivati con il metodo di Lord Kelvin.

Scrivendo l'equazione di Lagrange relativa al secondo parametro  $y_2$  troveremo per la forza elettromotrice sviluppata nel secondo circuito

$$-\frac{d}{dt} (Mi_1 + Ni_2)$$

### 158. Lavoro delle forze elettrodinamiche

Se prendiamo una delle equazioni di Lagrange relative ai parametri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  otterremo il lavoro delle forze elettrodinamiche per uno spostamento corrispondente all'incremento  $\delta x_i$  del parametro considerato.

Infatti, osservando che  $Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2$  non dipende dalla derivata  $x'_i$ , che  $T_1$  non dipende da  $x_i$  e che  $i_1$  e  $i_2$  non dipendono né da  $x'_i$  né da  $x_i$  abbiamo

$$\frac{d}{dt} \frac{dT_1}{dx'_1} - \frac{1}{2} \left( i_1^2 \frac{dL}{dx_i} + 2i_1i_2 \frac{dM}{dx_i} + i_2^2 \frac{dN}{dx_i} \right) = X_i$$

Se assumiamo inoltre che nell'istante considerato il sistema sia a riposo,  $T_1$  sarà nullo, e avremo per il lavoro derivante da uno spostamento virtuale,

$$X_i \delta x_i = -\frac{1}{2} \left( i_1^2 \delta L + 2i_1i_2 \delta M + i_2^2 \delta N \right)$$

Ma questo lavoro è quello delle forze esterne che agiscono sulle molecole materiali del sistema; quello delle forze elettrodinamiche è di segno opposto. È quindi uguale alla variazione della funzione

$$\frac{1}{2} \left( Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2 \right)$$

che è, come deve essere, il potenziale elettrodinamico del sistema rispetto a se stesso.

**159.** Cerchiamo ora il lavoro delle forze elettrodinamiche esercitate dalla corrente  $C_2$ , supposta fissa, sul circuito  $C_1$ .

Il circuito  $C_2$  non si deforma,  $\delta N$  è nullo e il lavoro delle forze elettrodinamiche si riduce a

$$\frac{1}{2} \left( i_1^2 \delta L + 2i_1i_2 \delta M \right)$$

Ma il primo termine di questa somma riguarda l'azione che la corrente  $C_1$  esercita su se stessa. Di conseguenza, il lavoro delle forze elettrodinamiche dovute all'azione della corrente  $C_2$  sul circuito  $C_1$  ha per espressione  $i_1i_2\delta M$ . Inoltre  $Mi_1i_2$ , potenziale elettrodinamico della corrente  $C_1$  rispetto alla corrente  $C_2$ , vale (129)

$$Mi_1i_2 = i_1 \int (l\alpha + m\beta + n\gamma) d\omega$$

quando  $C_1$  si sposta in un mezzo non magnetico, o più in generale

$$Mi_1i_2 = i_1 \int (la + mb + nc) d\omega$$

quando  $C_1$  si muove in un mezzo magnetico in un punto le cui componenti dell'induzione magnetica sono  $a, b, c$ ; avremo quindi per il lavoro le forze elettrodinamiche che si esercitano tra  $C_1$  e  $C_2$

$$i_1\delta \int (la + mb + nc) d\omega$$

### 160. Espressione delle forze elettrodinamiche

Se indichiamo con  $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$  le componenti della forza elettrodinamica dovuta all'azione della corrente  $C_2$  su un elemento  $x, y, z$  del circuito  $C_1$ , il lavoro di queste forze quando l'elemento si sposta di  $\delta x, \delta y, \delta z$  sarà

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) d\tau$$

pertanto il lavoro delle forze elettrodinamiche che agiscono su  $C_1$  sarà, quando l'intero circuito si sposta o si deforma

$$\int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

essendo l'integrazione presa lungo il circuito  $C_1$ . Uguagliando questa espressione del lavoro a quella trovata in precedenza, otteniamo la relazione

$$\int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = i_1\delta \int (la + mb + nc) d\omega \quad (1)$$

di cui valuteremo il secondo membro.

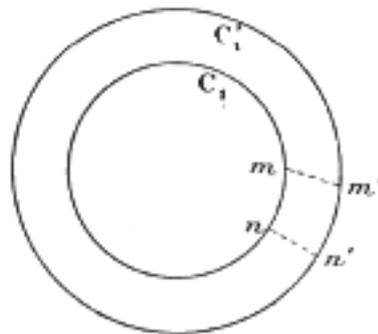


Fig. 32.

Siano  $C_1$  (fig. 32) la posizione del circuito  $C_1$  e  $C_1'$  la sua posizione finale. Possiamo da queste due posizioni far passare una superficie  $A$  e prendere come campo di integrazione di

$$\int (la + mb + nc) d\omega$$

l'area limitata su questa superficie dalla curva  $C_1$ . La variazione di questo integrale quando il circuito passa da  $C_1$  a  $C_1'$  è quindi il valore di questo stesso integrale esteso all'area compresa tra le due curve. Per trovare questo valore consideriamo un elemento  $mn$  della corrente  $C_1$  la cui posizione dopo lo spostamento è  $m'n'$ . La figura  $mnm'n'$  può essere considerata come un parallelogramma il cui lato  $mn$  ha per proiezioni  $dx, dy, dz$  e il lato  $mn'$  uguale allo spostamento

$\delta x, \delta y, \delta z$ ; abbiamo quindi per le aree delle proiezioni di questo parallelogramma sui piani coordinati

$$\begin{aligned}ld\omega &= \delta y dz - \delta z dy \\md\omega &= \delta z dx - \delta x dz \\nd\omega &= \delta x dy - \delta y dx\end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$\delta \int (la + mb + nc) d\omega = \int a (\delta y dz - \delta z dy) + b (\delta z dx - \delta x dz) + c (\delta x dy - \delta y dx)$$

Portando questo valore nell'uguaglianza (1) viene

$$\int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = i_1 \int (cdy - bdz) \delta x + (adz - cdx) \delta y + (bdx - ady) \delta z$$

ciò che ci dà identificandoci

$$\begin{aligned}Xd\tau &= i_1 (cdy - bdz) \\Yd\tau &= i_1 (adz - cdx) \\Zd\tau &= i_1 (bdx - ady)\end{aligned}$$

Ma si sa che

$$ud\tau = i_1 dx \quad vd\tau = i_1 dy \quad wd\tau = i_1 dz$$

di conseguenza, le tre precedenti equazioni si possono scrivere

$$\begin{cases} X = cv - bw \\ Y = aw - cu \\ Z = bu - av \end{cases}$$

### 161. Caso di un numero qualunque di correnti. Forze elettrodinamiche

Le formule precedenti si applicano al caso in cui un numero qualunque di correnti  $C_1, C_2, \dots, C_n$  agiscono sull'elemento considerato del circuito  $C_1$ . Infatti, chiamiamo  $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, \dots, c_n$  le componenti dell'induzione magnetica dovuta alle diverse correnti nel punto in cui si trova l'elemento di  $C_1$ . La forza elettrodinamica prodotta dall'insieme delle correnti è la risultante delle forze prodotte da ciascuno di essi; la sua componente lungo l'asse  $x$  è pertanto

$$Z = c_2v - b_2w + c_3v - b_3w + \dots + c_nv - b_nw$$

o

$$X = (c_2 + c_3 + \dots + c_n) v - (b_2 + b_3 + \dots + b_n) w$$

o, infine, indicando con  $a, b, c$  le componenti lungo i tre assi della risultante delle induzioni magnetiche dovute alle correnti  $C_2, C_3, \dots, C_n$

$$X = cv - bw$$

Possiamo anche tenere conto della forza elettrodinamica dovuta alla corrente  $C_1$  stessa. Per fare ciò scomponiamo questa corrente in due parti, una comprendente solo l'elemento considerato, l'altra il resto del circuito. Si può trascurare l'azione della prima parte su se stessa e si è allora riportati alla ricerca della forza elettrodinamica dovuta all'insieme delle  $n$  correnti  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ . Se chiamiamo quindi  $a, b, c$  le componenti dell'induzione magnetica dovute a tutte queste correnti abbiamo ancora per la componente lungo l'asse  $x$

$$X = cv - bw$$

Le formule (2) sono pertanto generali.

## 162. Forze elettromagnetiche di induzione

Abbiamo trovato che, quando vi è una sola corrente  $C_2$  posta in presenza della corrente  $C_1$ , la forza elettromotrice totale di induzione sviluppata nel circuito  $C_1$  è

$$E = -\frac{d}{dt}(Li_1 + Mi_2)$$

Il termine  $\frac{dLi_1}{dt}$  dipende solo dall'azione della corrente  $C_1$  su se stessa, per cui la forza elettromotrice di induzione dovuta alla sola corrente  $C_2$  è data da  $\frac{dMi_2}{dt}$ , derivata che scriveremo sotto un'altra forma.

La variazione  $\delta Mi_2$  della quantità  $Mi_2$  quando il circuito  $C_1$  si sposta e le intensità delle correnti variano, può essere considerata come la somma della variazione risultante dallo spostamento, a parità delle intensità, e della variazione dovuta al cambiamento delle intensità nei circuiti supposti fissi. Ora abbiamo dimostrato (157) che la variazione di  $Mi_1i_2$  dovuta allo spostamento relativo dei due circuiti nei quali le intensità mantengono gli stessi valori, è

$$\delta Mi_1i_2 = i_1 \int a(\delta ydz - \delta zdy) + b(\delta zdx - \delta xdz) + c(\delta xdy - \delta ydx)$$

di conseguenza, avremo per la variazione corrispondente di  $Mi_2$ , l'integrale del secondo membro.

Per avere la variazione di  $Mi_2$  risultante dal cambiamento delle intensità prendiamo  $Mi_1i_2$  nella forma

$$Mi_1i_2 = i_1 \int_{C_1} Fdx + Gdy + Hdz$$

Poiché i circuiti non si deformano né si spostano, il contorno di integrazione rimane lo stesso e la variazione di  $Mi_2$  si riduce a

$$\int_{C_1} \delta Fdx + \delta Gdy + \delta Hdz$$

Avremo quindi per la variazione totale di  $Mi_2$

$$\int a(\delta ydz - \delta zdy) + b(\delta zdx - \delta xdz) + c(\delta xdy - \delta ydx) + \int \delta Fdx + \delta Gdy + \delta Hdz$$

e di conseguenza, per la forza elettromotrice di induzione

$$-\frac{dMi_2}{dt} = -\int a(y'dz - z'dy) + b(z'dx - x'dz) + c(x'dy - y'dx) - \int \frac{dF}{dt}dx + \frac{dG}{dt}dy + \frac{dH}{dt}dz$$

o ancora

$$-\frac{dMi_2}{dt} = \int \left( cy' - bz' - \frac{dF}{dt} \right) dx + \left( az' - cx' - \frac{dG}{dt} \right) dy + \left( bx' - ay' - \frac{dH}{dt} \right) dz$$

**163.** Se indichiamo con  $P, Q, R$  le componenti lungo i tre assi della forza elettromotrice di induzione per unità di lunghezza, la forza elettromotrice nel circuito  $C_1$  è data dall'integrale

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy + Rdz$$

Identificando con l'espressione precedente della forza elettromotrice otterremo tre relazioni di cui la prima è

$$\int Pdx = \int \left( cy' - bz' - \frac{dF}{dt} \right) dx$$

Differenziando, avremo

$$P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt} \quad (1)$$

ma è evidente che possiamo aggiungere al secondo membro di quest'ultima relazione la derivata parziale  $-\frac{d\psi}{dt}$  di una funzione uniforme  $-\psi$  poiché, integrando, l'integrale relativo a questo termine sarà nullo e la relazione (1) sarà ancora soddisfatta. Abbiamo quindi per le componenti della forza elettromotrice di induzione per unità di lunghezza

$$\begin{cases} P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q = az' - cx' - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R = bx' - ay' - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (2)$$

**164.** Mostriamo ora che queste equazioni sono ancora applicabili al caso in cui un qualsiasi numero di correnti  $C_2, C_3, \dots, C_n$  sono in presenza della corrente  $C_1$ .

La forza elettromotrice di induzione sviluppata in  $C_1$  da tutte le  $n - 1$  altre correnti è uguale alla somma delle forze elettromotrici sviluppate da ciascuna di esse; abbiamo quindi per la componente  $P$ ,

$$P = c_2y' - b_2z' - \frac{dF_2}{dt} - \frac{d\psi_2}{dx} + c_3y' - b_3z' - \frac{dF_3}{dt} - \frac{d\psi}{dx} + \dots + c_ny' - b_nz' - \frac{dF_n}{dt} - \frac{d\psi_n}{dx}$$

o

$$P = y' \sum c - z' \sum b - \frac{d \sum F}{dt} - \frac{d \sum \psi}{dx}$$

Ora  $\sum c$  e  $\sum b$  sono le componenti lungo due degli assi dell'induzione magnetica nel punto considerato su  $C_1$ ;  $\sum F$  è la componente del momento elettromagnetico nello stesso punto; quanto a  $\sum \psi$  è una funzione uniforme delle coordinate. Di conseguenza la prima delle equazioni del gruppo (2) si applica al caso di un numero qualsiasi di correnti purché si prendano per  $b, c$  e  $F$  i valori di queste quantità dovuti a tutte le correnti agenti. Si vedrà allo stesso modo che sono applicabili anche le altre due equazioni.

**165.** Possiamo anche tener conto dell'azione della corrente  $C_1$  su se stessa. Possiamo infatti considerare il circuito  $C_1$  come formato da due porzioni, una ridotta all'elemento circuitale di cui cerchiamo le componenti della forza elettromotrice, l'altra comprendente il resto del circuito. Quest'ultima porzione può essere confusa con il circuito  $C_1$  stesso, per cui se trascuriamo l'induzione dell'elemento su se stesso l'induzione proviene dagli  $n$  circuiti  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Le componenti della forza elettromotrice saranno quindi date dalle formule (2) dove  $a, b, c, F, G, H$  saranno i valori dovuti a tutte le correnti.

### 166. Significato di $\psi$

La funzione  $\psi$  è qualsiasi funzione di coordinate soggetta alla sola condizione di essere uniforme. Maxwell ammette che è il potenziale elettrostatico risultante dalle masse elettriche che può esistere nel campo.

Questa ipotesi dovrebbe essere verificata sperimentalmente mediante l'accordo tra i valori misurati delle forze di induzione elettromotrice in circuito aperto e i valori forniti dalle equazioni (2) dove  $\psi$  sarebbe dato dall'esperimento e le quantità  $a, b, c, F, G, H$  dalle formule

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A \\ b &= \beta + 4\pi B \\ c &= \gamma + 4\pi C \end{aligned}$$

e

$$F = \int \frac{u d\tau}{r} \quad G = \int \frac{v d\tau}{r} \quad H = \int \frac{w d\tau}{r}$$

Tuttavia è ancora consentito prendere per  $\psi$  il potenziale elettrostatico perché le quantità  $F, G, H$  potrebbero essere determinate solo supponendo che siano legate dall'equazione differenziale

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0$$

e siamo liberi di abbandonare questa ipotesi. Se non avessimo introdotto questa ipotesi, avremmo trovato per  $F, G, H$  valori della forma

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau + \frac{d\chi}{dx}$$

dove  $\chi$  è una funzione arbitraria delle coordinate, e per le componenti  $P, Q, R$  della forza elettromotrice per unità di lunghezza

$$P = cy' - bz' - \int \frac{du}{dt} \frac{d\tau}{r} - \frac{d^2\chi}{dxdt} - \frac{d\psi}{dx}$$

$$Q = az' - cx' - \int \frac{dv}{dt} \frac{d\tau}{r} - \frac{d^2\chi}{dydt} - \frac{d\psi}{dy}$$

$$R = bx' - ay' - \int \frac{dw}{dt} \frac{d\tau}{r} - \frac{d^2\chi}{dzdt} - \frac{d\psi}{dz}$$

È quindi sempre possibile, scegliendo opportunamente la funzione arbitraria  $\chi$ , garantire che la funzione che entra in queste equazioni e le equazioni (2) rappresenti il potenziale elettrostatico.



# 10. Equazioni del campo magnetico

## 167. Equazioni del campo magnetico.

Riassumiamo le equazioni che legano tra loro le componenti in un punto dell'induzione magnetica, della forza e del momento elettromagnetico, della forza elettromotrice di induzione e della velocità dell'elettricità.

Nel § 103 abbiamo visto, che se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono le componenti della forza magnetica in un punto di un mezzo magnetico il cui coefficiente di permeabilità è  $\mu$ , le componenti dell'induzione magnetica nello stesso punto sono date dalle equazioni

$$\begin{cases} a = \mu\alpha \\ b = \mu\beta \\ c = \mu\gamma \end{cases} \quad (I)$$

Se per il punto considerato passa un flusso di elettricità, le componenti  $u, v, w$  della velocità di questo flusso si possono dedurre dalle componenti della forza magnetica mediante le relazioni stabilite nel § 118:

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (II)$$

Quanto alle componenti  $F, G, H$  del momento elettromagnetico esse sono legate (§131) a quelle dell'induzione magnetica dalle equazioni differenziali

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (III)$$

Ma poiché  $a, b, c$  sono i prodotti di  $\alpha, \beta, \gamma$  per un fattore costante  $\mu$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  dipendono da  $u, v, w$ , le componenti  $F, G, H$  del momento elettromagnetico sono pure esse funzioni di  $u, v, w$ . Da quanto detto ai § 137 e §166 queste funzioni hanno per espressioni:

$$\begin{cases} F = \mu \int \frac{u}{r} d\tau + \frac{dX}{dx} \\ G = \mu \int \frac{v}{r} d\tau + \frac{dX}{dy} \\ H = \mu \int \frac{w}{rw} d\tau + \frac{dX}{dy} \end{cases} \quad (IV)$$

Infine la forza elettromotrice risultante dall'induzione elettromagnetica e dalla masse elettriche statiche ha per componenti, come mostrato al § 163,

$$\begin{cases} P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q = az' - cx' - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R = bx' - ay' - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (V)$$

## 168. Equazioni della corrente di conduzione

Nelle formule (III),  $u, v, w$  designano le componenti della velocità dell'elettricità senza distinzione del modo di movimento: conduzione o spostamento. Nel caso in cui vi sia una corrente di

conduzione, queste componenti devono inoltre soddisfare le equazioni della legge di Ohm. Nel § 87 abbiamo visto che se  $C$  indica la conducibilità elettrica del mezzo e  $X$  la variazione per unità di lunghezza della proiezione lungo l'asse  $x$  delle forze elettromotrici derivanti da qualsiasi causa diversa da una differenza di potenziale statico, abbiamo per la prima di queste equazioni,

$$\frac{u}{C} = -\frac{d\psi}{dx} + X$$

Quando si suppone che queste forze elettromotrici siano dovute solo all'induzione esercitata dalle masse magnetiche e dalle correnti che variano o che si spostano nel campo, il secondo membro di quest'ultima equazione è uguale a  $P$ . Di conseguenza, abbiamo allora per le tre componenti della velocità dell'elettricità in una corrente di conduzione

$$\begin{cases} u = CP \\ v = CQ \\ w = CR \end{cases} \quad (V)$$

### 169. Equazioni delle correnti di spostamento

Le equazioni precedenti non sono applicabili alle correnti di spostamento, poiché queste non seguono la legge di Ohm. Quanto alle equazioni (III), esse devono essere soddisfatte poiché, come abbiamo già detto (118), Maxwell ammette che le correnti di spostamento obbediscono alle leggi elettromagnetiche ed elettrodinamiche di Ampère. Ma oltre a queste ultime equazioni, ve ne sono altre tre che collegano le componenti della velocità dell'elettricità, in una corrente di questo tipo, alle componenti della forza elettromotrice.

Abbiamo visto, infatti (72), che le componenti dello spostamento elettrico sono date da tre equazioni, la prima delle quali è

$$f = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} - X \right)$$

avendo  $X$  in questa formula lo stesso significato del paragrafo precedente. Se quindi ammettiamo che le forze elettromotrici siano dovute unicamente ad una differenza di potenziale statica e all'induzione dei magneti e delle correnti poste nel campo, il fattore tra parentesi nell'espressione di  $f$  è uguale a  $-P$ ; di conseguenza, abbiamo allora,

$$\begin{cases} f = \frac{K}{4\pi} P \\ g = \frac{K}{4\pi} Q \\ h = \frac{K}{4\pi} R \end{cases} \quad (VII)$$

Derivando queste equazioni rispetto al tempo, si ha per le componenti  $u, v, w$  della velocità di spostamento elettrico

$$\begin{cases} u = \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} \\ v = \frac{K}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \\ w = \frac{K}{4\pi} \frac{dR}{dt} \end{cases} \quad (VIII)$$

### 170. Equazioni delle correnti in un mezzo imperfettamente isolante

Il gruppo di equazioni (VI) si applica ai mezzi conduttori come i metalli; il gruppo di equazioni (VIII) si applica invece a mezzi perfettamente isolanti. Quando il corpo è imperfettamente isolante, Maxwell ammette che la *corrente elettrica vera*, da cui dipendono i fenomeni elettromagnetici, ha come componenti la somma delle componenti della corrente di conduzione e della corrente di spostamento; quindi abbiamo in questo caso

$$\begin{cases} u = CP + \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} \\ v = CQ + \frac{K}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \\ w = CR + \frac{K}{4\pi} \frac{dR}{dt} \end{cases} \quad (IX)$$

Osserviamo che l'ipotesi di Maxwell solleva una difficoltà. Avendo infatti il mezzo proprietà intermedie tra quelle dei conduttori e degli isolanti, la forza elettromotrice che produce la corrente deve vincere due tipi di resistenza: una analoga alla resistenza  $1/c$  dei metalli, l'altra del tipo che oppone un isolante. Sembra quindi che, contrariamente alle opinioni di Maxwell, l'intensità della corrente  $e$ , di conseguenza, le quantità  $u, v, w$  debbano quindi essere minori che in un mezzo conduttore o in un mezzo perfettamente isolante.

**171.** Il signor Potier ha sostituito l'ipotesi di Maxwell con un'ipotesi più razionale. Egli ammette che la forza elettromotrice in un punto è la somma di quella che dà luogo alla corrente di conduzione e di quella che produce lo spostamento. Abbiamo allora, ricavando dalle equazioni (VI) e (VII) i valori delle componenti della forza elettromotrice e sommando

$$\begin{cases} P = \frac{u}{C} + \frac{4\pi}{k} f \\ Q = \frac{v}{C} + \frac{4\pi}{k} g \\ R = \frac{w}{C} + \frac{4\pi}{k} h \end{cases} \quad (X)$$

**172.** Le formule (IX) e (X) si riducono a quelle delle correnti di conduzione, le prime per  $K = 0$ , le seconde per  $K = \infty$ . Un conduttore deve essere considerato, secondo Maxwell, come un dielettrico di potere induttore nullo, e, secondo M. Potier, come un dielettrico di potere induttore infinito.

La conseguenza dell'ipotesi del signor Potier è facilmente interpretabile nella teoria delle cellule.

In questa teoria, infatti, immaginiamo un dielettrico perfetto come formato da celle perfettamente conduttrici separate tra loro da intervalli perfettamente isolanti.

Cosa accadrà allora per un corpo che si trova a metà tra i dielettrici e i conduttori, cioè per un dielettrico imperfetto?

Le formule di Maxwell e quella di M. Potier danno due risposte diverse a questa domanda.

Adottiamo le formule di Maxwell? Ciò significa presupporre che gli intervalli che separano le celle non siano più perfettamente isolanti ma che la loro conducibilità specifica  $C$  non sia più nulla.

**173.** Adottiamo invece le formule del signor Potier; ciò equivale a supporre che le celle conduttrici non siano più perfettamente conduttrici e che la loro conducibilità  $C$  non sia più infinita.

È improbabile che la realtà sia così semplice come suppongono Maxwell e M. Potier. Forse dovremmo adottare una combinazione delle due ipotesi: celle imperfettamente conduttrici, separate da intervalli imperfettamente isolanti.

Tutto ciò ha poca importanza; tutte queste ipotesi possono essere considerate solo in prima approssimazione, adeguate allo stato attuale della scienza; e allo stato attuale è solo nel nostro interesse considerare perfetti i conduttori o i dielettrici ordinari.



# 11. Teoria elettromagnetica della luce

## 174. Conseguenze della teoria di Maxwell

Dalle varie teorie che abbiamo esposto nei Capitoli precedenti, emerge chiaramente che la preoccupazione costante di Maxwell è quella di trovare una spiegazione ai fenomeni elettrici ed elettromagnetici, generalmente attribuiti ad azioni compiute a distanza, attraverso il movimento di un ipotetico fluido che riempie lo spazio. Abbiamo potuto constatare che Maxwell aveva raggiunto solo imperfettamente il suo obiettivo; in particolare abbiamo visto nel capitolo VI che, se è possibile rendere conto delle attrazioni e repulsioni elettrostatiche mediante le pressioni e le tensioni di un fluido che riempie i dielettrici, le proprietà che devono poi essere attribuite a tale fluido sono incompatibili con quelle che Maxwell suppone in altre parti del suo lavoro. Pertanto, nonostante gli sforzi di Maxwell, non disponiamo ancora di una spiegazione meccanica completa di questi fenomeni; tuttavia il lavoro di questo fisico è di capitale importanza: dimostra la possibilità di una tale spiegazione.

**175.** Ma lasciamo da parte le poche contraddizioni che abbiamo notato nell'opera di Maxwell e concentriamoci più specificatamente sulla teoria da lui proposta per spiegare l'Elettromagnetismo e l'Induzione e che abbiamo esposto nel Capitolo IX. Una delle conseguenze più importanti di questa teoria, e questa conseguenza da sola merita tutta la nostra ammirazione, è l'identità delle proprietà essenziali dell'etere che, secondo Fresnel, trasmette la radiazione luminosa e del fluido che Maxwell suppone presieda alle azioni elettromagnetiche. Come osserva quest'ultimo, questa identità di proprietà è una conferma dell'esistenza di un fluido che funge da veicolo all'energia.

“Riempire lo spazio con un nuovo mezzo ogni volta che si deve spiegare un nuovo fenomeno non sarebbe un procedimento molto filosofico; al contrario, se, essendo pervenuti indipendentemente, attraverso lo studio di due diverse branche della scienza, all'ipotesi di un mezzo, le proprietà che bisogna attribuire ad esso per spiegare i fenomeni elettromagnetici risultano essere della stessa natura di quelle che dobbiamo attribuire all'etere luminifero per spiegare i fenomeni della luce, le nostre ragioni per credere nell'esistenza fisica di un tale mezzo saranno seriamente confermate.» Maxwell. *Trattato sull'elettricità*, vol. II, § 781.

**176.** L'etere e il fluido di Maxwell godono delle stesse proprietà, la luce deve essere considerata un fenomeno elettromagnetico e il movimento vibratorio che produce sulla nostra retina, l'impressione di intensità luminosa deve derivare da periodiche perturbazioni del campo magnetico. Se così è, la spiegazione dei fenomeni luminosi deve essere dedotta dalle equazioni generali di questo campo. È a questa spiegazione che abbiamo dato il nome di *Teoria Elettromagnetica della Luce*.

Questa teoria porta necessariamente a relazioni tra i valori delle costanti ottiche e delle costanti elettriche di uno stesso corpo. Se queste relazioni saranno soddisfatte numericamente dai dati sperimentali, costituiranno altrettante verifiche indirette ma tuttavia molto conclusive della teoria. Una delle migliori verifiche di questo genere è il soddisfacente accordo che vediamo tra i valori trovati da Foucault, Fizeau e M. Cornu per la velocità di propagazione della luce e quello che si deduce dalla teoria elettromagnetica. Cerchiamo quindi la formula che esprime questa velocità in funzione delle costanti elettriche misurabili del mezzo in cui avviene la propagazione.

**177. Equazioni della propagazione di una perturbazione magnetica in un dielettrico**

Essendo tutti i corpi trasparenti degli isolanti più o meno perfetti, se escludiamo le soluzioni elettrolitiche, limitiamo dapprima il nostro studio alla considerazione dei dielettrici. Ammettiamo inoltre che le molecole materiali del mezzo che propagano i disturbi magnetici siano a riposo.

Per effetto di quest'ultima ipotesi, le componenti  $x', y', z'$  della velocità di un punto materiale sono nulle e le equazioni (V) del § 167 si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{aligned}$$

Essendo il potenziale elettrostatico dovuto a masse elettriche che non variano né in grandezza né in posizione, questa quantità e le sue derivate parziali rispetto a  $x, y, z$ , sono indipendenti dal tempo; quindi derivando le equazioni precedenti rispetto a  $t$ , otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -\frac{d^2F}{dt^2} \\ \frac{dQ}{dt} &= -\frac{d^2G}{dt^2} \\ \frac{dR}{dt} &= -\frac{d^2H}{dt^2} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Supponendo che la perturbazione magnetica avvenga in un mezzo dielettrico, le componenti  $u, v, w$  della velocità dell'elettricità sono legate alle componenti della forza elettromotrice mediante equazioni (VIII) da cui si ricavano le derivate di  $P, Q, R$  rispetto a  $t$ . Trasportando i valori di queste derivate nelle equazioni precedenti abbiamo

$$\left\{ \begin{aligned} 4\pi u &= -K \frac{d^2F}{dt^2} \\ 4\pi v &= -K \frac{d^2G}{dt^2} \\ 4\pi w &= -K \frac{d^2H}{dt^2} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Per avere le equazioni differenziali che danno  $F, G, H$  in funzione del tempo, dobbiamo esprimere  $u, v, w$  in funzione di  $F, G, H$  e le derivate di queste quantità. Per fare ciò, affrontiamo i gruppi di equazioni (I), (II) e (III).

Le equazioni (I) e (III) ci danno

$$\begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned}$$

Per mezzo di queste equazioni calcoliamo le derivate di  $\alpha, \beta, \gamma$  rispetto a  $x, y, z$  ed inseriamo i valori così trovati nelle equazioni (II); otteniamo

$$\begin{aligned} 4\pi\mu u &= \frac{dJ}{dx} - \Delta F \\ 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy} - \Delta G \\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz} - \Delta H \end{aligned}$$

dove  $J$  indica la somma delle derivate parziali:

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$$

L'eliminazione di  $u, v, w$  tra queste ultime equazioni e le equazioni (2) ci porta alle equazioni differenziali cercate.

$$\begin{cases} K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} = \Delta F - \frac{dJ}{dx} \\ K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} = \Delta G - \frac{dJ}{dy} \\ K\mu \frac{d^2 H}{dt^2} = \Delta H - \frac{dJ}{dz} \end{cases} \quad (A)$$

Sotto questa forma tali equazioni sono simili a quelle del movimento di una molecola di un mezzo elastico<sup>1</sup> e conseguentemente a quelle del movimento di una molecola di etere; si tratta di una prima conferma dell'ipotesi sulla natura elettromagnetica delle vibrazioni luminose.

Essendo queste equazioni lineari e a coefficienti costanti, le derivate rispetto a una variabile qualsiasi delle funzioni  $F, G, H$  che le soddisfano, sono anche soluzioni di queste equazioni; inoltre, è sempre lo stesso per qualsiasi combinazione lineare di queste derivate. Di conseguenza le componenti  $a, b, c$  dell'induzione magnetica, legate alle componenti del momento elettromagnetico dalle relazioni (III), soddisfano le equazioni (A). Inoltre in questo caso queste ultime si semplificano perché la quantità  $J$  è allora

$$J = \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}$$

e sappiamo che questa somma di derivate parziali è nulla (102). Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} K\mu \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\Delta a \\ K\mu \frac{d^2 b}{dt^2} &= -\Delta b \\ K\mu \frac{d^2 c}{dt^2} &= -\Delta c \end{aligned}$$

Quanto alle componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza magnetica, anch'esse devono soddisfare le equazioni (A) poiché differiscono da  $a, b, c$  solo per un fattore costante; la somma  $J$  delle derivate parziali rimane quindi nelle equazioni.

Infine, essendo le componenti  $u, v, w$  della velocità di spostamento funzioni componenti lineari e omogenee delle derivate di  $\alpha, \beta, \gamma$  sono pure soluzioni delle equazioni (A). Essendo per l'ipotesi dell'incompressibilità dell'elettricità espressa dalla condizione

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

$J$  non è più presente nelle equazioni.

**179.** Inoltre se come suppose Maxwell, le componenti  $F, G, H$  del momento elettromagnetico soddisfano all'identità

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0$$

le equazioni (A) e quelle che danno le componenti della forza magnetica non contengono  $J$ . Ma l'abbandono di questa ipotesi non modifica in alcun modo i risultati a cui porta la teoria elettromagnetica della luce perché  $J$  scompare quando si assumono perturbazioni periodiche della campo magnetico.

<sup>1</sup>Si veda *Teoria matematica della luce*, p. 42.

Infatti, deriviamo le equazioni (A) rispetto a  $x, y, z$ , e sommiamo; otteniamo dopo la semplificazione

$$K\mu \frac{d^2 J}{dt^2} = 0$$

$J$  deve quindi essere una funzione lineare del tempo, oppure una costante, oppure zero; lo stesso vale per le derivate di  $J$  rispetto a  $x, y, z$ . Ora, se  $F, G, H$  sono funzioni periodiche del tempo, anche  $J$  e le sue derivate sono funzioni periodiche; di conseguenza queste quantità non possono essere né funzioni di primo grado in  $t$ , né costanti; sono quindi nulle.

### 180. Caso delle onde piane

Supponiamo che i fenomeni elettromagnetici che avvengono nel dielettrico dipendano solo dal tempo e dalla coordinata  $z$  del punto considerato. In questo caso tali fenomeni sono, nello stesso istante, identici per tutti i punti di un piano parallelo al piano  $xy$ ; diremo allora che le perturbazioni magnetiche formano *onde piane*.

Le componenti  $F, G, H$  del momento elettromagnetico non dipendono né da  $x$  né da  $y$ , e quindi le loro derivate rispetto a  $x$  e  $y$  sono nulle e le equazioni (A) si riducono a

$$\begin{cases} K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} \\ K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} = \frac{d^2 G}{dz^2} \\ K\mu \frac{d^2 H}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (B)$$

Quest'ultima equazione mostra che nel caso in cui le perturbazioni sono periodiche, la componente  $H$  è nulla. Pertanto il momento elettromagnetico si trova nel piano dell'onda. Lo stesso vale per le altre grandezze, velocità dell'elettricità, forza elettromagnetica, ecc., le cui componenti soddisfano equazioni simili alle (B). Possiamo quindi dire che, come le vibrazioni dell'etere nella teoria ordinaria della luce, le perturbazioni elettromagnetiche periodiche sono trasversali.

### 181. Velocità di propagazione di un'onda periodica piana

Se poniamo

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$$

le prime due delle equazioni (B) divengono

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = V^2 \frac{d^2 F}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 G}{dt^2} = V^2 \frac{d^2 G}{dz^2}$$

In questa forma, queste equazioni sono identiche a quelle che danno le componenti dello spostamento di una molecola di un mezzo elastico nel caso di un movimento per onde piane trasversali. Possiamo quindi considerare le perturbazioni elettromagnetiche come propagantisi con velocità uguale a

$$\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$$

## 182. Valore di questa velocità nel vuoto

Essendo il coefficiente di permeabilità  $\mu$  del vuoto uguale a 1 nel sistema di misura elettromagnetico, la velocità di propagazione delle onde piane in questo mezzo è uguale a  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ , con  $K$  espresso nello stesso sistema. Troviamo il valore di questa quantità.

Una delle componenti dello spostamento elettrico è data dalla formula

$$f = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx}$$

Il potere induttore specifico non avendo dimensioni nel sistema elettrostatico, le dimensioni dello spostamento in questo sistema sono quelle del quoziente di un potenziale per una lunghezza e, di conseguenza, quella del quoziente di una quantità di elettricità per il quadrato di una lunghezza. Ne consegue che se si passa da un sistema di misure a un altro in cui l'unità di lunghezza ha mantenuto lo stesso valore del primo, i numeri che misurano lo spostamento in entrambi i sistemi stanno nello stesso rapporto di quelli che esprimono una stessa quantità di elettricità. Se quindi chiamiamo il rapporto tra l'unità elettromagnetica di quantità di elettricità e l'unità elettrostatica, il numero che esprime sia una quantità di elettricità sia uno spostamento nel primo sistema è uguale al prodotto di  $\frac{1}{v}$  per il numero che misura la stessa grandezza nel sistema elettrostatico. Sappiamo d'altronde che il rapporto tra le unità di forza elettromotrice nei due sistemi di misura elettrica è inverso a quello delle unità di quantità; pertanto il numero che esprime  $\frac{d\psi}{dx}$  nel sistema elettromagnetico è il prodotto di  $v$  per la misura di questa quantità per mezzo dell'unità elettrostatica. Ne risulta che il valore del quoziente di  $f$  per  $\frac{d\psi}{dx}$  e, di conseguenza, il valore di  $K$  si trovano moltiplicati per  $\frac{1}{v^2}$  quando si passa dal sistema elettrostatico a quello elettromagnetico. Il potere induttore specifico del vuoto è 1 nel sistema elettrostatico e quindi il suo valore è  $\frac{1}{v^2}$  nel sistema elettromagnetico.

Se portiamo questo valore di  $K$  nell'espressione della velocità, abbiamo

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2}}} = v$$

la velocità di propagazione di una perturbazione elettromagnetica è quindi uguale al rapporto  $v$  delle unità di quantità di elettricità nei due sistemi di misura elettrica.

**183.** Quest'ultima grandezza è stata determinata da numerosi sperimentatori con metodi classificabili in tre gruppi a seconda che  $v$  sia data dal rapporto delle unità di quantità di elettricità, oppure da quello delle forze elettromotrici, o infine dal confronto delle capacità. Ecco i risultati di alcune di queste determinazioni diviso per  $10^{10}$  del valore di  $v$  espresso in unità C. G. S.

		$\frac{v}{10^{10}}$
1* gruppo	Weber e Kohlrausch	3,1074
2° gruppo	Maxwell, 1868	2,8410
	W. Thomson e King, 1869	2,8080
	Mac Kichan, 1872	2,8960
	Shida, 1880	2,9550
	Exner, 1882	2,9200
	Lord Kelvin, 1889	3,004
	Pellat, 1891	3,0092
	Hurmuzescu, 1896	3,0001
3° gruppo	Ayrton e Perry, 1879	2,96
	Stoletow, 1881	2,99
	J. J. Thomson.1883	2,9630
	1881	3,019
	Klemencic 1884	3,0180
	1886	3,0142
	1886	3,0033
	Himstedt 1887	3,0049
	1888	3,00092
	E. B. Rosa, 1889	3,0004
	J. J. Thomson e Searle, 1890	2,9955
Abraham, 1892	2,9912	

Per la velocità della luce nel vuoto, Cornu ha trovato  $3,004 \cdot 10^{10}$  cm/s con un errore probabilmente inferiore a  $1/1000$ . Si vede che questo valore differisce solo per una piccolissima quantità, dell'ordine degli errori sperimentali, dai valori di  $v$  dati da MM. Klemencic, Himstedt, Rosa, secondo metodi che sembrano presentare la massima precisione. La teoria di Maxwell riceve quindi la conferma più soddisfacente che si possa desiderare.

D'altra parte, M. Hertz, misurando la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche, trovò un numero dello stesso ordine di grandezza della velocità della luce. Questa è ancora un'altra verifica molto soddisfacente della teoria elettromagnetica della luce.

#### 184. Rapporto tra l'indice di rifrazione e il potere induttore di una sostanza isolante.

Essendo la permeabilità magnetica dei mezzi trasparenti sostanzialmente uguale a quella del vuoto, il rapporto tra la velocità di propagazione  $V_1$  delle onde elettromagnetiche nel vuoto e la velocità  $V$  di queste onde nel mezzo trasparente è

$$\frac{V_1}{V} = \sqrt{K}$$

essendo  $K$  il potere induttore specifico di quest'ultimo mezzo espresso nel sistema elettrostatico. Secondo la teoria ordinaria della luce questo rapporto è pari all'indice di rifrazione assoluto  $n$ . Ne consegue che si deve avere

$$K = n^2$$

Ma poiché  $n$  varia con la lunghezza d'onda, questa relazione può ovviamente essere soddisfatta solo se le quantità  $K$  e  $n$  si riferiscono a fenomeni dello stesso periodo. Dobbiamo quindi prendere l'indice di rifrazione che corrisponde alle onde di periodo molto lungo, essendo queste le uniche il cui movimento può essere paragonato alle operazioni lente con l'aiuto delle quali determiniamo il potere induttore specifico. Il valore di questo indice si ottiene approssimativamente ponendo  $\lambda = \infty$  nella formula di Cauchy,

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

abbiamo così  $n = A$ .

Da esperimenti effettuati sullo spettro calorifico risulta che la formula di Cauchy non è sufficiente a rappresentare gli indici di radiazioni di lungo periodo; la formula che meglio li rappresenta è della forma:

$$n = A\lambda^2 + B + \frac{C}{\lambda^2}$$

Si troverà così, per  $\lambda = \infty$ ,  $n = \infty$  il che è inammissibile ma che dimostra quanto poco ci si debba fidare di estrapolazioni di questo tipo. Questa è senza dubbio la causa principale delle divergenze che di seguito segnaliamo.

**185.** All'epoca in cui Maxwell scrisse il suo Trattato, la paraffina era l'unico dielettrico il cui potere induttore fosse stato determinato con sufficiente precisione. Era quindi possibile un'unica verifica del rapporto  $K = n^2$ ; tuttavia era insoddisfacente. MM. Gibson e Barclay avevano scoperto che il potere induttore della paraffina solida era 1,975, la cui radice quadrata è 1,405. Questo numero differisce notevolmente dal valore 1,422 dell'indice di rifrazione, per una lunghezza d'onda infinita, dedotto dagli esperimenti del dottor Gladstone sulla paraffina fusa. Tuttavia i numeri confrontati si riferiscono a due diversi stati della paraffina, la loro divergenza non può invalidare la teoria; quindi Maxwell conclude solo che se la radice quadrata di  $K$  non è l'espressione completa dell'indice di rifrazione, costituisce il termine più importante.

**186.** Da allora sono state effettuate numerose misure sui poteri induttivi specifici dei corpi trasparenti; ecco i risultati, per quanto ci riguarda. Per i solidi la radice quadrata di  $K$  differisce dall'indice di rifrazione talvolta in modo considerevole. Secondo il signor Hopkinson gli indici di rifrazione delle diverse specie di vetro sono sempre minori della radice quadrata del loro potere induttore; per alcuni vetri sono solo la metà di questa radice.

La relazione  $K = n^2$  è meglio verificata nel caso dei liquidi. Per alcuni idrocarburi liquidi gli esperimenti di MM. Hopkinson, Négréano, Palaz mostrano che la verifica è abbastanza soddisfacente. Le due tabelle seguenti riassumono, la prima i risultati del Sig. Négréano, la seconda quelli del Sig. Palaz; in queste tabelle l'indice di rifrazione è relativo alla linea D del sodio.

I			
	$K$	$\sqrt{K}$	$n_D$
Benzina pura	2,2921	1,5139	1,5062
Toluene	2,2420	1,4949	1,4912
Xilene (miscela di più isomeri)	2,2679	1,5059	1,4897
Metaxilene	2,3781	1,5421	1,4977
Pseudocumene	2,4310	1,5591	1,4837
Cimene	2,4706	1,5716	1,4837
Essenza di terebentina	2,2618	1,5039	1,4726
II			
Benzina	2,3377	1,517	1,4997
Toluene n° 1	2,3646	1,537	1,4949
Toluene n° 2	2,3649	1,537	1,4848
Petrolio comune n° 1	2,1234	1,457	1,4487
Petrolio comune n° 2	2,0897	1,445	1,4477
Petrolio rettificato	2,1950	1,481	1,4766

La verifica è molto meno buona se si considerano oli vegetali o animali. Per quelli su cui ha operato il Sig. Hopkinson ha sempre trovato  $n > \sqrt{K}$ . Il signor Palaz giunge alla conclusione opposta per l'olio di rapa e l'olio di ricino:

Olio di rapa	$\sqrt{K} = 1,737$	$n_D = 1,4706$
Olio di ricino	$\sqrt{K} = 2,147$	$n_D = 1,4772$

Nel 1888, M. Gouy<sup>2)</sup> misurò il potere induttore specifico dell'acqua mediante l'attrazione subita da due piastre elettrizzate tra le quali si trovava uno strato di questo liquido; trovò  $K = 80$ . Risulterebbe, dalla relazione di Maxwell, circa  $n = 9$ , un numero circa sette volte maggiore dell'indice di rifrazione reale; tale rapporto risulta quindi in questo caso del tutto assente. È vero che è stata stabilita solo per i corpi isolanti, condizione ben lungi dall'essere soddisfatta dall'acqua, che è sempre più o meno conduttiva a causa dei sali che contiene. Ma almeno dovremmo trovare valori di  $K$  sempre più piccoli quando prendiamo acqua sempre più pura; ma sembra che stia accadendo esattamente il contrario.

Se infine passiamo ai gas, troviamo un accordo molto soddisfacente tra i valori di  $\sqrt{K}$  e quelli di  $n$ . Nella tabella seguente sono riportati i valori di tali quantità per alcuni gas; i valori del potere induttore specifico risultano dagli esperimenti di M. Boltzmann.

	$K$	$\sqrt{K}$	$n_D$
Aria	1,000590	1,000295	1,000294
Acido carbonico	1,000946	1,000473	1,000454
Idrogeno	1,000264	1,000132	1,000138
Ossido di carbonio	1,000690	1,000345	1,000335
Protossido d'azoto	1,000984	1,000492	1,000516
Bicarbuo di idrogeno	1,001312	1,000656	1,000720
Protocarbuo di idrogeno	1,000944	1,000472	1,000443

**187.** In sintesi, per i gas e per alcuni liquidi è verificata la relazione  $K = n^2$ ; è in difetto per la maggior parte dei liquidi, dei solidi e soprattutto per l'acqua. Nonostante la molteplicità delle ricerche, non siamo quindi meglio informati di Maxwell sul grado di accuratezza da dare a questa relazione.

Ma se si eccettua l'acqua, che si discosta completamente dai dielettrici per la sua natura elettrolitica non appena contiene traccia di un sale in soluzione, le divergenze osservate tra  $n$  e la radice quadrata di  $K$  non sono di natura tale da far abbandonare questa relazione, soprattutto se si tiene conto delle condizioni difettose in cui viene applicata. Innanzitutto le sostanze studiate per la sua verifica sono spesso ben lungi dall'essere isolanti perfetti come la sua dimostrazione fa supporre. Come isolanti, la maggior parte dei solidi sono molto peggiori dei gas e di alcuni liquidi come il petrolio e la benzina purissima; ma sono proprio questi ultimi corpi che meglio verificano la relazione di Maxwell. In secondo luogo, il potere induttore e l'indice di rifrazione variano con la temperatura, e generalmente le misure delle due grandezze da confrontare vengono effettuate a temperature diverse. Sappiamo infine che, qualunque sia il metodo utilizzato per misurare  $K$ , i risultati dipendono dalla velocità di variazione del campo in cui la sostanza è posta; forse, quindi, la relazione in questione sarebbe meglio soddisfatta se le variazioni del campo fossero rapide quanto le vibrazioni della luce. Per tutti questi motivi non dovremmo stupirci se la verifica di questa relazione non sia così soddisfacente come il confronto tra il rapporto  $v$  e la velocità della luce nel vuoto.

### 188. Direzione dello spostamento elettrico

Consideriamo un'onda piana elettromagnetica. Prendiamo per piano delle  $xy$  un piano parallelo all'onda e scegliamo per l'asse  $x$  una direzione parallela a quella del momento elettromagnetico;

<sup>2</sup>*Comptes rendus*, t. CVI, p. 548; 1888,

abbiamo allora  $G = 0$ ,  $H = 0$ . Per quanto riguarda  $F$ , la sua espressione dipende dalla natura della perturbazione; ammettiamo che si abbia

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt)$$

Dalle equazioni (III) del capitolo precedente, le componenti dell'induzione magnetica, sono allora

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = 0 \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = -A \sin \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt) \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0 \end{aligned}$$

L'induzione magnetica è quindi parallela all'asse  $y$ , cioè perpendicolare alla direzione del momento elettromagnetico. Lo stesso vale per la forza magnetica che ha la stessa direzione dell'induzione poiché le componenti costanti di queste due quantità differiscono solo per un fattore costante.

Note le componenti dell'induzione, le equazioni (II) permettono di calcolare quelle della velocità di spostamento; troviamo

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = A\mu \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt) \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0 \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0 \end{aligned}$$

equazioni che ci mostrano che la velocità dello spostamento è, come il momento elettromagnetico, parallela all'asse  $x$ . È ovviamente anche la direzione dello spostamento stesso e, secondo le equazioni (VII), quella della forza elettromotrice che lo produce.

Così in un punto di un'onda piana lo spostamento elettrico e il momento elettromagnetico hanno la stessa direzione; la forza elettromotrice e l'induzione sono ad essi perpendicolari; queste direzioni si trovano anche nel piano dell'onda.

**189.** Ma, quando le perturbazioni elettromagnetiche sono assai veloci da dar luogo a fenomeni luminosi, qual è la direzione dello spostamento elettrico rispetto al piano di polarizzazione della luce? L'ipotesi di Maxwell sull'espressione dell'energia cinetica del mezzo che trasmette le onde e lo studio delle varie teorie proposte per la spiegazione della riflessione vetrosa permettono di rispondere facilmente a questa domanda.

Sappiamo che nelle teorie ordinarie della luce i fenomeni osservati nei mezzi isotropi possono essere interpretati altrettanto bene, sia ammettendo, con Fresnel, che le vibrazioni dell'etere siano perpendicolari al piano di polarizzazione, sia ammettendo, come Neumann e Mac-Cullagh, che le vibrazioni hanno luogo nel piano di polarizzazione. Abbiamo dimostrato inoltre, per quanto riguarda la riflessione vetrosa<sup>3</sup>, che queste due ipotesi portano a risultati opposti per la densità dell'etere. Se adottiamo quella di Fresnel, la densità deve essere considerata variabile; se prendiamo quello di Neumann e Mac-Cullagh, questa densità è costante.

Ma in entrambe le teorie l'energia cinetica ha valore

$$\frac{1}{2} \int \rho (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) d\tau$$

$\rho$  che indica la densità,  $\xi' + \eta' + \zeta'$  le componenti della velocità della molecola di etere. Secondo Maxwell, l'energia cinetica non è altro che il potenziale elettrodinamico del sistema di correnti esistenti nel mezzo; l'espressione di tale energia è quindi, nel caso in cui è supposto magnetico (143),

$$\frac{1}{8\pi} \int (\alpha a + \beta b + \gamma c) d\tau$$

<sup>3</sup>*Teoria matematica della luce*, p. 320 e segg.

oppure, esprimendo le componenti dell'induzione mediante le componenti della forza elettromagnetica,

$$\frac{1}{8\pi}\mu \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

Per allineare la teoria di Maxwell alla teoria ordinaria della luce, che finora è stata in accordo con l'esperimento, dobbiamo ammettere che in queste due teorie le espressioni dell'energia cinetica sono identiche. Dobbiamo quindi avere

$$\xi' = \alpha \quad \rho = \frac{\mu}{4\pi} \quad \eta' = \beta \quad \zeta' = \gamma$$

Ora,  $\mu$  essendo costante per un mezzo isotropo, la prima di queste uguaglianze ci dice che la densità  $\rho$  dell'etere deve essere costante; dobbiamo quindi adottare l'ipotesi di Neumann e Mac-Cullagh. Ma allora la forza elettromagnetica, che secondo le ultime tre uguaglianze ha la stessa direzione della vibrazione della molecola dell'etere, si trova nel piano di polarizzazione. Di conseguenza, facendo riferimento a quanto dimostrato nel paragrafo precedente arriviamo a questa conclusione: lo spostamento elettrico è perpendicolare al piano di polarizzazione, se adottiamo le ipotesi di Maxwell.

**190. Propagazione in mezzo anisotropo. — Doppia rifrazione.** Finora abbiamo implicitamente assunto che il mezzo isolante che propaga le perturbazioni elettromagnetiche sia isotropo; vediamo ora cosa succede alle equazioni di campo quando il dielettrico è anisotropo.

Abbiamo visto (73) che l'analogia della legge degli scambi di elettricità tra le celle di un dielettrico con la legge degli scambi di calore nella teoria di Fourier, porta, scegliendo opportunamente gli assi coordinati, ai seguenti valori per le componenti dello spostamento elettrico in un mezzo anisotropo,

$$\begin{aligned} f &= -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dx} - X \right) \\ g &= -\frac{K'}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dy} - Y \right) \\ h &= -\frac{K''}{4\pi} \left( \frac{d\psi}{dz} - Z \right) \end{aligned}$$

dove  $\psi$  indica il potenziale elettrostatico,  $X, Y, Z$ , le componenti della forza elettromotrice dovute a qualsiasi causa diversa dalla differenza di potenziale. Supponendo questa forza elettromotrice dovuta alla sola induzione prodotta dalle correnti e dai magneti del campo, queste uguaglianze diventano

$$\begin{cases} f = \frac{K}{4\pi} P \\ g = \frac{K'}{4\pi} Q \\ h = -\frac{K''}{4\pi} R \end{cases} \quad (1)$$

**191.** Ma non è necessario per stabilire queste formule basarsi sull'ipotesi della struttura cellulare dei dielettrici.

Dalle formule (VII) del Capitolo precedente, le componenti dello spostamento elettrico in un mezzo isotropo sono proporzionali a quelle della forza elettromotrice; di conseguenza, l'ipotesi più semplice che si presenta è quella di ammettere che, per un mezzo anisotropo,  $f, g, h$  siano funzioni lineari ed omogenee di  $P, Q, R$ ,

$$\begin{aligned} f &= AP + BQ + CR \\ g &= A'P + B'Q + C'R \\ h &= A''P + B''Q + C''R \end{aligned}$$

Inoltre i nove coefficienti  $A, B, C, \dots$  non sono assolutamente arbitrari. Mostriamo infatti che essi costituiscono un determinante simmetrico.

Se diamo alle componenti degli incrementi di spostamento  $df, dg, dh$ , il lavoro corrispondente della forza elettromotrice è

$$Psf + Qdg + Rdh$$

o, dalle relazioni precedenti

$$M (Adp + BdQ + CdR) + Q (A'dp + B'dQ + C'dR) + R (A''dp + B''dQ + C''dR)$$

o ancora

$$(AP + A'Q + A''R) dP + (BP + B'Q + B''R) dQ + (CP + C'Q + C''R) dR$$

Perché ci sia conservazione dell'energia questa espressione deve essere un differenziale esatto. Quest'ultima condizione è espressa da tre uguaglianze, la prima delle quali è

$$\frac{d(AP + A'Q + A''R)}{dR} = \frac{d(CP + C'Q + C''R)}{dP}$$

ne ricaviamo

$$A'' = C$$

Le altre due uguaglianze ci daranno

$$B = A' \quad C' = B''$$

il che mostra chiaramente che il determinante dei coefficienti è simmetrico.

Il numero di tali coefficienti si riduce quindi a 6. Scegliendo gli assi coordinati si ottengono i valori di tre di essi; possiamo quindi fare questa scelta in modo tale che i coefficienti che non stanno sulla diagonale del determinante siano ridotti a zero; i valori di  $f, g, h$  vengono quindi ridotti alle espressioni (1).

**192.** Dovremmo fare, per le equazioni che danno le componenti  $a, b, c$  della induzione magnetica, in funzione delle componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza elettromagnetica, la stessa ipotesi di quella che abbiamo appena adottato per esprimere  $f, g, h$  in funzione di  $P, Q, R$ . Saremo così indotti a sostituire le equazioni (I) del capitolo precedente con tre equazioni della stessa forma, che ne differiscono solo per il coefficiente  $\mu$  che avrebbe in ciascuna di esse un valore diverso  $\mu, \mu', \mu''$ . Ma poiché la permeabilità magnetica dei corpi trasparenti è sempre molto prossima all'unità, questo coefficiente ha poca influenza sul risultato dei calcoli. Per non complicare inutilmente la questione ammetteremo che sia costante e uguale a 1.

**193.** Derivando le equazioni (1) rispetto a  $t$ , e sostituendo nei secondi membri delle equazioni così trovate,  $\frac{dP}{dt}, \frac{dQ}{dt}, \frac{dR}{dt}$  con i valori ottenuti al § 177, abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned} 4\pi u &= -K \frac{d^2 F}{dt^2} \\ 4\pi v &= -K' \frac{d^2 G}{dt^2} \\ 4\pi w &= -K'' \frac{d^2 H}{dt^2} \end{aligned}$$

che si possono scrivere

$$\begin{cases} \frac{d^2 F}{dt^2} = -\frac{1}{K} 4\pi u \\ \frac{d^2 G}{dt^2} = -\frac{1}{K'} 4\pi v \\ \frac{d^2 H}{dt^2} = -\frac{1}{K''} 4\pi w \end{cases} \quad (C)$$

Abbiamo inoltre (167)

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (D)$$

Infine, poiché abbiamo supposto  $\mu = 1$ , le equazioni (III) del § 167 diventano

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (E)$$

Tali sono i tre gruppi di equazioni che permettono di determinare, in ogni istante, i valori degli elementi di una perturbazione magnetica in un punto di un dielettrico anisotropo, quando se ne conoscono i valori iniziali.

**194.** Se è vero che la luce è dovuta ad una perturbazione di questo genere, queste equazioni devono condurci alla spiegazione della doppia rifrazione che presenta la luce quando attraversa un mezzo anisotropo. Lo studio che abbiamo fatto di questo fenomeno<sup>4</sup>, ci permette di dimostrare che le cose stanno effettivamente così, senza dilungarci in lunghi sviluppi.

Sappiamo che se designiamo le componenti dello spostamento della molecola dell'etere con  $\xi, \eta, \zeta$  nella teoria di M. Sarrau, con  $X, Y, Z$  nella teoria di Neumann, con  $u, v, w$  nella teoria di Fresnel, si hanno le nove relazioni<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -au \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= -bv \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -cw \\ u &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ v &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\ w &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \\ X &= \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \\ Y &= \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \\ Z &= \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \end{aligned}$$

Queste equazioni divengono identiche ai gruppi (C) e (D) e (E) del paragrafo precedente se introduciamo

$$a = \frac{1}{K}, \quad b = \frac{1}{K'}, \quad c = \frac{1}{K''}, \\ u = 4\pi u, \dots, \quad X = \alpha, \dots, \quad \xi = F, \dots,$$

Ora le tre teorie ottiche di Fresnel, Neumann e M. Sarrau spiegano egualmente bene tutti i fatti osservati poiché finora nessun esperimento è riuscito a far preferire l'una all'altra; possiamo quindi essere certi che i gruppi di equazioni (C), (D), (E), dedotti dalla teoria di Maxwell, permetteranno di spiegare tutti i fenomeni conosciuti e non ne contraddiranno alcuna.

**195.** In particolare, l'equazione per le velocità di propagazione delle due onde piane provenienti dalla stessa onda incidente deve essere identica nella teoria elettromagnetica e in quelle ottiche. In queste ultime è

$$\frac{l^2}{V^2 - a} + \frac{m^2}{V^2 - b} + \frac{n^2}{V^2 - c} = 0$$

essendo  $l, m, n$  i coseni direttori della normale al piano dell'onda; di conseguenza essa diviene con la notazione della teoria elettromagnetica

$$\frac{l^2}{KV^2 - 1} + \frac{m^2}{K'V^2 - 1} + \frac{n^2}{K''V^2 - 1} = 0$$

Ne consegue che le velocità di propagazione lungo gli assi coordinati sono inversamente proporzionali alle radici quadrate dei poteri induttori lungo questi stessi assi o, il che è la stessa cosa, che tali radici quadrate sono proporzionali ai valori degli indici di rifrazione lungo gli assi d'elasticità del mezzo.

<sup>4</sup>Teoria matematica della luce, da p. 217 a 318.

<sup>5</sup>Loc. cit. p. 279.

**196.** Questa relazione è abbastanza ben verificata per lo zolfo cristallizzato. I poteri induttori lungo i tre assi di elasticità di un cristallo di questa sostanza sono rispettivamente, secondo M. Boltzmann<sup>6</sup>: 4,773 – 3,970 – 3,811. Le radici quadrate di questi numeri: 2,185, –1,91 – 1,95 differiscono poco dagli indici di rifrazione corrispondenti alle stesse direzioni: 2,143 – 1,961 – 1,89.

Le altre sostanze anisotrope studiate danno risultati molto meno soddisfacenti. Secondo gli esperimenti condotti da M. J. Curie<sup>7</sup> su quarzo, spato, tormalina, berillo, ecc., la radice quadrata di  $K$  è sempre molto maggiore dell'indice di rifrazione; tuttavia, secondo la teoria, i cristalli positivi, come il quarzo, hanno un potere induttore maggiore nella direzione dell'asse ottico che in direzione perpendicolare, mentre per i cristalli negativi, come lo spato islandese, segue quest'ultima direzione, cioè il potere induttore è il più grande.

La relazione  $K = n^2$  è quindi verificata solo in modo molto imperfetto. Ma, come nel caso dei corpi isotropi, bisogna sottolineare che le condizioni richieste per l'instaurazione di questo rapporto non sono soddisfatte dalle sostanze studiate. Molte di esse sono igrometriche e acquisiscono, attraverso lo strato d'acqua che le ricopre, una conduttività tale da spiegare fino ad un certo punto le divergenze osservate. Questo modo di vedere è confermato anche dai risultati ottenuti per lo zolfo, sostanza notevole per le sue proprietà isolanti e per la difficoltà con cui il vapore acqueo condensa sulla sua superficie.

**197.** L'individuazione delle equazioni dei § 193 e 194 permette di determinare le direzioni relative delle varie grandezze che definiscono la corrente di spostamento in un punto, e le loro direzioni rispetto al raggio luminoso e rispetto al piano di polarizzazione.

Sappiamo che le direzioni ON e OF (fig. 33) delle vibrazioni di Neumann e di Fresnel sono rettangolari tra loro e si trovano nel piano dell'onda, e che le direzioni OS e ON delle vibrazioni di M. Sarrau e Neumann, ancora perpendicolari tra loro, si trovano su un piano normale al raggio luminoso OR. Ora, dall'identità delle equazioni che ricordiamo, segue che la velocità dello spostamento elettrico è parallela alla vibrazione di Fresnel, la forza elettromagnetica parallela a quella di Neumann, infine il momento elettromagnetico e, di conseguenza, la forza elettromotrice parallela alla vibrazione di M. Sarrau.

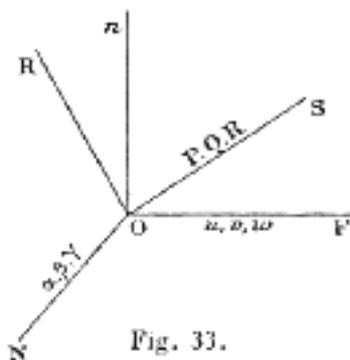


Fig. 33.

Concludiamo che lo spostamento elettrico avviene nel piano dell'onda perpendicolare alla forza elettromagnetica, e che quest'ultima grandezza, situata nel piano dell'onda, è perpendicolare alla direzione del raggio luminoso e alla forza elettromotrice, essa stessa normale al raggio. Nel caso di un corpo isotropo, la direzione di questo raggio si fonde con quella normale al piano dell'onda e di conseguenza la forza elettromotrice assume la direzione dello spostamento come già sapevamo.

Per quanto riguarda le direzioni rispetto al piano di polarizzazione, da quanto sappiamo sulla posizione di questo piano rispetto alle vibrazioni dell'etere, consegue che la forza elettromotrice e lo spostamento sono quasi normali al piano di polarizzazione mentre la forza elettromagnetica

<sup>6</sup>Wiener Sitzungsberichte, t. LXX, part. II, p. 242, 1874.

<sup>7</sup>Lumière Électrique, t. XIX, p. 127, 1888.

è sostanzialmente parallela. Se si passa al caso di un mezzo isotropo, queste grandezze diventano strettamente perpendicolari o parallele al piano di polarizzazione.

**198. Propagazione in mezzo imperfettamente isolante. -Assorbimento della luce.**

In questo caso abbiamo la scelta tra le formule (IX) di Maxwell e le formule (X) di M. Potier (170 e 171). Questi due gruppi di formule portano agli stessi risultati, prendiamo quelle di Maxwell e scopriamo qual è allora il modo di propagazione di un'onda elettromagnetica piana.

Se prendiamo il piano  $xy$  parallelo al piano dell'onda e l'asse  $x$ , parallelo alla direzione del momento elettromagnetico, abbiamo  $G = H = 0$ , e le equazioni (I) del paragrafo 177 si riducono alla prima

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{d^2F}{dt^2}$$

da cui ricaviamo

$$P = -\frac{dF}{dt}$$

trascurando la costante di integrazione che deve essere nulla quando le perturbazioni sono periodiche. Portando questi valori nella prima delle equazioni di Maxwell (IX)

$$u = CP + \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt}$$

otteniamo

$$u = -C \frac{dF}{dt} - \frac{K}{4\pi} \frac{d^2F}{dt^2} \quad (1)$$

Ma i gruppi di equazioni (I), (II), (III) del paragrafo 167 ci danno:

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} \right)$$

o, poiché, per la scelta degli assi coordinati,  $F$  non dipende da  $y$

$$4\pi u = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2F}{dz^2}$$

abbiamo pertanto eliminando  $n$  tra l'equazione (1) e quest'ultima

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \mu K \frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt} \quad (2)$$

Questa equazione è soddisfatta da una funzione periodica del tempo della forma

$$F = e^{i(nt-mz)}$$

purché i coefficienti  $n$  e  $m$  soddisfino la relazione

$$m^2 = \mu K n^2 - 4\pi\mu C n i$$

Ma vendo  $n$  come valore  $\frac{2\pi}{T}$ , con  $T$  il periodo della funzione, questa quantità è reale; pertanto  $m^2$  è una quantità essenzialmente immaginaria. Lo stesso vale per  $m$  e possiamo porre

$$m = q - pi$$

Portando questo valore di  $m$  nell'uguaglianza precedente e scrivendo che esiste uguaglianza tra le parti reali e le parti immaginarie otteniamo le due condizioni

$$\begin{cases} q^2 - p^2 = \mu K n^2 \\ 2pq = 4\pi\mu C n \end{cases} \quad (3)$$

La funzione periodica che soddisfa all'equazione (2) si può allora scrivere

$$F = e^{-pz} e^{i(nt-qz)}$$

la cui parte reale, la sola che ci interessa dal punto di vista delle conseguenze sperimentali, è:

$$F = e^{-pz} \cos(nt - qz)$$

**199.** Se si ignorano le variazioni di  $F$  derivanti dal fattore  $\cos(nt - qz)$ , questa espressione ci mostra che il valore del momento elettromagnetico varia con l'esponenziale  $e^{-pz}$ . Ora, per la seconda delle equazioni di condizione (3),  $p$  e  $q$  hanno lo stesso segno; di conseguenza, se la direzione di propagazione dell'onda piana considerata è quella di  $z$  positivo,  $p$  e  $q$  sono positivi ed  $e^{-pz}$  diminuisce al crescere di  $z$ . Il valore del momento elettromagnetico diminuisce quindi man mano che l'onda penetra più in profondità nel mezzo considerato.

Lo stesso discorso vale per lo spostamento elettrico e la forza elettromagnetica poiché i valori di queste quantità si deducono da quelli del momento elettromagnetico mediante una serie di equazioni differenziali lineari e del primo ordine che permettono di mantenere il fattore  $e^{-pz}$  nelle loro espressioni.

Ciò vale anche per la velocità di spostamento di una molecola di etere luminifero poiché abbiamo visto (189) che tale velocità è proporzionale alla forza elettromagnetica.

Di conseguenza, quando le perturbazioni magnetiche sono sufficientemente veloci da dar luogo a fenomeni luminosi, l'intensità della luce, proporzionale al quadrato della velocità media di una molecola di etere, dovrà variare come  $e^{-pz}$ .

**200.** Nel caso in cui la sostanza considerata abbia un potere induttore specifico molto basso ed una permeabilità magnetica prossima ad 1, il valore di  $p$  dedotto dalle equazioni (3) mostra che tale quantità è sostanzialmente proporzionale alla radice quadrata di  $C$ . Risulta quindi che l'intensità della luce trasmessa da tale mezzo è tanto più debole quanto maggiore è  $C$ ; in altre parole, quanto più un corpo è conduttivo per l'elettricità, tanto più è opaco per la luce.

Esistono numerose eccezioni a questa regola. Tuttavia, in generale, i corpi solidi trasparenti sono buoni isolanti mentre i corpi solidi conduttivi sono molto opachi. Risulta inoltre dalle ricerche di M. J. Curie<sup>8</sup> sui dielettrici che l'elenco di questi corpi disposti in ordine di conducibilità crescente è quasi identico a quello di questi stessi corpi disposti in ordine di diatermicità decrescente. Ecco due elenchi; quello dei poteri diatermici si deduce dai lavori di Melloni.

Conducibilità elettrica crescente dal primo all'ultimo	Potere diatermico
Zolfo	Salgemma
Salgemma	Zolfo
Fluorite	Fluorite
Spatto d'Islanda	Spatto d'Islanda
Quarzo	Quarzo
Baritina	Vetro
Allume	Baritina
Vetro	Tormalina scura
Tormalina scurita	Allume

Potremmo anche citare l'ebanite che è stata segnalata essere facilmente penetrata dalle radiazioni scure.

**201.** Contrariamente alla legge precedente, gli elettroliti sono buoni conduttori di elettricità e generalmente trasparenti. Maxwell spiega questo fatto osservando che la conduttività degli

<sup>8</sup>*Lumière Électrique*, t. XXIX, p. 322, 1888.

elettroliti non è della stessa natura della conduttività dei metalli. In questi le molecole materiali sono a riposo; e solo l'elettricità è in movimento; negli elettroliti, invece, gli ioni si spostano da un elettrodo all'altro e il trasporto dell'elettricità è effettuato dagli ioni che diventano così i *portatori* dell'elettricità.

Si può trovare un'altra spiegazione data anche da Maxwell. L'energia assorbita dal passaggio dell'onda attraverso la sostanza deve necessariamente essere ritrovata in qualche forma. Nei metalli si trasforma in calore. Negli elettroliti viene utilizzata per separare gli ioni. Ma il verso del movimento degli ioni dipende da quello del movimento elettrico; di conseguenza, l'effetto prodotto dal passaggio di una certa quantità di elettricità in una direzione viene distrutto dal passaggio della stessa quantità nella direzione opposta e una successione di correnti alternate come quelle che risultano da perturbazioni capaci di produrre luce non possono dar luogo a scomposizione. Non vi è quindi assorbimento di energia e l'intensità luminosa all'uscita di un elettrolita deve essere sostanzialmente pari all'intensità della luce incidente.

**202.** Maxwell ha effettuato alcuni esperimenti per verificare quantitativamente se l'intensità della luce diminuisce come l'esponenziale  $e^{-2pz}$ . Lavorò sul platino, sull'oro e sull'argento, che ridotti a sottilissime strisce lasciavano passare la luce. Sembra che la trasparenza di questi organismi sia molto maggiore di quanto la teoria vorrebbe. Ma questo risultato è facilmente spiegabile; lo spessore delle lamine non è uniforme e un'elevata percentuale della luce trasmessa attraversa uno spessore molto inferiore al valore di  $z$  preso nel calcolo dell'esponenziale.

### 203. Riflessione delle onde

Le leggi della riflessione della luce possono essere dedotte dalle equazioni del campo magnetico. In una nota pubblicata nella traduzione francese del trattato di Maxwell (t. II, p. 507) M. Potier ha mostrato che si ritrovano così le formule date da Fresnel per la riflessione vetrosa e quelle di Cauchy e Lamé per la riflessione metallica. Essendo queste formule verificate sperimentalmente, la loro deduzione dalla teoria di Maxwell è una nuova conferma di questa teoria. Tuttavia i valori numerici delle costanti, determinati con metodi ottici ed elettrici, non concordano; il disaccordo, notevole per i dielettrici trasparenti, è ancora più marcato per i metalli. In particolare, la riflessione della luce sul ferro dovrebbe differire, secondo la teoria di Maxwell, dalla riflessione sugli altri metalli poiché il coefficiente di permeabilità magnetica del ferro è circa 30 volte maggiore di quello della maggior parte dei metalli; ma l'esperienza non ha finora rivelato alcuna particolarità nelle leggi della riflessione sul ferro.

Questa discrepanza può essere spiegata supponendo che l'induzione magnetica sia un fenomeno non istantaneo. Con vibrazioni estremamente rapide il fenomeno non avrebbe il tempo di verificarsi.

Si potrebbe avanzare un'argomentazione a sostegno di questa opinione. Gli esperimenti del signor Fizeau sulla velocità di propagazione dell'elettricità attraverso un filo hanno dimostrato che questa velocità è inferiore nel ferro che nel rame. Ciò è facilmente spiegabile perché grazie al fenomeno della magnetizzazione trasversale (che avviene in un filo di ferro percorso da corrente), l'autoinduzione del ferro è maggiore di quella del rame.

Al contrario, gli esperimenti di Hertz danno per la velocità del ferro lo stesso valore della velocità del rame, come se, in queste rapidissime alternanze effettuate dall'illustre fisico di Carlsruhe, il ferro non avesse il tempo di magnetizzarsi per induzione.

### 204. Energia della radiazione

Nelle teorie ordinarie dei fenomeni luminosi, il mezzo che trasmette la luce contiene energia sotto forma di energia potenziale e sotto forma di energia cinetica; l'energia potenziale è dovuta alla deformazione del mezzo, assunto elastico; l'energia cinetica deriva dal suo moto vibrazionale.

L'energia totale di un elemento di volume rimane costante e quindi, al variare dell'energia potenziale, l'energia cinetica varia inversamente di pari entità.

Nella teoria elettromagnetica si presuppone inoltre che l'energia del mezzo sia in parte potenziale e in parte cinetica. L'energia potenziale, dovuta alle azioni elettrostatiche, ha espressione (32)

$$W = \int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

l'energia cinetica è il potenziale elettrodinamico del sistema di correnti sviluppate nel mezzo, cioè (144)

$$T = \int \frac{1}{8\pi} (\alpha a + \beta b + \gamma c) d\tau$$

Cerchiamo i valori di queste due quantità nel caso di un'onda piana parallela al piano  $xy$  e in cui il momento elettromagnetico è diretto parallelamente all'asse  $x$ .

Abbiamo allora, dal il paragrafo 181,

$$\begin{aligned} G = H = 0 & \quad Q = R = 0 & \quad g = h = 0 \\ \alpha = \gamma = 0 & & \quad a = c = 0 \end{aligned}$$

e le espressioni delle due forme di energia diventano

$$W = \int \frac{2\pi}{K} f^2 d\tau$$

$$T = \int \frac{1}{8\pi} b^2 d\tau$$

Ma le equazioni (VII) e (III) del campo elettromagnetico ci danno

$$f = \frac{K}{4\pi} P = \frac{K}{4\pi} \frac{dF}{dt}$$

$$b = \frac{dF}{d\tau}$$

di modo che abbiamo per i valori dell'energia potenziale e di quella cinetica riferite all'unità di volume

$$W = \frac{K}{8\pi} \left[ \frac{dF}{dt} \right]^2 \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{dF}{dz} \right]^2 \quad (2)$$

La funzione  $F$ , dovendo soddisfare l'equazione differenziale (180)

$$K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d^2 F}{dz^2}$$

è della forma

$$F = f(z - Vt)$$

dove

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$$

abbiamo pertanto

$$\frac{dF}{dt} = -V f'(z - Vt)$$

$$\frac{dF}{dz} = -f'(z - Vt)$$

e di conseguenza

$$K \left[ \frac{dF}{dt} \right]^2 = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{dF}{dz} \right]^2$$

I valori (1) e (2) delle due forme di energia sono quindi uguali tra loro; quando varia una di esse, l'altra varia nella stessa direzione e della stessa quantità. Necessariamente, poiché vi è conservazione dell'energia nell'intero sistema, l'energia persa in un elemento di volume deve essere ritrovata in un altro elemento. Queste conseguenze differiscono da quelle delle comuni teorie della luce che abbiamo richiamato all'inizio.

### 205. Tensioni e pressioni nel mezzo che trasmette la luce

Abbiamo visto (81) che in un mezzo dielettrico in equilibrio vincolato, un elemento di superficie perpendicolare alle linee di forza, subisce una tensione normale il cui valore per unità di superficie è pari al prodotto di  $\frac{K}{8\pi}$  per il quadrato della forza elettromotrice, mentre sugli elementi paralleli alle linee vengono esercitate pressioni che, relative all'unità di superficie, hanno lo stesso valore di questa tensione. Se quindi prendiamo l'asse  $x$  parallelo alle linee di forza e se con Maxwell accettiamo di rappresentare le pressioni mediante quantità negative, avremo per i valori delle tensioni e delle pressioni, per unità di superficie, che si esercitano su elementi perpendicolari agli assi delle coordinate,

$$P_{xx} = \frac{K}{8\pi} P^2 \quad P_{yy} = -\frac{K}{8\pi} P^2 \quad P_{zz} = -\frac{K}{8\pi} P^2$$

Ma, con questo sistema di assi, l'energia elettrostatica riferita all'unità di volume vale

$$W = \frac{2\pi}{K} f^2 = \frac{K}{8\pi} P^2$$

pertanto le tensioni e pressioni per unità di superficie sugli elementi considerati sono uguali all'energia elettrostatica per unità di volume.

**206.** Essendo la legge di attrazione e repulsione la stessa per le masse elettriche e per quelle magnetiche dobbiamo aspettarci di trovare tensioni e pressioni simili alle precedenti nel campo magnetico. Maxwell tratta il caso generale in cui esistono magneti e correnti nel campo. Il metodo che usa è aperto a obiezioni. Ma è inutile considerare il caso generale poiché, secondo l'ipotesi di Ampère, il magnetismo permanente si spiega con le correnti di particelle. Possiamo quindi supporre che in un mezzo la cui permeabilità sia uguale a 1 circolano solo correnti; guadagneremo in rigore e concisione.

Consideriamo un elemento di volume  $d\tau$ , e siano  $u, v, w$  le componenti della velocità dell'elettricità nel punto che occupa. Secondo la nostra ipotesi, l'induzione magnetica in questo punto si confonde con la forza elettromagnetica e le formule (2) del paragrafo 160 che danno le componenti della forza elettrodinamica relative all'unità di volume diventano

$$\begin{aligned} X &= \gamma v - \beta w \\ Y &= \alpha w - \gamma u \\ Z &= \beta u - \alpha v \end{aligned}$$

Essendo le componenti  $u, v, w$  della velocità dell'elettricità legate a quelle della forza elettromagnetica dalle equazioni (II) (167), la prima delle equazioni precedenti può essere scritta

$$4\pi X = \gamma \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) - \beta \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right)$$

o, sommando e sottraendo al secondo membro il prodotto

$$\alpha \frac{d\alpha}{dx}$$

$$4\pi X = \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} - \alpha \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\beta}{dx} - \gamma \frac{d\gamma}{dx}$$

Ma poiché la forza elettromagnetica è uguale all'induzione magnetica, la relazione che lega le componenti di quest'ultima quantità (102)

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$$

diviene

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$$

possiamo quindi sommare il prodotto  $\alpha \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right)$  un secondo membro della relazione che dà  $4\pi X$  senza cambiarne il valore e abbiamo

$$4\pi X = \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} - \alpha \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\beta}{dx} - \gamma \frac{d\gamma}{dx} + \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \frac{d\beta}{dy} + \alpha \frac{d\gamma}{dz}$$

Disponendo opportunamente i termini del secondo membro si vede che si può scrivere

$$4\pi X = \frac{d}{dx} \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2} \right) + \frac{d}{dy} (\alpha\beta) + \frac{d}{dz} (\alpha\gamma)$$

e analogamente

$$4\pi Y = \frac{d}{dx} (\beta\alpha) + \frac{d}{dy} \left( \frac{\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2}{2} \right) + \frac{d}{dz} (\beta\gamma)$$

$$4\pi Z = \frac{d}{dx} (\alpha\beta) + \frac{d}{dy} (\gamma\beta) + \frac{d}{dz} \left( \frac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2} \right)$$

**207.** Supponiamo ora che le forze elettrodinamiche siano dovute a pressioni o tensioni derivanti dall'elasticità del mezzo e designiamo le componenti delle tensioni con

$$\begin{array}{ll} P_{xx}d\omega, P_{xy}d\omega, P_{xz}d\omega & \text{per un elemento normale all'asse } x \\ P_{yx}d\omega, P_{yy}d\omega, P_{yz}d\omega & \text{per un elemento normale all'asse } y \\ P_{zx}d\omega, P_{zy}d\omega, P_{zz}d\omega & \text{per un elemento normale all'asse } z \end{array}$$

Un parallelepipedo elementare di volume  $d\tau$  e le cui facce sono parallele ai piani coordinati deve trovarsi in equilibrio sotto l'azione di queste nove forze e delle tre componenti  $X d\tau, Y d\tau, Z d\tau$  della forza elettrodinamica. Scrivendo che questo parallelepipedo non può compiere alcun movimento rotatorio attorno a nessuno degli assi coordinati, otteniamo le relazioni

$$P_{xy} = P_{tx} \quad P_{yx} = P_{zy} \quad P_{yz} = P_{xz}$$

e, scrivendo che non può avere traslazione lungo questi stessi assi, abbiamo

$$\begin{array}{l} X = \frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{dy} + \frac{dP_{zx}}{dz} \\ Y = \frac{dP_{xy}}{dx} + \frac{dP_{yy}}{dy} + \frac{dP_{zy}}{dz} \\ Z = \frac{dP_{xz}}{dx} + \frac{dP_{yz}}{dy} + \frac{dP_{zz}}{dz} \end{array}$$

Identificando questi valori di  $X, Y, Z$  con quelli dedotti dalle equazioni ottenute nel paragrafo precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{8\pi} (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) \\ P_{yy} &= \frac{1}{8\pi} (\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2) \\ P_{zz} &= \frac{1}{8\pi} (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2) \\ P_{xy} &= P_{yx} = \frac{\alpha\beta}{4\pi} \\ P_{yz} &= P_{zy} = \frac{\beta\gamma}{4\pi} \\ P_{zx} &= P_{xz} = \frac{\gamma\alpha}{4\pi} \end{aligned}$$

Quando si prendono gli assi delle coordinate in modo tale che l'asse  $x$  sia parallelo alla forza magnetica, si ha  $\beta = \gamma = 0$  e quindi le ultime sei componenti delle tensioni calcolate sono nulle. Le prime tre diventano

$$P_{xx} = \frac{\alpha^2}{8\pi} \quad P_{yy} = -\frac{\alpha^2}{8\pi} \quad P_{zz} = -\frac{\alpha^2}{8\pi}$$

Un elemento perpendicolare alle linee di forza magnetiche subisce quindi una tensione normale e gli elementi paralleli alle linee di forza, pressioni normali. I valori di questa tensione e di queste pressioni riferiti all'unità di superficie sono uguali tra loro. Sono pure uguali all'energia elettrodinamica per unità di volume poiché questa energia, in seguito alla scelta delle coordinate, diventa

$$T = \frac{\alpha^2}{8\pi}$$

**208.** Applichiamo questi risultati al caso di un mezzo che trasmette onde piane, prendendo il piano  $xy$  parallelo all'onda e l'asse  $x$  parallelo al momento elettromagnetico.

Avendo la forza elettromotrice la stessa direzione del momento elettromagnetico, le linee di forza elettrica sono parallele all'asse  $x$ ; un elemento perpendicolare a questo asse è quindi sottoposto ad una tensione normale il cui valore per unità di superficie è pari all'energia elettrostatica  $W$  relativa all'unità di volume. Ma le linee di forza magnetica sono perpendicolari alle linee di forza elettrica poiché la forza elettromagnetica e la forza elettromotrice sono tra loro rettilinee; di conseguenza l'elemento considerato è parallelo alle linee di forza magnetica e di conseguenza è sottoposto ad una pressione normale il cui valore per unità di superficie è uguale all'energia elettrodinamica  $T$  riferita all'unità di volume. Essendo queste due quantità  $W$  e  $T$  sempre uguali tra loro (204), la pressione e la tensione che vengono esercitate sull'elemento si compensano.

Vedremo che lo stesso vale per un elemento perpendicolare all'asse  $y$ .

Per un elemento perpendicolare all'asse  $z$ , cioè parallelo al piano dell'onda, alla pressione elettromagnetica viene sommata la pressione elettrostatica, in modo che la pressione totale per unità di superficie sia uguale all'energia totale per unità di volume.

**209.** Maxwell ha calcolato la pressione esercitata su una superficie illuminata dal sole. Ammettendo che l'energia della luce che un forte raggio di sole invia su un metro quadrato sia di  $124,1 \text{ kgm/s}$ , l'energia media contenuta in un metro cubo di spazio attraversato dal raggio è di circa  $41,36 \times 10^{-8} \text{ kgm}$ ; quindi la pressione media per metro quadrato è  $41,36 \times 10^{-8}$  chilogrammi ovvero  $0,0004136 \text{ g}$ .

Poiché metà di questa pressione è uguale all'energia elettrostatica e all'energia elettrodinamica, è facile ottenere i valori della forza elettromotrice per unità di lunghezza e della forza elettromagnetica. Maxwell ha trovato che la forza elettromotrice è di circa 600 volt per metro e che la forza elettromagnetica è  $0,193$  nella misurazione elettromagnetica, ovvero poco più di un decimo della componente orizzontale del campo magnetico terrestre in Inghilterra.

## 210. Interpretazione delle pressioni elettrodinamiche.

Abbiamo sottolineato (84) che l'esistenza di pressioni elettrostatiche mal concorda con l'ipotesi fondamentale della localizzazione dell'energia nel mezzo dielettrico. Le pressioni elettrodinamiche

sono più facilmente interpretabili e in un libro di memorie pubblicato su *Philosophical Magazine*<sup>9</sup>, Maxwell ne ha dato una spiegazione che è di un certo interesse.

L'energia elettrodinamica  $\int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} d\tau$  interpretandola come energia cinetica, possiamo considerare il mezzo nel quale si effettuano i fenomeni elettrodinamici come costituiti da molecole dotate di moto di rotazione. Se  $\alpha', \beta', \gamma'$  sono le componenti del moto di rotazione di una molecola supposta libera, l'energia cinetica risultante da tale movimento è proporzionale a  $\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{2}$ . È quindi possibile identificare l'espressione dell'energia elettrodinamica con quella dell'energia del mezzo vorticoso prendendo le componenti della rotazione proporzionali a quelle della forza elettromagnetica. La direzione di questa forza diventa quindi quella dell'asse di rotazione della molecola.

Se assumiamo che questa molecola sia sferica, tenderà ad appiattirsi ai poli e a rigonfiarsi all'equatore. Un elemento di superficie perpendicolare all'asse di rotazione sarà sottoposto ad una forza normale diretta verso il centro della molecola; al contrario, un elemento posto sull'equatore parallelamente all'asse subirà una forza normale diretta verso l'esterno della molecola ruotante. Siccome l'asse di rotazione ha la stessa direzione della forza magnetica, un elemento perpendicolare a questa forza è quindi sottoposto a una tensione, mentre un elemento parallelo è sottoposto a una pressione. La differenza algebrica tra i valori di questa pressione e di questa tensione è dovuta alla forza centrifuga; essa è proporzionale a  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ , cioè al doppio dell'energia cinetica. Ritroveremo i risultati al paragrafo 307.

Nella sua tesi Maxwell suppone che la rotazione delle molecole magnetiche venga trasmessa dall'una all'altra mediante un meccanismo di connessione formato da piccole molecole sferiche il cui ruolo può essere paragonato a quello degli ingranaggi. L'induzione magnetica è poi dovuta all'inerzia delle sfere rotanti, la forza elettromotrice è la forza esercitata sul meccanismo di connessione, infine lo spostamento di energia elettrica è lo spostamento derivante dalle deformazioni di tale meccanismo.

---

<sup>9</sup>*Phil. Mag.* anni 1861 e 1962.



## 12. Polarizzazione rotatoria magnetica

### 211. Leggi del fenomeno

La rotazione del piano di polarizzazione della luce sotto l'influenza di un campo magnetico creato da magneti o correnti è il fenomeno più notevole tra quelli che evidenziano le azioni reciproche della luce e dell'elettricità. Scoperta da Faraday nel 1845, la polarizzazione magnetica rotatoria fu poi studiata da Verdet che stabilì le seguenti leggi:

1° La rotazione del piano di polarizzazione di una luce semplice è proporzionale allo spessore del mezzo attraversato dal raggio; varia approssimativamente in ragione inversa al quadrato della lunghezza d'onda della luce utilizzata;

2° È proporzionale alla componente dell'intensità del campo magnetico che segue la direzione del raggio; la rotazione è quindi massima quando la direzione del raggio coincide con quella del campo; varia come il coseno dell'angolo formato da queste due direzioni quando non coincidono;

3° Il suo modulo e il suo verso dipendono dalla natura del mezzo. I corpi diamagnetici deviano il piano di polarizzazione nel senso della corrente che, ruotando attorno al raggio, darebbe al campo la direzione della corrente; i corpi magnetici, come soluzioni di percloruro di ferro in alcool o etere, danno una rotazione inversa. Quest'ultima legge presenta però alcune eccezioni; così il cromato neutro di potassa, benché diamagnetico, produce, come il percloruro di ferro, una rotazione in senso contrario a quello della corrente.

**212.** Una differenza importante distingue la polarizzazione rotatoria magnetica dalla polarizzazione rotatoria che alcune sostanze cristallizzate come il quarzo e diversi liquidi come la trementina presentano naturalmente.

In quest'ultimo fenomeno la rotazione del piano di polarizzazione è ancora proporzionale allo spessore della sostanza attraversata, ma il verso di tale rotazione cambia contemporaneamente alla direzione di propagazione del raggio; in altre parole il verso di rotazione rimane sempre lo stesso per un osservatore che si posiziona in modo da ricevere il raggio di luce. Di conseguenza, i piani di polarizzazione di due raggi che attraversano, in direzioni opposte, lo stesso spessore di una sostanza attiva, subiscono deviazioni uguali ma in direzioni opposte. Ne consegue che se un raggio polarizzato rettilineamente, dopo aver attraversato una sostanza, si riflette su se stesso in modo da attraversarla una seconda volta in senso opposto, il piano di polarizzazione della luce emergente si confonde con quello della luce incidente.

Nella polarizzazione magnetica rotatoria il verso di rotazione è indipendente dalla direzione del raggio; dipende solo, per una data sostanza, dalla direzione del campo magnetico. Un raggio luminoso che per mezzo di una riflessione viene fatto passare due volte in direzioni opposte attraverso questa sostanza, subisce quindi una rotazione doppia rispetto a quella che risulterebbe da un unico passaggio.

Si è sfruttata questa proprietà per aumentare notevolmente la rotazione osservata facendo passare più volte lo stesso raggio *S* attraverso la sostanza, utilizzando due specchi piani *M* e *M'* (fig. 34) disposti quasi normalmente alla direzione del raggio. Questo trucco e l'uso di un campo magnetico molto potente hanno permesso a M. H. Becquerel e M. Bichat di scoprire quasi contemporaneamente il potere rotatorio dei gas che era sfuggito alle osservazioni di Faraday e Verdet.

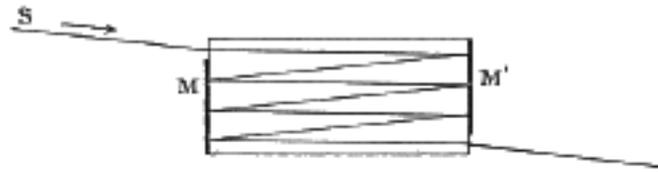


Fig. 34.

### 213. Tentativi di spiegare la polarizzazione magnetica rotatoria

Prima di Maxwell erano stati fatti diversi tentativi per spiegare la rotazione del piano di polarizzazione sotto l'influenza di un campo magnetico.

Nell'anno successivo alla scoperta di Faraday, Airy<sup>1</sup> propose diverse formule che esprimevano questa rotazione in funzione della lunghezza d'onda nel vuoto della luce utilizzata e dell'indice di rifrazione della sostanza per questa luce. Airy era stato portato a queste formule dal precedente lavoro di Mac-Cullagh sulla polarizzazione rotatoria del quarzo. Come abbiamo visto in un altro lavoro<sup>2</sup> la rotazione del piano di polarizzazione di un raggio che si propaga lungo l'asse del cristallo si spiega con l'aggiunta di alcune derivate del terzo ordine delle componenti dello spostamento di una molecola d'etere ai secondi membri delle equazioni del moto di questa molecola; queste equazioni diventano allora, se prendiamo come direzione del raggio luminoso l'asse  $z$

$$\begin{aligned}\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2\xi}{dz^2} + a \frac{d^2\eta}{dz^2} \\ \rho \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2\eta}{dz^2} - a \frac{d^2\xi}{dz^2}\end{aligned}$$

Sostituendo alle derivate del terzo ordine, rispetto a  $z$ , le derivate dello stesso ordine prese rispetto a  $z$  e a  $t$ ,  $+\frac{d^3\eta}{dz^2 dt}$  e  $-\frac{d^3\xi}{dz^2 dt}$ , Airy ottenne la formula

$$\theta = m \frac{i^2}{\lambda^2} \left( i - \lambda \frac{di}{dt} \right) \quad (I)$$

dove  $m$  è un coefficiente dipendente dall'intensità del campo magnetico,  $\lambda$  la lunghezza d'onda nel vuoto,  $i$  l'indice di rifrazione. La sostituzione delle derivate del terzo ordine prese unicamente rispetto al tempo  $+\frac{d^3\eta}{dt^3}$  e  $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$ , porta ad un'altra formula

$$\theta = m \frac{1}{\lambda^2} \left( i - \lambda \frac{di}{dt} \right) \quad (II)$$

Infine, prendendo le derivate del primo ordine rispetto al tempo  $+\frac{d\eta}{dt}$  e  $-\frac{d\xi}{dt}$ , si arriva a una terza formula

$$\theta = m \left( i - \lambda \frac{di}{dt} \right) \quad (III)$$

**214.** Sebbene molto diverse, queste formule rendevano conto dei fatti osservati da Faraday che non aveva effettuato alcuna misurazione quantitativa. Questo fisico aveva solo dimostrato che la rotazione dipende dalla natura della radiazione notando che con la luce bianca l'immagine data dall'analizzatore presenta colorazioni che variano rapidamente con la posizione della sua sezione principale; ogni formula contenente la lunghezza d'onda era quindi accettabile. Nel 1847, Becquerel<sup>3</sup> paragonò il fenomeno di Faraday alla polarizzazione rotatoria esibita dall'acqua zuccherata; trovò che questi due fenomeni erano assolutamente analoghi; di conseguenza alla polarizzazione magnetica rotatoria sembrava applicabile la legge di Biot, cioè che la rotazione

<sup>1</sup>*Philosophical Magazine*, giugno 1846.

<sup>2</sup>*Théorie mathématique de la Lumière*, p. 182.

<sup>3</sup>*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXI, p. 952.

doveva essere inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda. La formula (III), che è lungi dal soddisfare questa condizione, dovrebbe quindi essere respinta.

Esperimenti diretti, eseguiti con la massima cura, furono intrapresi da Verdet, nel 1863, per misurare la rotazione del piano di polarizzazione di radiazioni semplici, di lunghezze d'onda note, sotto l'influenza di un campo magnetico; i loro risultati sono stati confrontati con i valori forniti da ciascuna delle formule precedenti in cui il coefficiente  $m$  era determinato utilizzando i dati di un esperimento. Come era prevedibile dai risultati del signor Becquerel, la formula (III) dà numeri che si discostano notevolmente da quelli forniti dall'esperimento; la formula (II) è più adatta, ma è preferibile la formula (I); in particolare, per il solfuro di carbonio, i numeri dati da quest'ultima formula differiscono dai risultati dell'esperimento solo per una quantità dell'ordine dell'errore sperimentale. Delle tre formule proposte da Airy, la prima è quindi l'unica da mantenere.

**215.** Ma se l'accordo della formula (I) con l'esperienza giustifica l'introduzione delle derivate  $+\frac{d^3\eta}{dt^3}$  e  $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$  nei secondi membri delle equazioni del moto di una molecola d'etere, nessuna considerazione teorica governa la scelta di queste derivate, ad esclusione delle altre; quindi non possediamo ancora una teoria della polarizzazione magnetica rotatoria. È vero che Airy non aveva proposto le sue formule per dare una spiegazione meccanica della rotazione del piano di polarizzazione ma solo, disse, "per mostrare che può essere spiegata da equazioni che sembrano di natura deducibile da qualche ipotesi meccanica plausibile, anche se non abbiamo ancora formulato questa ipotesi.»

Alcuni anni prima degli esperimenti di Verdet, M. Ch. Neumann<sup>4</sup> aveva tentato di colmare questa lacuna. Neumann suppone che le molecole del fluido elettrico delle correnti di particelle che, secondo Ampère, hanno origine all'interno di un corpo magnetizzato, agiscono sulle molecole dell'etere; ammette inoltre che queste azioni reciproche, come quelle che avvengono tra due molecole elettriche nella teoria di Weber, siano modificate dal movimento relativo di queste molecole. Da queste ipotesi consegue che una molecola di etere è soggetta non solo alle forze risultanti dall'elasticità dell'etere, ma anche da forze, variabili nel tempo, provenienti dalle azioni delle molecole elettriche vicine. Neumann dimostra che la risultante di queste ultime forze è in ogni istante proporzionale alla velocità della molecola dell'etere e alla forza magnetica e perpendicolare al piano di queste due direzioni. Consideriamo pertanto un'onda piana che si propaga lungo la direzione del campo magnetico, e se prendiamo il piano  $xy$  parallelo all'onda, le componenti lungo gli assi  $x$  e  $y$  di questa risultante avranno rispettivamente valori per

$$+a\frac{d\eta}{dt} \quad e \quad -a\frac{d\xi}{dt}$$

essendo  $a$  un coefficiente proporzionale all'intensità del campo. Avremo quindi per le equazioni del moto di una molecola d'etere

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dz^2} + a\frac{d\eta}{dt}$$

$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dz^2} - a\frac{d\xi}{dt}$$

Queste equazioni differiscono da quelle di Mac-Cullagh (213) solo per la sostituzione delle derivate di  $\eta$  e  $\xi$  rispetto a  $t$  con le derivate del terzo ordine di queste stesse quantità rispetto a  $z$ ; di conseguenza devono condurre per il valore della rotazione del piano di polarizzazione alla formula (III), formula in completo disaccordo con l'esperienza. La teoria di Neumann, pur notevole per la semplicità delle ipotesi, deve quindi essere respinta.

**216.** Così, al tempo in cui Maxwell scrisse il suo Trattato, si riconobbe che la teoria di Neumann portava a una formula in completa contraddizione con i risultati sperimentali, e che, tra le formule proposte da Airy, la formula (I) era quella che meglio concordava con questi

<sup>4</sup>Die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes, Halle, 1863.

risultati. Era quindi sufficiente, per ottenere una teoria accettabile della polarizzazione magnetica rotatoria, spiegare con ipotesi plausibili l'aggiunta delle due derivate del terzo ordine  $+\frac{d^3\eta}{dt^3}$  e  $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$  alle equazioni del moto di una molecola d'etere in un mezzo isotropo.

Osserviamo che l'introduzione delle derivate nelle equazioni del moto può, indipendentemente da qualsiasi idea teorica, essere realizzata in due modi diversi.

Per mostrarlo ricordiamo in poche parole come si arriva alle equazioni del moto di una molecola di etere in un mezzo isotropo<sup>5</sup>. Se chiamiamo  $U$  la funzione delle forze che risultano dall'elasticità dell'etere quando si propaga una vibrazione in questo mezzo, il movimento di una molecola di massa  $m$  che subisce uno spostamento  $\xi$  lungo l'asse  $x$ , è dato dall'equazione:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi} \quad (1)$$

dove  $\xi$  è solo una delle componenti dello spostamento; essendo  $\eta$  e  $\zeta$  le altre due componenti, avremo anche due equazioni analoghe. Quando si ammette che le forze esercitate tra le molecole agiscono solo a distanze eccessivamente piccole, la funzione  $U$  si può scrivere

$$U = \int W d\tau$$

essendo  $W$  il valore della funzione delle forze, riferito all'unità di volume, nel punto occupato dall'elemento  $d\tau$ , ed essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio occupato dall'etere. Lo studio di  $W$  mostra che è una funzione delle derivate parziali di diversi ordini di  $\xi, \eta, \zeta$  rispetto alle coordinate  $x, y, z$ , e, con diverse trasformazioni, si arriva a mettere le equazioni del moto (1) nella forma

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = - \sum \frac{d}{dx} \frac{dW}{d\xi'} + \sum \frac{d^2}{dx^2} \frac{dW}{d\xi''} - \dots$$

essendo  $\xi'$  una qualunque delle derivate di  $\xi$  rispetto a  $x, y, z$ ;  $\xi''$  una qualunque delle derivate seconde di  $\xi$  rispetto a queste stesse variabili. Queste equazioni ci mostrano che i termini di  $W$  che contengono solo queste derivate alla prima potenza devono scomparire quando si assumono spostamenti periodici. Di conseguenza, se trascuriamo i termini di terzo grado rispetto a tali derivate e se designiamo con  $W_2$  l'insieme dei termini di secondo grado, l'equazione precedente diventa

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = - \sum \frac{d}{dx} \frac{dW_2}{d\xi'} + \sum \frac{d^2}{dx^2} \frac{dW_2}{d\xi''} \quad (2)$$

In generale, il secondo membro di questa equazione contiene derivate di  $\xi, \eta, \zeta$  rispetto a  $x, y, z$ , di ogni ordine a partire dal secondo, ma per i mezzi isotropi scompaiono le derivate di ordine dispari. Questa equazione si semplifica ulteriormente in questo caso, quando consideriamo un'onda piana perpendicolare all'asse  $z$ ; restano solo le derivate di ordine pari di  $\xi$  rispetto a  $z$ . Si può quindi scrivere l'equazione precedente

$$\rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = A_0 \frac{d^2\xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4\xi}{dz^4} + \dots \quad (3)$$

Le altre due equazioni del moto si otterrebbero sostituendo in questa,  $\xi$  con  $\eta$ , poi con  $\zeta$ .

Ma le equazioni generali come la (2) si possono mettere nella forma indicata da Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\xi'} - \frac{dT}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi} \quad (4)$$

dove  $U$  ha lo stesso significato del precedente e  $T$  indica l'energia cinetica

$$T = \frac{\rho}{2} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

<sup>5</sup>*Théorie mathématique de la Lumière*, pp. 1 a 48 e 176 a 182.

rappresentando  $\xi', \eta', \zeta'$  le derivate rispetto al tempo. Essendo quest'ultima equazione solo una trasformazione della (2), è ovvio che può contenere, come questa, solo derivate di ordine pari nel caso di un mezzo isotropo. Di conseguenza, affinché le equazioni del moto contengano derivate di ordine dispari è necessario introdurre termini complementari, sia nell'espressione della funzione  $U$  relativa ai corpi isotropi, sia al contrario nell'espressione di  $T$  dell'energia cinetica. Si hanno quindi due modi diversi per arrivare alle formule di Airy.

**217.** Nelle teorie ordinarie della luce è la funzione  $U$  che, cambiata di segno, rappresenta l'energia potenziale del mezzo, che si modifica ogni volta che si tratta di spiegare i fenomeni presentati dai mezzi anisotropi. Nella teoria della polarizzazione rotatoria di Maxwell, è invece l'energia cinetica  $T$  ad essere modificata, mantenendo  $U$  la stessa espressione che in un mezzo isotropo. Quanto alle ragioni addotte da questo fisico per giustificare questa modifica e soprattutto per arrivare ai termini complementari che dovrebbero essere introdotti in  $T$  per ritrovare la formula (I), esse lasciano molto a desiderare in termini di precisione e chiarezza. Torneremo su questo più tardi; per il momento accettiamo senza spiegazione il risultato delle speculazioni di Maxwell e mostriamo come l'equazione (4), e le due che se ne deducono dalla sostituzione di  $\eta$  e  $\zeta$  con  $\xi$ , portano, nel caso di un'onda piana, alla formula (I).

Se poniamo

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} + \beta \frac{d\varphi}{dy} + \gamma \frac{d\varphi}{dz}$$

essendo  $\varphi$  una funzione qualunque e  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti della forza magnetica, il termine complementare introdotto da Maxwell nell'energia cinetica ha per espressione

$$C \int \left[ \xi' \frac{d}{d\nu} \left( \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) + \eta' \frac{d}{d\nu} \left( \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) + \zeta' \frac{d}{d\nu} \left( \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \right] d\tau$$

Nel caso di un'onda piana parallela al piano  $xy$ , le componenti  $\xi, \eta, \zeta$  non dipendono né da  $x$ , né da  $y$ ; pertanto si ha

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \gamma \frac{d\varphi}{dz}$$

e il termine complementare si riduce a

$$C \int \gamma \left( \eta' \frac{d^2\xi}{dz^2} - \xi' \frac{d^2\eta}{dz^2} \right) d\tau$$

L'energia cinetica è quindi uguale a

$$T = \frac{\rho}{2} \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) d\tau + C \int \gamma \left( \eta' \frac{d^2\xi}{dz^2} - \xi' \frac{d^2\eta}{dz^2} \right) d\tau$$

**218.** Cerchiamo ciò che diviene l'equazione (4) quando si introduce questo valore di  $T$ .

Se supponiamo  $\gamma$  costante, abbiamo

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\xi'} = \int \left( \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} - C\gamma \frac{d^2\eta}{dt^2} \right) d\tau$$

Il termine principale di  $T$  non dà nulla in  $\frac{dT}{d\xi}$ ; quanto al termine complementare, bisogna trasformarlo per poter calcolare la sua derivata rispetto a  $\xi$ . Si può scrivere

$$\int \eta' \frac{d^2\xi}{dz^2} d\tau = \int \lambda \eta' \frac{d\xi}{dz} d\omega - \int \frac{d\eta'}{dz} \frac{d\xi}{dz} d\tau$$

essendo il primo integrale del secondo membro esteso alla superficie del volume considerato, e  $\lambda$  designando il coseno dell'angolo formato dall'asse  $x$  con la normale all'elemento  $d\omega$  di

tale superficie. Se supponiamo che gli integrali di volume estesi all'intero spazio gli elementi dell'integrale doppio si riferiscono solo a punti situati all'infinito. Siccome si può supporre che gli elementi di questo integrale sono nulli e possiamo scrivere

$$\int \eta' \frac{d^2 \xi}{dz^2} d\tau = - \int \frac{d\eta'}{dz} \frac{d\xi}{dz} d\tau$$

Effettuando una trasformazione analoga per l'integrale del secondo membro dell'uguaglianza precedente, otteniamo

$$- \int \frac{d\eta'}{dz} \frac{d\xi}{dz} d\tau = \int \xi \frac{d^2 \eta'}{dz^2} d\tau$$

La derivata rispetto a  $\xi$  di quest'ultimo integrale è

$$\int \frac{d^2 \eta'}{dz^2} d\tau$$

di conseguenza il termine complementare di  $T$  dà

$$-C\gamma \int \frac{d^3 \eta}{dz^2 dt} d\tau$$

nell'equazione (4) e quella si può scrivere

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3 \eta}{dz^2 dt} = \frac{dW}{d\xi}$$

Secondo Cauchy  $\frac{dW}{d\xi}$  ha per espressione in un mezzo isotropo

$$A_0 \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4 \xi}{dz^4} + \dots$$

Questo è anche ciò che risulta dalla forma del membro destro dell'equazione (3). L'equazione (4) e ciò che da essa si deduce sostituendo  $\xi$  con  $\eta$ , diventano quindi

$$\begin{cases} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3 \eta}{dz^2 dt} = A_0 \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_1 \frac{d^4 \xi}{dz^4} + \dots \\ \rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3 \xi}{dz^2 dt} = A_0 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_1 \frac{d^4 \eta}{dz^4} + \dots \end{cases}$$

**219.** Cerchiamo di soddisfare a queste condizioni ponendo:

$$\begin{cases} \xi = r \cos (nt - qz) \\ \eta = r \sin (nt - qz) \end{cases} \quad (7)$$

uguaglianze che esprimono che la molecola considerata descrive una circonferenza di raggio  $r$ . Sostituendo questi valori di  $\xi$  e  $\eta$ , otteniamo, eliminati i fattori comuni, l'equazione di condizione.

$$\rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = A_0 q^2 + A_1 q^4 + \dots \quad (8)$$

Dividendo i due membri per  $q^2$  abbiamo un'equazione quadratica in  $\frac{n}{q}$ . Questo rapporto esprime la velocità di propagazione del moto e abbiamo quindi due valori per questa velocità. Ma essendo il coefficiente  $A_0$  positivo ed essendo i coefficienti  $A_1, \dots$  molto piccoli, uno di questi valori è negativo e non c'è motivo di considerarlo, se ci occupiamo solo dei fenomeni che si verificano al di sopra del piano  $xy$ .

Se diamo a  $n$  due valori diversi solo nel segno, ciò che corrisponde a due molecole che descrivono la circonferenza di raggio  $r$  in senso inverso, i valori positivi di  $\frac{n}{q}$  sono diversi, purché però  $\gamma$  non sia nullo. Un raggio destro quindi non si propaga con la stessa velocità di un raggio circolare

sinistro, di conseguenza uno di essi anticipa l'altro e se questi raggi provengono dallo stesso raggio polarizzato rettilineamente essi si compongono all'uscita dal mezzo per dare un raggio polarizzato rettilineamente ma il cui piano di polarizzazione non ha lo stesso azimut della luce incidente; si ha quindi rotazione del piano di polarizzazione.

**220.** Valutiamo questa rotazione. Si sa che è uguale alla metà della differenza di fase che i raggi destro e sinistro si contraggono, l'uno rispetto all'altro, quando attraversano il mezzo e che avviene nel verso del moto delle molecole del raggio che va più veloce. Se quindi designiamo con  $q'$  e con  $q''$  i valori di  $q$  per il raggio destro e per il raggio sinistro e con  $c$  lo spessore del mezzo attraversato, il piano di polarizzazione ruoterà in senso orario di un angolo uguale a

$$\theta = \frac{c}{2} (q'' - q')$$

Ma secondo l'equazione delle condizioni (8),  $q$  dipende da  $\gamma$ . Poiché inoltre la variazione di  $q$  dovuta all'azione magnetica è sempre solo una piccolissima frazione del valore di  $q$  stesso, possiamo scrivere

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma} \gamma$$

essendo  $q_0$  il valore di  $q$  per una forza magnetica nulla. Questa quantità  $q_0$  deve quindi soddisfare all'equazione (8) nella quale si prende  $\gamma = 0$ ; di conseguenza si ha

$$\rho n^2 = A_0 q_0^2 + A_1 q_0^4 + \dots$$

Le quantità  $q'$  e  $q''$  devono soddisfare questa stessa equazione (8) in cui si assegnano a  $n$  valori diversi solo per il segno; al valore positivo di  $n$  corrisponderà il valore  $q''$  poiché secondo le equazioni (7) si ha un raggio circolare sinistro che si propaga nella direzione positiva dell'asse  $z$  quando  $n$  è positivo; al contrario, il valore negativo di  $n$  corrisponderà al valore  $q'$ ; quindi avremo

$$\begin{aligned} \rho n^2 + 2C\gamma q'^2 n &= A_0 q'^2 + A_1 q'^4 + \dots \\ \rho n^2 + 2C\gamma q''^2 n &= A_0 q''^2 + A_1 q''^4 + \dots \end{aligned}$$

Il confronto tra le tre ultime relazioni mostra immediatamente che si ha  $q' > q''$  e  $q'' > q_0$ ; dobbiamo pertanto scrivere

$$q' = q_0 + \frac{dq'}{d\gamma} \gamma \quad q'' = q_0 + \frac{dq''}{d\gamma} \gamma$$

Se portiamo questi valori di  $q'$  e  $q''$  nell'espressione della rotazione, otteniamo

$$\theta = -\frac{c\gamma}{2} \left( \frac{dq'}{d\gamma} + \frac{dq''}{d\gamma} \right)$$

o confondendo i valori delle derivate di  $q'$  e  $q''$  rispetto a  $\gamma$

$$\theta = -c\gamma \frac{dq}{d\gamma} \quad (9)$$

**221.** Derivando rispetto a  $\gamma$  i due membri della (8) dove consideriamo  $n$  come costante, abbiamo

$$-2Cq^2 n - 4C\gamma q n \frac{dq}{d\gamma} = (2A_0 q + 4A_1 q^3 + \dots) \frac{dq}{d\gamma} = \frac{dQ}{dq} \frac{dq}{d\gamma}$$

Ma ammettere, come abbiamo fatto, che la quantità  $q$  varia molto poco sotto l'influenza di un campo magnetico, significa supporre che il coefficiente  $C$  è molto piccolo. Possiamo quindi trascurare il termine  $4C\gamma q n \frac{dq}{d\gamma}$  rispetto ai termini del secondo membro, e viene allora

$$\frac{dq}{d\gamma} = -2Cq^2 n \frac{1}{\frac{dQ}{dq}} \quad (10)$$

Se ora, nella (8) consideriamo  $\gamma$  come costante, abbiamo, derivando rispetto a  $n$

$$2\rho n - 2C\gamma q^2 n - 4C\gamma q n \frac{dq}{dn} = (2A_0 q + 4A_1 q^3 + \dots) \frac{dq}{dn} = \frac{dQ}{dq} \frac{dq}{dn}$$

Per la stessa ragione precedente il termine  $2C\gamma q^2 n$  può essere trascurato rispetto a  $2\rho n$  e il termine  $4C\gamma q n \frac{dq}{dn}$  rispetto a quelli del secondo membro; di conseguenza otteniamo

$$2\rho n = \frac{dQ}{dq} \frac{dq}{dn}$$

Se portiamo nella relazione (10) il valore di  $\frac{dQ}{dq}$  ricavato da quest'ultima uguaglianza, abbiamo per il valore della derivata parziale  $\frac{dq}{d\gamma}$

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{Cq^2}{\rho} \frac{dq}{dn} \quad (11)$$

Per esprimere questa derivata in funzione della lunghezza d'onda nel vuoto  $\lambda$ , della luce considerata e dell'indice di rifrazione  $i$  del mezzo, osserviamo che si ha

$$q\lambda = 2\pi i \quad n\lambda = 2\pi V$$

essendo  $V$  la velocità di propagazione nel vuoto. Da queste due relazioni ricaviamo

$$q = \frac{in}{V}$$

e di conseguenza

$$\frac{dq}{dn} = \frac{1}{V} \left( i + n \frac{di}{dn} \right) \quad (12)$$

Inoltre, differenziando la seconda, otteniamo

$$\lambda dn + n d\lambda = 0$$

da cui

$$\frac{n}{dn} = -\frac{\lambda}{d\lambda} \quad n \frac{di}{dn} = -\lambda \frac{di}{d\lambda}$$

L'uguaglianza (12) si può quindi scrivere

$$\frac{dq}{dn} = \frac{1}{V} \left( i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right)$$

se portiamo questo valore nella (11) e se in questa relazione sostituiamo  $q$  con il suo valore  $\frac{2\pi i}{\lambda}$ , otteniamo

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\frac{4\pi^2 C}{\rho V} \frac{i^2}{\lambda^2} \left( i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right)$$

Di conseguenza ponendo

$$\frac{4\pi^2 C}{\rho V} = m$$

il valore della rotazione data dalla formula (9) diverrà

$$\theta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2} \left( i - \lambda \frac{di}{d\lambda} \right)$$

Ritroveremo pertanto la formula (I) di Airy.

## 222. Interpretazione del termine complementare dell'energia cinetica

Si tratta ora di spiegare l'introduzione del termine complementare (5) nell'espressione dell'energia cinetica del mezzo. Come abbiamo detto, le spiegazioni di Maxwell non hanno tutto il rigore che ci si aspetterebbe di trovarvi. Proviamo però a riprodurle.

Maxwell pone così la questione: L'esperienza insegna che un mezzo isotropo sottoposto all'azione di un campo magnetico ruota il piano di polarizzazione della luce; di conseguenza un raggio polarizzato circolarmente non si propaga con la stessa velocità a seconda che sia destro o sinistro. Ora se le componenti dello spostamento di una molecola di etere sono espresse dalle equazioni (7), avremo un raggio circolare destro o sinistro a seconda che  $n$  sia negativo o positivo. La velocità di propagazione di  $z$  è  $\frac{n}{q}$ ; siccome deve avere un valore diverso per il raggio destro e per il sinistro, a due valori di  $n$  diversi solo per il segno devono corrispondere due valori di  $q$  diversi e di segno contrario; ossia, ciò che è lo stesso, a un valore di  $q$  devono corrispondere due valori di  $n$  che differiscono per il valore assoluto e per il segno. Ma l'ambiente considerato costituisce un sistema dinamico il cui stato è determinato, in ogni istante, da un certo numero di equazioni. Dobbiamo quindi tenere conto del fatto che per un determinato valore dato all'una o all'altra delle quantità  $q$  e  $r$ , esistono due valori distinti di  $n$  che soddisfano queste equazioni.

Scriviamo l'equazione di Lagrange relativa a il parametro  $r$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} = \frac{dU}{dr}$$

Questo parametro ha un valore determinato e non cambia nel tempo,  $r'$  è nullo; di conseguenza il primo termine scompare dall'equazione precedente, che diventa

$$\frac{dT}{dr} + \frac{dU}{dr} = 0$$

Ma  $T$ , energia cinetica del sistema, è una funzione omogenea del secondo grado delle velocità di questo sistema;  $T$  contiene quindi  $n^2$ , poiché  $n$  è la velocità angolare di una molecola di etere. Può anche contenere termini in cui si trovano i prodotti di  $n$  per altre velocità e anche termini in cui queste velocità entrano al secondo grado ma dove  $n$  non appare. Quanto ad  $U$ , Maxwell suppone che conservi il valore che possiede in un mezzo isotropo non soggetto all'azione del magnetismo; di conseguenza  $U$  contiene derivate solo di  $\xi$  e  $\eta$  rispetto a  $z$ ; non contiene quindi  $n$ . Di conseguenza l'espressione più generale dell'equazione di Lagrange che abbiamo appena considerato è

$$An^2 + Bn + C = 0$$

Poiché, secondo quanto esposto, questa equazione deve essere soddisfatta per due valori di  $n$  diversi in valore assoluto,  $B$  deve necessariamente essere diverso da zero. Poiché i termini  $Dn$  provengono solo dall'energia cinetica, questa contiene quindi almeno due serie di termini. L'uno,  $An^2$ , è omogeneo e di secondo grado rispetto a  $n$ ; è l'espressione dell'energia cinetica di un mezzo non sottoposto all'azione del magnetismo. L'altro contiene la prima potenza di  $n$ ; è dovuto al campo magnetico e, di conseguenza, rappresenta il termine complementare che necessita di essere spiegato o almeno una parte di questo termine.

**223.** Ecco ora le conclusioni che Maxwell deduce da ciò che precede:

“Tutti i termini di  $T$  sono di secondo grado rispetto alle velocità. Dunque i termini che contengono  $n$  devono contenere qualche altra velocità. Ora quest'altra velocità non può essere né  $r'$  né  $q'$ , poiché, nel caso che consideriamo,  $r$  e  $q$  sono costanti. È dunque una velocità esistente nel mezzo, indipendentemente dal movimento che costituisce la luce. Inoltre deve essere una quantità avente un rapporto con  $n$  tale che moltiplicandola per  $n$  il risultato sia una quantità scalare; poiché, essendo  $T$  una quantità scalare, i suoi termini possono essere solo quantità scalari. Pertanto questa velocità deve essere nella stessa direzione di  $n$  o nella direzione opposta, cioè deve essere una *velocità angolare* rispetto all'asse  $z$ .”

“Ora questa velocità non può essere indipendente dalla forza magnetica; perché, se si riferisse ad una direzione fissa nel mezzo, i fenomeni sarebbero diversi quando si ruota il mezzo da un capo all’altro, il che non è il caso.

“Siamo quindi portati a questa conclusione, che tale velocità è necessariamente legata alla forza magnetica, nel mezzo dove si manifesta la rotazione magnetica del piano di polarizzazione (*Trattato dell’elettricità*, vol. II, § 820).»

Un po’ oltre (§ 822), Maxwell aggiunge:

“Quando si studia l’azione del magnetismo sulla luce polarizzata, si è quindi portati a concludere che, in un mezzo sottoposto all’azione di una forza magnetica, una parte del fenomeno è dovuta a qualcosa che, per sua natura matematica, approssima una velocità angolare agente attorno ad un asse diretto lungo la forza magnetica.

“Questa velocità angolare non può essere quella di nessuna parte di dimensione finita del mezzo, rotante con un movimento d’insieme. Dobbiamo quindi pensare che questa rotazione è quella di piccolissime parti del mezzo che ruotano ciascuna attorno al proprio asse. Questa è l’ipotesi del vortice molecolare.»

**224.** Così, secondo Maxwell, la spiegazione della polarizzazione magnetica rotatoria deve derivare dall’esistenza di vortici nel mezzo sottoposto all’azione di un campo magnetico, vortici che abbiamo già visto intervenire nell’interpretazione dell’elettrodinamica delle pressioni (210). Ma quali sono le leggi che governano i movimenti di questi vortici? Maxwell ammette la nostra assoluta ignoranza in materia e, in mancanza di meglio, ammette che i vortici di un mezzo magnetico sono soggetti alle stesse condizioni che Helmholtz<sup>6</sup> ha introdotto in Idrodinamica, e che le componenti di un vortice in un punto sono uguali a quelle della forza magnetica in quel punto.

Una delle proprietà dei vortici di Helmholtz si può enunciare come segue: siano P e Q due molecole vicine sull’asse di un vortice; se il movimento del mezzo ha l’effetto di portare le molecole in P’ e Q’, la retta P’Q’ rappresenta la direzione dell’asse del vortice, e l’entità di quest’ultimo è modificata nel rapporto tra PQ e P’Q’.

Se applichiamo questa proprietà ai vortici di un mezzo soggetto al magnetismo, avremo, chiamando  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti della forza magnetica nel punto P,  $\alpha', \beta', \gamma'$ , le componenti in questa stessa forza quando il punto P è giunto in P’, e  $\xi, \eta, \zeta$  le componenti dello spostamento del punto P.

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + \alpha \frac{d\xi}{dx} + \beta \frac{d\xi}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dz} \\ \beta' = \beta + \alpha \frac{d\eta}{dx} + \beta \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\eta}{dz} \\ \gamma' = \gamma + \alpha \frac{d\zeta}{dx} + \beta \frac{d\zeta}{dy} + \gamma \frac{d\zeta}{dz} \end{cases} \quad (12)$$

**225.** Le componenti della velocità angolare di un elemento del mezzo valgono

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \right) \\ \omega_3 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \end{cases} \quad (13)$$

Ora, poiché secondo le conclusioni del § 223 l’energia cinetica deve contenere tale velocità, il termine corrispondente, nel caso in cui gli assi coordinati siano arbitrari rispetto alla direzione della forza magnetica, dovrà essere della forma

$$2C (\omega_1 \alpha + \omega_2 \beta + \omega_3 \gamma)$$

e il termine complementare dell’energia cinetica di un certo volume del mezzo vale

$$2C \int (\omega_1 \alpha + \omega_2 \beta + \omega_3 \gamma) d\tau$$

<sup>6</sup> *Sur le mouvement tourbillonnaire; Journal de Crelle*, vol. LV, 1858.

Se in questa espressione sostituiamo  $\alpha', \beta', \gamma'$  con i valori (12) e  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  con i valori (13), otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} C \int \left[ \alpha \left( \frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz} \right) + \beta \left( \frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx} \right) + \gamma \left( \frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy} \right) \right] d\tau \\ + C \int \left[ \alpha \frac{d\xi}{dx} \left( \frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz} \right) + \beta \frac{d\xi}{dy} \left( \frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz} \right) + \gamma \frac{d\xi}{dz} \left( \frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz} \right) \right] d\tau \\ + C \int \left[ \alpha \frac{d\eta}{dx} \left( \frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx} \right) + \beta \frac{d\eta}{dy} \left( \frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx} \right) + \gamma \frac{d\eta}{dz} \left( \frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx} \right) \right] d\tau \\ + C \int \left[ \alpha \frac{d\zeta}{dx} \left( \frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy} \right) + \beta \frac{d\zeta}{dy} \left( \frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy} \right) + \gamma \frac{d\zeta}{dz} \left( \frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy} \right) \right] d\tau \end{array} \right. \quad (14)$$

Mostriamo che se si estende l'integrazione all'intero spazio il primo integrale di tale somma è zero nel caso che ci riguarda. Infatti, integrando per parti, il primo termine di questo integrale dà

$$\int \alpha \frac{d\zeta'}{dy} d\tau = \int \alpha \zeta' dx dy - \int \zeta' \frac{d\alpha}{dy} d\tau$$

L'integrale di superficie si riferisce alla superficie limitata, che è all'infinito secondo la nostra ipotesi,  $\zeta'$  e  $\alpha$  sono nulli; di conseguenza l'integrale stesso è uguale a zero. Nell'integrale triplo del secondo membro entra la derivata  $\frac{d\alpha}{dy}$ ; se quindi il campo magnetico è uniforme, come è in genere il caso quando si studia la polarizzazione rotatoria magnetica, questa derivata è nulla e l'integrale triplo lo è pure. Prendendo così successivamente tutti i termini del primo integrale dell'espressione del termine complementare, si vedrà che essi sono tutti uguali a zero. Bisogna quindi considerare solo gli altri tre integrali di questa espressione.

Questi possono essere messi in un'altra forma. Consideriamo infatti il primo termine del primo di essi; otteniamo, integrando per parti

$$\int \alpha \frac{d\xi}{dx} \frac{d\zeta'}{dy} d\tau = \int \alpha \zeta' \frac{d\xi}{dx} dx dz - \int \alpha \zeta' \frac{d^2\xi}{dx dy} d\tau$$

o, poiché l'integrale di superficie è nullo per le stesse ragioni precedenti

$$\int \alpha \frac{d\xi}{dx} \frac{d\zeta'}{dy} d\tau = - \int \alpha \zeta' \frac{d^2\xi}{dx dy} d\tau$$

Il secondo termine del penultimo integrale del termine complementare ci dà, operando allo stesso modo,

$$- \int \alpha \frac{d\eta}{dx} \frac{d\zeta'}{dx} d\tau = + \int \alpha \zeta' \frac{d^2\eta}{dx^2} d\tau$$

e abbiamo per la somma dei due termini considerati

$$\int \alpha \zeta' \frac{d}{dx} \left( \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) d\tau$$

Una trasformazione analoga effettuata su tutti i termini ed un opportuno raggruppamento degli stessi mostrerà che l'espressione (14) si riduce all'espressione (5) che abbiamo introdotto (217) come termine complementare nell'energia cinetica del mezzo soggetto alla azione del magnetismo.

## 226. Difficoltà sollevate dalla teoria di Maxwell

Nella teoria appena analizzata Maxwell sembra aver abbandonato completamente la teoria elettromagnetica della luce. Abbiamo, infatti, implicitamente ammesso con questo fisico, che quando un'onda si propaga in un mezzo posto in un campo magnetico, le componenti  $\xi, \eta, \zeta$  dello spostamento di una molecola di etere, non dipendono direttamente dalla forza magnetica. Ora, abbiamo visto (189) che la concordanza della teoria elettromagnetica della luce con le teorie

attualmente adottate per la spiegazione dei fenomeni luminosi richiedeva che le derivate rispetto al tempo di  $\xi, \eta, \zeta$  siano rispettivamente uguali alle componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza magnetica. Affinché la teoria della polarizzazione rotatoria magnetica di Maxwell concordi con la teoria elettromagnetica dovrebbe essere ancora così; è quanto non sembra avvenire.

D'altra parte le formule di Helmholtz sembrano piuttosto difficili da applicare a questo caso. Si basano in questo caso sui principi dell'Idrodinamica che senza dubbio sarebbe difficile estendere all'etere, poiché sarebbe necessario assumere una pressione uniforme in tutte le direzioni.

Presumono inoltre che esistano determinate relazioni tra le componenti dello spostamento e quelle del vortice che potrebbero essere scritte:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d^2\zeta}{dydt} - \frac{d^2\eta}{dzdt} \\ \beta &= \frac{d^2\xi}{dzdt} - \frac{d^2\zeta}{dxdt} \\ \gamma &= \frac{d^2\eta}{dxdt} - \frac{d^2\xi}{dydt}\end{aligned}$$

e della quali Maxwell non tiene conto.

**227.** Ammettiamo per un istante che le derivate  $\xi', \eta', \zeta'$  sono rispettivamente uguali a  $\alpha, \beta, \gamma$  e cerchiamo le conseguenze di questa ipotesi.

Il termine principale dell'energia cinetica diviene

$$\frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

I binomi alternati che entrano nell'espressione (14) del termine complementare o le derivate rispetto al tempo di quelle che si trovano nell'espressione (5) di questo stesso termine hanno allora i valori

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz} &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ \frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx} &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ \frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy} &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\end{aligned}$$

Ma dalle equazioni (II) del § 167 i secondi membri di queste uguaglianze sono rispettivamente uguali a  $4\pi u, 4\pi v, 4\pi w$ . Siccome  $u, v, w$  sono le derivate rispetto al tempo delle componenti  $f, g, h$  dello spostamento elettrico otteniamo, integrando

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} = 4\pi f \\ \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} = 4\pi g \\ \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} = 4\pi h \end{cases} \quad (15)$$

Di conseguenza l'espressione (5) del termine complementare si può scrivere

$$4\pi C \int \left( \alpha \frac{df}{d\nu} + \beta \frac{dg}{d\nu} + \gamma \frac{dh}{d\nu} \right) d\tau \quad (16)$$

Le quantità designate dai simboli  $\frac{df}{d\nu}, \dots$ , contenenti i prodotti delle componenti della forza magnetica per le derivate dello spostamento elettrico prese rispetto a  $x, y, z$ , questo termine complementare è di terzo grado rispetto a queste quantità. Nel termine principale di  $T$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  entrano al secondo grado, ma le derivate dello spostamento elettrico non vi compaiono. Pertanto, in generale le equazioni del moto saranno lineari, come avviene nelle ordinarie teorie della luce; nella polarizzazione rotatoria cesseranno di essere lineari in seguito all'introduzione del termine complementare. Ne consegue che in quest'ultimo caso la velocità di propagazione delle perturbazioni costituenti la luce dipenderà da  $\alpha, \beta, \gamma$  e di conseguenza dall'intensità luminosa che è funzione di queste quantità. Questa conseguenza è del tutto contraria ai fatti osservati in tutti gli altri fenomeni luminosi; tutte queste difficoltà furono risolte definitivamente solo dalla teoria di Lorentz, di cui parleremo alla fine di questo lavoro.

**228.** Tuttavia, nelle condizioni in cui si svolgono gli esperimenti, ci troviamo in uno dei casi particolari, dove nonostante il termine complementare sia di terzo grado, le equazioni del moto sono lineari.

Per dimostrarlo, consideriamo un'onda piana polarizzata e prendiamo come piano  $xy$  un piano parallelo all'onda. Poiché nello spostamento elettrico avviene nel piano dell'onda (180), la componente  $h$  è nulla. Inoltre  $f$  e  $g$  non dipendono né da  $x$  né da  $y$ . Di conseguenza il termine complementare (16) si riduce a

$$4\pi C \int \gamma \left( \alpha \frac{df}{dz} + \beta \frac{dg}{dz} \right) d\tau$$

Le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  della forza magnetica si possono considerare come la somma delle componenti della forza magnetica del campo costante in cui si trova il mezzo attraversato dall'onda e delle componenti della forza magnetica del campo le cui perturbazioni periodiche danno origine a fenomeni luminosi. Queste ultime componenti variano nel tempo. Ma sappiamo che la forza magnetica del campo periodico è diretta nel piano dell'onda; la sua componente lungo l'asse  $z$  è quindi nulla nel caso in questione. Di conseguenza, la quantità  $\gamma$  che entra nella precedente espressione del termine complementare ha il valore della componente lungo l'asse  $z$  del campo costante prodotto dai magneti o dalle correnti. Essendo tale quantità costante, il termine complementare è solo di secondo grado rispetto ad  $\alpha, \beta, \frac{df}{dz}, \frac{dg}{dz}$  e le equazioni del moto ritornano lineari.

Si può anche dimostrare diversamente che  $\gamma$  è una costante. Scriviamo infatti l'equazione di Lagrange relativa a questa quantità; avremo

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\gamma'} - \frac{dT}{d\gamma} = \frac{dU}{d\gamma}$$

Ora secondo Cauchy,  $U$  non dipende da  $\zeta$ ; di conseguenza è indipendente da  $\gamma$  e il secondo membro di questa equazione è nullo. Anche il primo termine è nullo poiché  $T$ , che qui vale

$$T = \frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau + 4\pi C \int \gamma \left( \alpha \frac{df}{dz} + \beta \frac{dg}{dz} \right) d\tau$$

non contiene  $\gamma'$ . Di conseguenza l'equazione precedente si riduce a

$$\frac{dT}{d\gamma} = 0$$

o, sostituendo  $T$  con il valore precedente ed effettuando la derivazione

$$\frac{\mu}{4\pi} \gamma + 4\pi C \left( \alpha \frac{df}{dz} + \beta \frac{dg}{dz} \right) = 0$$

Affinché  $\gamma$  sia costante basta quindi che anche il secondo termine lo sia. Se teniamo conto delle relazioni (15) che danno le componenti dello spostamento, abbiamo per questo termine

$$C \left[ \alpha \left( \frac{d^2\zeta}{dydz} - \frac{d^2\eta}{dz^2} \right) + \beta \left( \frac{d^2\xi}{dz^2} - \frac{d^2\zeta}{dx dz} \right) \right]$$

o, poiché l'onda è perpendicolare all'asse  $z$ ,

$$C \left( \beta \frac{d^2\xi}{dz^2} - \alpha \frac{d^2\eta}{dz^2} \right)$$

o infine

$$C \left( \eta' \frac{d^2 \xi}{dz^2} - \xi' \frac{d^2 \eta}{dz^2} \right)$$

Ma essendo  $\xi$  e  $\zeta$  le componenti dello spostamento di una molecola d'etere, queste quantità soddisfano alle equazioni

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos (nt - qz) \\ \eta &= r \sin (nt - qz) \end{aligned}$$

Se calcoliamo le derivate di  $\xi$  e  $\eta$  rispetto a  $t$  e le loro derivate seconde rispetto a  $z$  e riportiamo i valori così trovati nel termine precedente, otteniamo

$$Cr^2 nq^2 [-\cos (nt - qz) \cos (nt - qz) - \sin (nt - qz) \sin (nt - qz)] = -Cr^2 nq$$

È quindi una quantità indipendente da  $t$ ; pertanto  $\gamma$  è costante.

**229.** Un'altra difficoltà nella teoria deriva dall'applicazione delle proprietà dei vortici di Helmholtz ai vortici molecolari di un mezzo soggetto al magnetismo. Infatti è necessario che l'energia di questo mezzo valga

$$\frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono, come ammette Maxwell, le componenti di un vortice di Helmholtz l'energia cinetica del mezzo ha un valore del tutto diverso.

Sembra abbastanza difficile superare questa difficoltà. Ciò potrebbe essere ottenuto solo modificando profondamente la teoria di Maxwell e queste modifiche la avvicinerrebbero alla teoria proposta dal signor Potier.

### 230. Teoria di M. Potier

Questa teoria si basa sulle due ipotesi seguenti:

1° La materia ponderabile partecipa in una certa misura, variabile con la lunghezza d'onda, al movimento dell'etere;

2° Le molecole di un corpo ponderabile diventano veri e propri magneti sotto l'azione di un campo magnetico.

La prima ipotesi, già ammessa da Fresnel, sembra confermata dagli esperimenti di M. Fizeau sul trascinamento dell'etere; la seconda è conforme al modo ordinario di interpretazione delle proprietà magnetiche o diamagnetiche dei mezzi ponderabili.

Da queste due ipotesi segue che ogni molecola magnetizzata nel mezzo subisce uno spostamento periodico quando un raggio attraversa questo mezzo. In generale questo spostamento non è una traslazione, i due poli del magnete si muovono di quantità disuguali; la direzione dell'asse magnetico di una molecola cambia quindi periodicamente così come le componenti del suo momento magnetico e di conseguenza si creano nel mezzo forze di induzione elettromotrice. Queste forze si aggiungono a quelle risultanti dalla perturbazione magnetica che costituisce la luce e la legge che lega questa perturbazione al tempo viene modificata e si comprende che il piano di polarizzazione cambia d'azimut.

**231.** Mostriamo infatti che le ipotesi di Potier portano a introdurre il termine complementare di Maxwell nell'espressione dell'energia cinetica e, di conseguenza, ci permettono di trovare la formula (I) di Airy.

Siano  $x, y, z$  e  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  le coordinate dei poli di una molecola magnetizzata nella sua posizione normale, e  $+m$  e  $-m$  le rispettive masse magnetiche di questi poli; abbiamo per le componenti del momento magnetico della molecola

$$m\delta x \quad m\delta y \quad m\delta z$$

Per avere i nuovi valori di queste componenti quando la molecola viene spostata dalla sua posizione di equilibrio per effetto della perturbazione luminosa, dobbiamo conoscere la direzione in cui la materia ponderabile viene trasportata da questa perturbazione. Ammetteremo, ciò che è più naturale, che questa direzione è quella dello spostamento elettrico. Poiché, del resto, nella teoria elettromagnetica, lo spostamento elettrico è perpendicolare al piano di polarizzazione (189), questa ipotesi equivale ad ammettere che la materia ponderabile si muove nella direzione della vibrazione di Fresnel. Se quindi  $f, g, h$  sono le componenti dello spostamento elettrico nel punto  $x, y, z$ , ed  $\varepsilon$  un coefficiente di proporzionalità, avremo per le coordinate di uno dei poli della molecola spostata,

$$x + \varepsilon f \quad y + \varepsilon g \quad z + \varepsilon h$$

e per le coordinate dell'altro polo

$$x + \delta x + \varepsilon f + \varepsilon \delta f \quad y + \delta y + \varepsilon g + \varepsilon \delta g \quad z + \delta z + \varepsilon h + \varepsilon \delta h$$

La variazione  $\delta f$  della componente  $f$  dello spostamento per le variazioni  $\delta x, \delta y, \delta z$  delle coordinate si può sviluppare secondo le potenze crescenti di queste ultime quantità; trascurando i termini di secondo grado e di gradi maggiori, avremo

$$\delta f = \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z$$

Di conseguenza le componenti del momento magnetico della molecola spostata sono date da

$$m(\delta x + \varepsilon \delta f) = m\delta x + \varepsilon \frac{df}{dx} m\delta x + \varepsilon \frac{df}{dy} m\delta y + \varepsilon \frac{df}{dz} m\delta z$$

e due altre analoghe espressioni.

**232.** Introduciamo le componenti della magnetizzazione. Siano  $A, B, C$  queste componenti nel punto  $x, y, z$ ;  $A', B', C'$  i loro nuovi valori quando questo punto si è spostato di  $\varepsilon f, \varepsilon g, \varepsilon h$ ; abbiamo

$$Ad\tau = m\delta x \quad Bd\tau = m\delta y \quad Cd\tau = m\delta z$$

$$A'd\tau = m(\delta x + \varepsilon \delta f) \quad B'd\tau = m(\delta y + \varepsilon \delta g) \quad C'd\tau = m(\delta z + \varepsilon \delta h)$$

essendo  $d\tau$  il volume della molecola magnetizzata. Di conseguenza l'ultima uguaglianza del paragrafo precedente si può scrivere

$$A' = A + \varepsilon \left( \frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z \right)$$

Ma le componenti della magnetizzazione sono legate a quelle della forza magnetica (103) dalle relazioni

$$A = \chi\alpha \quad B = \chi\beta \quad C = \chi\gamma$$

dove  $\chi$  è la funzione magnetizzante. Di conseguenza l'uguaglianza precedente diventa, quando si sostituiscono  $A, B, C$  con questi valori

$$A' = \chi\alpha + \varepsilon\chi \left( \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy} + \gamma \frac{df}{dz} \right)$$

o

$$A' = \chi\alpha + \varepsilon\chi \frac{df}{dv} \quad (1)$$

**233.** D'altra parte l'induzione magnetica ha come componenti

$$a = \alpha + 4\pi A \quad b = \beta + 4\pi B \quad c = \gamma + 4\pi C$$

e queste componenti divengono dopo lo spostamento della molecola

$$a' = \alpha' + 4\pi A' \quad b' = \beta' + 4\pi B' \quad c' = \gamma' + 4\pi C'$$

Mostriamo che le componenti  $\alpha', \beta', \gamma'$  della forza magnetica presenti in queste ultime uguaglianze sono rispettivamente uguali a  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Abbiamo, derivando rispetto a  $x$  i due membri dell'equazione (1)

$$\frac{dA'}{dx} = \chi \frac{d\alpha}{dx} + \varepsilon \chi \frac{d}{d\nu} \frac{df}{dx}$$

Derivando  $B'$  rispetto a  $y$  e  $C'$  rispetto a  $z$  e sommando le tre derivate parziali così trovate, otteniamo

$$\frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dz} = \chi \frac{d\alpha}{dx} + \chi \frac{d\beta}{dy} + \chi \frac{d\gamma}{dz} + \varepsilon \chi \frac{d}{d\nu} \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right)$$

Ma, a causa dell'incomprimibilità dell'elettricità, la somma delle derivate parziali  $\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dh}{dz}$  è uguale a zero; di conseguenza, la precedente uguaglianza si riduce a

$$\frac{dA'}{dx} + \frac{dB'}{dy} + \frac{dC'}{dz} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}$$

Il primo membro è, a meno del segno, la densità, nel punto  $x + \varepsilon f, y + \varepsilon g, z + \varepsilon h$  della distribuzione magnetica fittizia che può sostituire nei suoi effetti il corpo sottoposto all'influsso del campo; il secondo membro rappresenta la stessa quantità nel punto  $x, y, z$ .

Di conseguenza la distribuzione fittizia non è modificata dal moto delle molecole magnetizzate. La forza magnetica in un punto deve quindi mantenere lo stesso valore indipendentemente dal fatto che queste molecole siano o meno nelle loro posizioni di equilibrio.

**234.** Poiché abbiamo

$$\alpha' = \alpha + 4\pi A'$$

otteniamo, sostituendo  $A'$  con il suo valore (1)

$$\alpha' = \alpha (1 + 4\pi \chi) + 4\pi \chi \varepsilon \frac{df}{d\nu}$$

Si sa che

$$1 + 4\pi \chi = \mu$$

e quindi si pone

$$\chi \varepsilon = 8\pi C$$

( $C$  non designa la componente di magnetizzazione lungo l'asse  $z$ ), si ottiene per le componenti dell'induzione

$$\begin{aligned} a' &= \mu \alpha + 32\pi^2 C \frac{df}{d\nu} \\ b' &= \mu \beta + 32\pi^2 C \frac{dg}{d\nu} \\ c' &= \mu \gamma + 32\pi^2 C \frac{dh}{d\nu} \end{aligned}$$

L'energia cinetica del mezzo,

$$T = \int \frac{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma}{8\pi} d\tau$$

varrà quindi

$$T = \frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\nu + 4\pi C \int \left( \alpha \frac{df}{d\nu} + \beta \frac{dg}{d\nu} + \gamma \frac{dh}{d\nu} \right) d\tau$$

Ritroviamo quindi lo stesso valore della teoria di Maxwell, essendo il termine complementare messo nella forma (16)<sup>7</sup>

### 235. Teoria di Rowland<sup>8</sup>

Prima di Potier, Rowland aveva tentato di conciliare la teoria della polarizzazione magnetica rotatoria con la teoria elettromagnetica della luce introducendo un'ipotesi la cui origine risulta dall'interpretazione di un fenomeno scoperto poco prima da M. Hall<sup>9</sup>.

Ricordiamo in cosa consiste il fenomeno Hall. Sia ABCD (fig. 35) un sottilissimo conduttore metallico tagliato a forma di croce, percorso dalla corrente di una pila da A a B e i cui estremi CD del ramo trasversale comunicano con un galvanometro. Spostando i punti di attacco dei fili del galvanometro si arriva a garantire che nessuna corrente derivata passi attraverso il galvanometro.

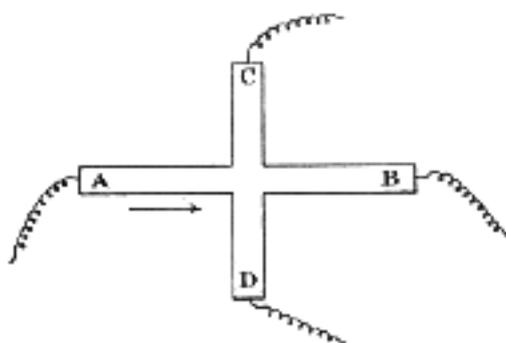


Fig. 35.

Disposto così lo strumento, se lo si pone in un campo magnetico molto intenso tale che il suo piano sia perpendicolare alla direzione del campo si vede deviare l'ago del galvanometro. Per la maggior parte dei metalli e per un campo magnetico che attraversa il piano della figura da davanti a dietro, la deviazione del galvanometro indica che la corrente che passa attraverso

<sup>7</sup>Successivamente all'epoca in cui tali lezioni furono impartite secondo le indicazioni verbali del signor Potier, questo studioso espose la sua teoria della polarizzazione magnetica rotatoria in due note pubblicate, una nella traduzione francese del Trattato di Maxwell (t. I I, p. 534), l'altra nelle *Comptes Rendus* dell'Accademia delle Scienze, (t. CVIII, p. 510). In queste due note M. Potier determina le componenti della forza elettromotrice indotta dal moto delle molecole magnetizzate e dimostra che in ogni punto del mezzo questa forza elettromotrice è normale alla corrente che passa in questo punto, diretta nel piano dell'onda, proporzionale alla corrente e alla componente lungo la direzione del raggio della forza magnetica. Introducendo poi le componenti di questa forza elettromotrice nelle equazioni del campo magnetico, deriva le equazioni differenziali che danno in ogni istante le componenti della perturbazione. Si ha così, nel caso di un'onda piana parallela al piano  $xy$ , sia alle equazioni

$$\begin{aligned} K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} + 2K\mu C\gamma \frac{d^3 G}{dz^2 dt} &= \frac{d^2 F}{dz^2} \\ K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} - 2K\mu C\gamma \frac{d^3 F}{dz^2 dt} &= \frac{d^2 G}{dz^2} \end{aligned}$$

che danno le componenti del momento elettromagnetico, sia alle equazioni

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2C\gamma \frac{d^3 \eta}{dz^2 dt} &= A_0 \frac{d^2 \xi}{dz^2} \\ \rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} - 2C\gamma \frac{d^3 \xi}{dz^2 dt} &= \frac{d^2 \eta}{dz^2} \end{aligned}$$

che danno il moto di una molecola di etere. Questi due gruppi di equazioni contenenti derivate del terzo ordine portano, come abbiamo visto, alla rotazione del piano di polarizzazione.

Il modo di esposizione di M. Potier, che non è identico nelle due note, differisce quindi molto da quello da noi adottato; è vicino a quello che seguiremo nella presentazione della teoria del signor Rowland.

<sup>8</sup>*Philosophical Magazine*, aprile 1881; Mascart e Jobert. *Traité d'électricité*, t. I, p. 702 e segg.

<sup>9</sup>*American Journal of Mathematics*, t. II, 1879.

questo strumento va da C a D nel ramo trasversale del conduttore; la corrente AB risulta quindi condotta seguendo la direzione della forza elettromagnetica che si esercita sul conduttore stesso. Per il ferro la deviazione dell'ago del galvanometro e, di conseguenza, la corrente derivata cambiano direzione; tuttavia possiamo ancora dire che la corrente viene trasportata seguendo la forza magnetica, poiché all'interno di una lamina di ferro, per effetto della magnetizzazione sotto l'influsso del campo esterno, il verso delle linee di forza e la direzione della forza magnetica hanno cambiato segno.

Questi fatti possono ovviamente essere interpretati ammettendo che dall'azione del campo magnetico nasca una forza elettromotrice e che essa sia diretta seguendo la forza magnetica che agisce sul materiale ponderabile del conduttore. Per quanto riguarda la sua grandezza, poiché l'effetto osservato è sempre molto piccolo, possiamo supporre che sia proporzionale alla forza magnetica. Questa spiegazione però è insoddisfacente, perché dovrebbe applicarsi a qualsiasi conduttore qualunque siano le sue dimensioni, e il fenomeno di Hall non si verifica più non appena lo spessore della lamina supera alcuni decimi di millimetro. Inoltre, è stato messo in dubbio da recenti esperimenti, in particolare da quelli di Righi e di Leduc, i quali hanno mostrato che una speciale eterotropia del conduttore sotto l'azione del campo era la migliore spiegazione dei fatti.

**236.** In ogni caso, Rowland adotta l'ipotesi della produzione di una forza elettromotrice e suppone che una forza dello stesso tipo si sviluppi in un mezzo non conduttore posto in un campo magnetico quando questo mezzo è attraversato dalle correnti di spostamento risultanti dalla propagazione della luce. È del resto questa stessa forza elettromotrice che Potier introduce mediante ipotesi più accettabili di quelle di Rowland.

Questa forza elettromotrice essendo proporzionale alla forza elettromagnetica ed avendo la stessa direzione di quest'ultima, avremo per le sue componenti

$$\begin{cases} P_1 = \varepsilon (cv - bw) \\ Q_1 = \varepsilon (aw - cu) \\ R_1 = \varepsilon (bu - av) \end{cases} \quad (1)$$

L'induzione magnetica si compone dell'induzione del campo costante a cui è sottoposto il mezzo e dell'induzione del campo periodico che dà origine alla luce. I componenti del primo sono  $\mu\alpha_1, \mu\beta_1, \mu\gamma_1$ , essendo le componenti dell'intensità di campo costante e uniforme  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ; quelle della seconda sono date dalle equazioni (III) del § 167. Abbiamo quindi,

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} + \mu\alpha_1 \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} + \mu\beta_1 \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} + \mu\gamma_1 \end{aligned}$$

**237.** Se si considera un'onda piana parallela al piano  $xy$  le variabili non dipendono né da  $x$  né da  $y$  e le equazioni precedenti si riducono a

$$\begin{cases} a = -\frac{dG}{dz} + \mu\alpha_1 \\ b = \frac{dF}{dz} + \mu\beta_1 \\ c = \mu\gamma_1 \end{cases} \quad (2)$$

Le equazioni (II) del § 167 che danno le componenti  $u, v, w$  della velocità dello spostamento elettrico diventano

$$\begin{aligned} 4\pi u &= -\frac{d\beta}{dy} = -\frac{1}{\mu} \frac{db}{dz} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{da}{dz} \\ 4\pi w &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo le derivate di  $a$  e di  $b$  rispetto a  $z$ , con i loro valori dedotti dalle equazioni (2), otteniamo, poiché  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  sono costanti

$$\begin{cases} 4\pi u = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d\beta_1}{dz} = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 F}{dz^2} \\ 4\pi v = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 G}{dz^2} - \frac{d\alpha_1}{dz} = -\frac{1}{\mu} \frac{d^2 G}{dz^2} \\ 4\pi w = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Possiamo quindi, utilizzando le relazioni (2) e (3), esprimere le componenti della forza elettromotrice date dalle equazioni (1) in funzione del momento elettromagnetico; troviamo per le componenti parallele al piano dell'onda

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^2 G}{dz^2} \\ Q_1 &= -\frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^2 F}{dz^2} \end{aligned}$$

quanto alla terza componente, è inutile considerarla, perché essendo perpendicolare al piano dell'onda non può avere alcun effetto sulla perturbazione magnetica costituente la luce. Le componenti della forza elettromotrice risultanti da quest'ultima perturbazione essendo (177)

$$P = -\frac{dF}{dt} \quad Q = -\frac{dG}{dt}$$

avremo per le componenti parallele al piano dell'onda della forza elettromotrice totale

$$\begin{aligned} P &= -\frac{dF}{dt} - \frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^2 G}{dz^2} \\ Q &= -\frac{dG}{dt} + \frac{\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^2 F}{dz^2} \end{aligned}$$

e, per le equazioni (VIII) del § 169,

$$\begin{aligned} 4\pi u &= -K \frac{d^2 F}{dt^2} - \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^3 G}{dz^2 dt} \\ 4\pi v &= -K \frac{d^2 G}{dt^2} + \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^3 F}{dz^2 dt} \end{aligned}$$

Sostituendo i primi membri di queste equazioni con i loro valori (3) otteniamo infine

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^3 G}{dz^2 dt} &= \frac{1}{\mu} \frac{d^2 F}{dz^2} \\ K \frac{d^2 G}{dt^2} - \frac{K\varepsilon\gamma_1}{4\pi} \frac{d^3 F}{dz^2 dt} &= \frac{1}{\mu} \frac{d^2 G}{dz^2} \end{aligned}$$

Secondo l'osservazione fatta al n. 178,  $\alpha, \beta, \gamma$  soddisfano equazioni della stessa forma; di conseguenza così è anche per le componenti  $\xi, \eta, \zeta$  dello spostamento di una molecola di etere le cui derivate rispetto a  $\tau$  sono  $\xi, \eta, \zeta$ . Ritroviamo quindi le equazioni del moto che hanno portato Airy ad esprimere l'angolo  $\theta$  di rotazione del piano di polarizzazione in accordo con l'esperimento.

### 238. Fenomeno di Kerr

La polarizzazione magnetica rotatoria è legata ad un fenomeno scoperto nel 1876 da Kerr<sup>10</sup> e che consiste nella rotazione del piano di polarizzazione di un raggio polarizzato riflesso sul polo di un magnete.

La luce di una lampada, polarizzata da un nicol e riflessa da una lastra di vetro inclinata di  $45^\circ$ , cade normalmente sul polo, ivi viene riflessa e, dopo aver attraversato la lastra di vetro e un analizzatore di nicol, viene ricevuta dall'occhio. Una massa di ferro, con un foro conico per consentire il passaggio dei raggi luminosi, viene posta molto vicino alla superficie riflettente, con lo scopo di rendere molto intensa la magnetizzazione di questa superficie.

<sup>10</sup>*Philosophical Magazine*, quinta serie, t. III, p. 321 (1877); t. V, p. 161 (1878)

Avendo posto il polarizzatore in una posizione tale che le vibrazioni che cadevano sui poli erano parallele o perpendicolari al piano di incidenza, e avendo ruotato l'analizzatore fino all'estinzione, Kerr vide riapparire, seppur debolmente, la luce magnetizzando con una corrente il polo riflettente. Ma poiché Kerr disponeva solo di una debole forza magnetica, per rendere l'azione più evidente, spostò leggermente il polarizzatore o l'analizzatore prima di eseguire l'esperimento, in modo che l'estinzione non fosse completa. Nel momento in cui la corrente si chiudeva in una certa direzione, la luce ricevuta dall'occhio aumentava; in direzione contraria, essa diminuiva e spesso arrivava alla completa estinzione. Questa riduzione di intensità avveniva se, prima del passaggio della corrente, l'analizzatore era stato girato in direzione contraria a quella della corrente di magnetizzazione. Kerr concluse che attraverso la magnetizzazione si produceva una rotazione del piano di polarizzazione, in senso contrario alle correnti di Ampère.

Kerr osservò la rotazione anche quando il raggio cadeva obliquamente sulla superficie riflettente; ma in questo caso i fenomeni sono complicati dalla polarizzazione ellittica dovuta alla riflessione metallica, a meno che le vibrazioni del raggio incidente non siano parallele o perpendicolari al piano di incidenza.

**239.** Gordon<sup>11</sup> e Fitzgerald<sup>12</sup> ripeterono presto questi esperimenti con campi magnetici molto potenti; i risultati ottenuti confermarono il lavoro di Kerr. Più recentemente lo studio di questo fenomeno è stato ripreso da Righi<sup>13</sup> che lo ha reso più facilmente osservabile amplificandolo per successive riflessioni del raggio luminoso su due poli magnetici opportunamente disposti. Infine anche Kuntz<sup>14</sup> si è occupato di questa questione; ha mostrato che anche la riflessione sul nichel e sul cobalto produce il fenomeno di Kerr; inoltre ha riconosciuto che la rotazione del piano di polarizzazione nel caso di incidenza normale, che cambia valore con il colore della radiazione, è maggiore per i raggi rossi che per i raggi viola: la dispersione è quindi anormale.

Ma nonostante questi numerosi lavori e le ricerche teoriche di Righi<sup>15</sup>, manca ancora la spiegazione completa del fenomeno Kerr. Non possiamo dire se si tratti di un fenomeno nuovo o se sia dovuto unicamente al potere rotatorio magnetico dell'aria che circonda i poli. Pertanto non ci soffermeremo ulteriormente su questo argomento.

In sintesi, Maxwell non è riuscito a superare le difficoltà sollevate dal fenomeno osservato da Faraday. Potier ha fornito una teoria soddisfacente. Vedremo più avanti che anche Lorentz è giunto ad una spiegazione soddisfacente, legata alle sue idee generali sulla natura dell'elettricità. Diciamo solo che nella teoria di Lorentz come in quella di Potier, le molecole materiali prendono parte alla vibrazione e che è questa circostanza che produce la polarizzazione rotatoria; solo che, nella teoria di Potier, le molecole in movimento agiscono perché portano con sé il loro magnetismo; in quella di Lorentz agiscono perché portano con sé una carica elettrica.

<sup>11</sup>*Philosophical Magazine*, quinta serie, t. IV, p. 104 (1877).

<sup>12</sup>*Philosophical Magazine*, quinta serie, t. III, p. 529 (1877).

<sup>13</sup>Memoria presentata all'Accademia reale dei Lincei (14 dicembre 1884).

<sup>14</sup>*Wied. Ann.*, ottobre 1884.

<sup>15</sup>*Loc. cit.* e nuove Memoria negli Annali di Chimica e Fisica, settembre 1886.

## **Parte II.**

# **Teorie elettrodinamiche di Ampère, Weber e Helmholtz**



# Cap I - Formula di Ampère

## 240. Azione di due elementi di corrente

Ampère affermava di non prendere in prestito nulla se non dall'esperienza<sup>16</sup>. Questa affermazione non è assolutamente giustificata, perché l'esperimento non può riguardare due elementi di corrente. Possiamo osservare l'azione di una corrente chiusa su una porzione di corrente, ma non l'azione di una porzione di corrente su un'altra.

Se, infatti, la scarica di un condensatore costituisce ad esempio una corrente che, secondo idee anteriori a Maxwell, non è chiusa, tale corrente ha durata troppo breve per poterla utilizzare negli esperimenti. Possiamo quindi sperimentare solo su correnti chiuse; possiamo, è vero, con vari accorgimenti, rendere mobile una porzione di una delle correnti, il che rende possibile studiare l'azione di una corrente chiusa su una porzione di corrente (vedi questo argomento discusso più avanti, n° 258); ma questa porzione mobile rimane sempre soggetto all'azione simultanea di tutti gli elementi dell'altra corrente chiusa.

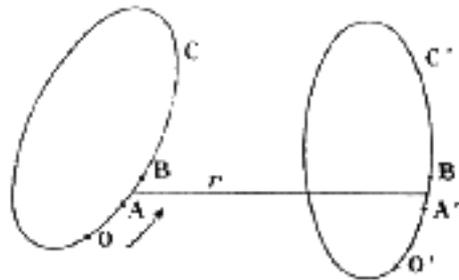


Fig. 36.

Ampère che enuncia una legge applicabile a due elementi di corrente ha dovuto di conseguenza introdurre ipotesi. Ecco le sue ipotesi:

1° Per avere l'azione di un circuito chiuso su un elemento di corrente, è sufficiente comporre le azioni degli elementi di questo circuito chiuso sull'altro elemento;

2° L'azione di due elementi di corrente è una forza diretta lungo la linea che li congiunge.

Consideriamo due circuiti C e C' (fig. 36). Sia A un punto di C. Definisco il punto A dalla lunghezza  $s$  dell'arco OA contato a partire dal punto fisso O.

Siano ora AB e A'B' due elementi appartenenti rispettivamente ai circuiti C e C'. Sia O' un punto fisso di C' da cui conteremo gli archi e chiamiamo

$$OA = s \quad O'A' = s'$$

d'altra parte

$$OB = s + ds \quad O'B' = s' + ds'$$

da cui

$$AB = ds \quad A'B' = ds'$$

<sup>16</sup>Il titolo della sua opera è: *Teoria matematica dei fenomeni elettrodinamici esclusivamente dedotti dall'esperienza*, 1826.

Chiamando  $x, y, z$  le coordinate di A,  $x + dx, y + dy, z + dz$  quelle di B,  $x', y', z'$  quelle di A' e  $x' + dx', y' + dy', z' + dz'$  quelle di B', la distanza dei due elementi AB e A'B' è data da

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \quad (1)$$

con  $r$  funzione di  $s$  e di  $s'$ .

I coseni direttori di AB sono  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ , di A'B'  $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$ , di AA'  $\frac{x'-x}{r}, \frac{y'-y}{r}, \frac{z'-z}{r}$

Siano  $\theta$  l'angolo tra AB e AA';  $\theta'$  tra A'B' e AA',  $\varepsilon$  l'angolo dei due elementi AB e A'B'.

Si ha:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{x'-x}{r} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{y'-y}{r} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{z'-z}{r} \\ \cos \theta' = \frac{dx'}{ds'} \cdot \frac{x'-x}{r} + \frac{dy'}{ds'} \cdot \frac{y'-y}{r} + \frac{dz'}{ds'} \cdot \frac{z'-z}{r} \\ \cos \varepsilon = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz'}{ds'} \end{cases} \quad (2)$$

Tra questi tre coseni e le derivate della funzione  $r$  esistono alcune relazioni.

Si trova, infatti, differenziando

$$r \frac{dr}{ds} = \sum (x - x') \frac{dx}{ds} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{ds} = \sum \frac{x-x'}{r} \frac{dx}{ds} = -\cos \theta \\ \frac{dr}{ds'} = \sum \frac{x'-x}{r} \frac{dx'}{ds'} = \cos \theta' \end{cases} \quad (4)$$

il simbolo  $\sum$  indica una permutazione circolare da effettuare sulle lettere  $x, y, z, x', y', z'$ .

Differenziamo ora la relazione (3) rispetto a  $s'$ ; viene

$$\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + r \frac{d^2r}{ds ds'} = - \sum \frac{dx'}{ds'} \cdot \frac{dx}{ds} = -\cos \varepsilon \quad (5)$$

da cui, tenendo conto delle relazioni (4),

$$r \frac{d^2r}{ds ds'} = \cos \theta \cos \theta' - \cos \varepsilon$$

L'azione di  $ds$  su  $ds'$  è proporzionale alle lunghezze  $ds$  e  $ds'$  dei due elementi e alle intensità  $i$  e  $i'$  delle due correnti; dipende anche dalla distanza  $r$  tra i due elementi e dagli angoli  $\theta, \theta'$  e  $\varepsilon$ . Chiaramente non può dipendere da nessun'altra grandezza. Possiamo quindi rappresentare questa azione con la formula:

$$ii' ds ds' f(r, \theta, \theta', \varepsilon)$$

Ci rimane da determinare la funzione  $f$ .

Per sintetizzare le scritte supporremo

$$i = i' = 1$$

riportando al termine del calcolo il fattore  $ii'$ .

Ampère ha preso dall'esperienza i seguenti tre principi che serviranno da punto di partenza per l'analisi che segue:

- 1° Il principio delle correnti sinusoidali;
- 2° L'azione di una corrente chiusa su qualsiasi elemento è normale a questo elemento;
- 3° L'azione di un solenoide chiuso su qualsiasi elemento è nulla.

Sia  $Adx ds'$  l'azione che verrebbe esercitata su  $ds'$  da un elemento di corrente  $dx$  che sarebbe la proiezione di  $ds$  sull'asse  $x$ ; allo stesso modo  $Bdy ds'$  e  $Cdz ds'$ . Il *principio sperimentale delle correnti sinusoidali*, che è il primo prestito che Ampère fa dall'esperienza, ci insegna che l'azione di  $ds$  su  $ds'$  è il risultato delle azioni delle sue proiezioni lungo i tre assi, e, poiché tutte queste forze sono dirette lungo la stessa retta AA', si ha:

$$f(r, \theta, \theta', \varepsilon) ds ds' = Adx ds' + Bdy ds' + Cdz ds'$$

pertanto

$$f = A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds} + C \frac{dz}{ds}$$

La funzione  $f$  è quindi *lineare* rispetto ai coseni direttori di AB.

La funzione  $f$  dipende da  $r, \theta', \theta, \varepsilon$ ;  $r$  e  $\theta'$  non dipendono dai coseni direttori  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ ;  $\cos \theta$  e  $\cos \varepsilon$  sono lineari e omogenei rispetto a questi coseni. Pertanto  $f$  può essere lineare e omogenea rispetto a questi stessi coseni direttori solo se è lineare ed omogenea in  $\cos \theta$  e  $\cos \varepsilon$ , ovvero, in modo equivalente, in  $\frac{dr}{ds'}$  e  $\frac{d^2r}{dsds'}$ .

Essa è anche lineare e omogenea in  $\frac{dr}{ds}$  e  $\frac{d^2r}{dsds'}$ .

Pertanto deve essere lineare e omogenea in  $\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}$  da una parte e  $\frac{d^2r}{dsds'}$  dall'altra.

Pertanto

$$f ds ds' = \left( A \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + B \frac{d^2r}{dsds'} \right) ds ds' \quad (6)$$

Ora,  $A$  e  $B$  sono funzioni solo di  $r$ ; posso quindi porre

$$A = \psi(r) \quad B = 2\varphi(r)$$

e la (6) diviene allora

$$f ds ds' = \left[ \psi(r) \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + 2\varphi(r) \frac{d^2r}{dsds'} \right] ds ds' \quad (6 \text{ bis})$$

**241.** Per determinare queste due funzioni  $\psi$  e  $\varphi$  saranno necessari due esperimenti.

Ampère ha mostrato che un qualsiasi arco di cerchio in movimento attorno al suo centro e soggetto all'azione di una corrente chiusa di forma arbitraria, non si sposta; l'azione tangenziale esercitata su qualsiasi elemento di questo arco di cerchio è quindi nulla. Quindi l'azione di una corrente chiusa su un elemento è normale a questo elemento: questo è il secondo principio di Ampère sopra enunciato.

Pertanto l'integrale

$$ds' \int \left[ \psi(r) \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + 2\varphi(r) \frac{d^2r}{dsds'} \right] \frac{dr}{ds'} ds = 0$$

quando è preso lungo il circuito C, che è qualunque.

Poniamo

$$\rho = \frac{dr}{ds'}$$

l'integrale precedente diviene

$$\int \left[ \psi(r) \rho^2 dr + 2\varphi(r) \rho d\rho \right] = 0$$

La quantità sotto il simbolo di integrale è quindi il differenziale esatto di una funzione di due variabili indipendenti  $r$  e  $\rho$ , cioè si ha,

$$2\rho\psi(r) = 2\rho\varphi'(r)$$

o

$$\psi(r) = \varphi'(r)$$

Ci rimane quindi da determinare la funzione  $\varphi$ , cosa che il terzo principio sperimentale di Ampère ci permetterà di fare; intanto traiamo tutte le conseguenze dai primi due principi e mostriamo innanzitutto che l'azione elementare (6 bis) che si scrive ora,

$$\left[ \varphi'(r) \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} + 2\varphi(r) \frac{d^2r}{dsds'} \right] ds ds' \quad (6 \text{ ter})$$

si può mettere nella forma  $V \frac{d^2U}{dsds'}$ , essendo  $U$  e  $V$  funzioni solo di  $r$ .

Infatti, possiamo scrivere

$$\frac{dU}{ds} = U' \frac{dr}{ds}$$

scrivendo  $U'$  per  $\frac{dU}{dr}$ ; e

$$\frac{d^2U}{dsds'} = U' \frac{d^2r}{dsds'} + U'' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}$$

scrivendo  $U''$  per  $\frac{d^2U}{dr^2}$ ; pertanto

$$V \frac{d^2U}{dsds'} = VU' \frac{d^2r}{dsds'} + VU'' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}$$

e identificando con (6 ter) viene

$$\begin{aligned} VU'' &= \varphi' & VU' &= 2\varphi & \frac{U''}{U'} &= \frac{\varphi'}{2\varphi} \\ \log U' &= \frac{1}{2} \log \varphi & U' &= \sqrt{\varphi} & V &= 2\sqrt{\varphi} = 2U' \end{aligned}$$

L'azione di due elementi di correnti è messa così nella forma

$$2dsds'U' \frac{d^2U}{dsds'}$$

## 242. Lavoro prodotto da uno spostamento relativo di due circuiti

Se incrementiamo  $r$  di  $\delta r$ , l'azione dell'elemento AB su A'B' produrrà un certo lavoro. Sceglieremo i segni, seguendo le convenzioni ordinarie in elettrodinamica, in modo che la forza sia positiva quando è attrattiva; allora il lavoro elementare dovuto ad una variazione  $\delta r$  è:

$$-2dsds'U' \delta r \cdot \frac{d^2U}{dsds'} = -2dsds' \delta U \frac{d^2U}{dsds'}$$

e il lavoro dovuto all'azione totale di uno dei circuiti sull'altro è:

$$\delta T = -2 \iint \delta U \frac{d^2U}{dsds'} ds ds'$$

Trasformiamo questa espressione integrando per parti. Sappiamo che

$$\int u \frac{dv}{ds} ds = [uv] - \int v \frac{du}{ds} ds = - \int v \frac{du}{ds} ds$$

poiché il contorno dell'integrazione, che è il circuito C, è chiuso e  $uv$  ha lo stesso valore ai due estremi dell'integrazione.

Pertanto

$$- \iint \delta U \frac{d^2U}{dsds'} ds = \int \frac{dU}{ds'} \frac{d\delta U}{ds} ds = \int \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} ds$$

di conseguenza,

$$\delta T = 2 \iint \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} ds ds'$$

e poiché nulla distingue C' da C si ha anche

$$\delta T = 2 \iint \frac{dU}{ds} \delta \frac{dU}{ds'} ds ds'$$

Pertanto,

$$\delta T = \int \left[ \frac{dU}{ds} \delta \frac{dU}{ds'} + \frac{dU}{ds'} \delta \frac{dU}{ds} \right] ds ds'$$

o ancora,

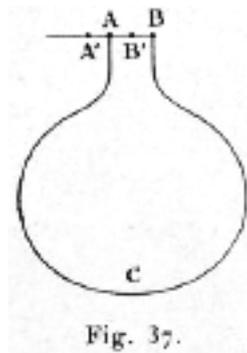
$$\delta T = \delta \iint \frac{dU}{ds} \frac{dU}{ds'} ds ds'$$

$\delta T$  è di conseguenza l'incremento della funzione

$$T = \iint \frac{dU}{ds} \frac{dU}{ds'} ds ds' \quad (7)$$

Il lavoro elementare è quindi il differenziale di una funzione  $T$  dipendente solo dalle posizioni relative dei due circuiti. Questa funzione<sup>17</sup> è il *mutuo potenziale elettrodinamico* dei due circuiti. Questa forma elegante data all'espressione del lavoro elementare si deve a M. Bertrand<sup>18</sup>.

**243.** Abbiamo così dimostrato l'esistenza di un potenziale per l'azione di due correnti chiuse, semplicemente contando sul fatto che l'azione di una corrente chiusa su un elemento di corrente è normale all'elemento.



Possiamo, viceversa, mostrare che questo fatto sperimentale è una conseguenza necessaria dell'esistenza di un potenziale.

Sia AB un elemento (fig. 37), mobile nella propria direzione. Se si muove in A'B', la corrente mantiene la stessa posizione nello spazio, descrive lo stesso circuito. Il potenziale elettrodinamico, se esiste, non varia, quindi nessun lavoro, il che prova che la forza è normale al cammino percorso.

#### 244. Determinazione della funzione $U$

Per andare oltre dobbiamo ricorrere ancora una volta all'esperienza. Faremo affidamento sul fatto che l'azione di un solenoide chiuso su un elemento di corrente è sempre nulla. Abbiamo visto in precedenza che,

$$T = \iint \frac{dU}{ds} \frac{dU}{ds'} ds ds'$$

che si può scrivere, osservando che

$$\frac{dU}{ds} = U' \frac{dr}{ds} \quad \frac{dU}{ds'} = U' \frac{dr}{ds'}$$

$$T = \iint U'^2 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds ds'$$

<sup>17</sup>Il lavoro è, in grandezza e in segno, l'aumento del potenziale, se accettiamo, come abbiamo fatto, di considerare positiva una forza attrattiva.

<sup>18</sup>*Théorie mathématique de l'électricité.*

o, tenendo conto delle equazioni (4)

$$T = \int ds \left[ \frac{dx}{ds} \int U'^2 \frac{dr}{ds'} \frac{x-x'}{r} ds' + \frac{dy}{ds} \int U'^2 \frac{dr}{ds'} \frac{y-y'}{r} ds' + \frac{dz}{ds} \int U'^2 \frac{dr}{ds'} \frac{z-z'}{r} ds' \right]$$

Si può ancora sintetizzare scrivendo

$$T = \int (F dx + G dy + H dz)$$

ponendo:

$$\begin{cases} F = \int U'^2 \frac{dr}{ds'} \frac{x-x'}{r} ds' \\ G = \int U'^2 \frac{dr}{ds'} \frac{y-y'}{r} ds' \\ H = \int U'^2 \frac{dr}{ds'} \frac{z-z'}{r} ds' \end{cases} \quad (8)$$

Effettuando le integrazioni lungo il contorno  $C'$  si può scrivere

$$F = \int (x-x') \cdot \frac{U'^2}{r} dr = \int (x-x') f'(r) dr$$

ponendo:

$$f'(r) = \frac{U'^2}{r}$$

Integriamo per parti; il termine finito è nullo e si ha

$$F = - \int f'(r) \frac{d(x-x')}{ds'} ds' = \int f'(r) dx'$$

poiché

$$\frac{d(x-x')}{ds'} = - \frac{dx'}{ds'}$$

In questa forma è facile vedere che si ha:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0 \quad (9)$$

Infatti

$$\frac{dF}{dx} = \int \frac{df(r)}{dx} dx' = - \int \frac{df(r)}{dx'} dx'$$

poiché

$$\frac{dr}{dx} = - \frac{dr}{dx'}$$

Pertanto,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = - \int \left( \frac{df}{dx'} dx' + \frac{df}{dy'} dy' + \frac{df}{dz'} dz' \right) = - \int df = 0$$

Come volevasi dimostrare.

Le quantità  $F, G, H$  sopra definite sono quelle che Maxwell chiama le componenti del *potenziale vettore* dovuto ad una corrente di intensità  $i$  passante nel circuito  $C'$ . Per ottenere il potenziale vettore dovuto ad una corrente di intensità  $i$  che scorre attraverso lo stesso circuito, gli integrali (8) dovrebbero essere moltiplicati per  $i$ .

**245.** Proponiamo ora di calcolare il potenziale elettrodinamico di un solenoide rispetto alla corrente  $C'$ , e di esprimere che questo potenziale è zero quando il solenoide è chiuso. Abbiamo trovato

$$T = \int (F dx + G dy + H dz)$$

essendo  $F, G, H$  le componenti del potenziale vettore dovuto a  $C'$  e l'integrale preso lungo  $C$ .

Trasformeremo questo integrale di linea in un integrale esteso all'area di una superficie passante per il contorno  $C$  e limitato a questo contorno. Per fare ciò applichiamo il teorema di Stokes. Questo teorema ci dà

$$\int (Fdx + Gdy + Hdz) = \int \left[ l \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\omega$$

Pertanto,

$$T = \int \left[ l \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\omega \quad (10)$$

essendo  $d\omega$  un elemento dell'area considerata, e  $l, m, n$  i coseni direzionali della normale a questo elemento.

Ricordiamo brevemente la definizione di solenoide. Un solenoide è un insieme di un'infinità di correnti infinitamente piccole costruite nel modo seguente:

Consideriamo un arco di curva qualsiasi detto asse del solenoide. Dividiamo questo arco di curva in un'infinità di elementi  $d\sigma$  *tutti uguali tra loro*.

Ad ognuno di questi elementi corrisponderà una corrente elementare così definita:

1° L'intensità di questa corrente sarà  $i$ ;

2° Questa corrente percorrerà un circuito infinitamente piccolo il cui piano sarà normale all'elemento  $d\sigma$ ;

3° Questo circuito limiterà un'area piana infinitamente piccola uguale a  $d\omega$ ;

4° Il centro di gravità di questa area coinciderà con il punto medio di  $d\sigma$

5° I valori di  $i$  e  $d\omega$  saranno gli stessi per tutte le correnti elementari.

L'insieme di queste correnti elementari costituirà il solenoide.

Abbiamo convenuto sopra di assumere provvisoriamente  $i =$  per semplificare un po' la scrittura.

Consideriamo quindi un solenoide e un elemento d'arco  $d\sigma$  preso sul suo asse e i cui coseno direttori sono  $l, m, n$ . Nel piano normale all'asse condotto dall'elemento  $d\sigma$  circola una corrente che abbraccia un'area infinitamente piccola  $d\omega$ . Il potenziale  $T$  dovuto all'azione di questa corrente è facilmente calcolabile. L'integrale (10) si riduce infatti ad un unico elemento che può essere scritto,

$$\begin{aligned} T &= d\omega \left[ l \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] \\ &= \frac{d\omega}{d\sigma} \left[ dx \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + dy \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + dz \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] \end{aligned}$$

osservando che

$$dx = ld\sigma \quad dy = md\sigma \quad dz = nd\sigma$$

Essendo  $d\omega$  e  $d\sigma$  costanti, quando si passa da un elemento all'altro del solenoide, è necessario, per ottenere il potenziale dovuto all'intero solenoide, integrare rispetto a  $dx, dy, dz$  lungo l'asse. Si ottiene così,

$$T = \frac{d\omega}{d\sigma} \int \left[ dx \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + dy \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + dz \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right]$$

**246.** L'azione di un solenoide chiuso è nulla; quindi la quantità sotto il segno di integrale è un differenziale esatto, ciò che si scrive

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right)$$

o ancora sommando e sottraendo  $\frac{d^2 f}{dx^2}$

$$\Delta F - \frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dx} \right) = 0$$

Dall'equazione (9)

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dx} = 0$$

di conseguenza

$$\Delta F = 0$$

Ma (244)

$$\Delta F = - \int \Delta f(r) dx'$$

$\Delta f(r)$  deve quindi essere una costante, affinché l'integrale precedente, preso lungo un qualunque circuito chiuso, sia nullo. Infatti questo integrale può essere nullo solo se  $\Delta f(r)$  è funzione solo di  $x'$ . Ma  $\Delta f(r)$  è una funzione di  $r$ . Può quindi essere una funzione di  $x'$  solo riducendolo a una costante. Quindi scriviamo:

$$\Delta f(r) = h$$

Da ciò si ricava

$$f(r) = \frac{hr^2}{6} + k + \frac{k'}{r}$$

La funzione  $f(r)$  dovendo annullarsi all'infinito,  $h$  e  $k$  sono necessariamente nulli, e viene

$$f(r) = \frac{k'}{r}$$

L'esperienza mostra che  $k' = 1$  in valore assoluto; è quindi necessario qui far intervenire l'esperienza.

Abbiamo potuto infatti, per una convenzione arbitraria, scegliere l'unità del magnetismo, poi quella dell'intensità, in modo che il coefficiente che entra nell'espressione dell'azione reciproca di due magneti sia uguale a 1, parimente a quello che entra l'espressione dell'azione di una corrente su un magnete. Qui non è più la stessa cosa; non abbiamo più la scelta dell'unità che le convenzioni precedenti hanno fissato definitivamente; è quindi soltanto l'esperienza che può farci sapere che il coefficiente  $k'$  è effettivamente uguale a 1.

Inoltre dobbiamo prendere il segno +; abbiamo quindi

$$f(r) = +\frac{1}{r}$$

è ancora l'esperienza che lo indica, essendo le convenzioni di segno quelle fatte sopra. Finora avevamo considerato, infatti, solo esperienze in cui avevamo azione nulla; una nuova esperienza potrebbe quindi da sola decidere se, tra due elementi paralleli e dello stesso verso, c'era un'attrazione o una repulsione.

Così quindi,

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} = \frac{U'^2}{r}$$

da cui:

$$U' = \pm \frac{i}{\sqrt{r}}$$

Questa è quindi la funzione  $U$  determinata. Ciò ci consentirà di esprimere l'azione di due elementi di corrente in una forma molto semplice.

Abbiamo,

$$U' \frac{d^2 U}{ds ds'} = U' \frac{d}{ds} \left( U' \frac{dr}{ds'} \right) = U' U'' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + U'^2 \frac{d^2 r}{ds ds'}$$

o sostituendo  $U'$  e  $U''$  con i loro valori,

$$U' \frac{d^2 U}{ds ds'} = \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - \frac{1}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'}$$

La forza attrattiva esercitata tra due elementi è quindi

$$2ii' ds ds' U'' \frac{d^2 U}{ds ds'} = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left( \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - 2r \frac{d^2 r}{ds ds'} \right)$$

Tenendo conto della relazione

$$r' \frac{d^2 r}{ds ds'} = \cos \theta \cos \theta' - \cos \varepsilon$$

e delle relazioni

$$\frac{dr}{ds} = -\cos \theta \quad \frac{dr}{ds'} = \cos \theta'$$

questa forza attrattiva si può ancora scrivere

$$\frac{2ii' ds ds'}{r^2} \left( \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) \quad (11)$$

## 247. Relazione tra la forza elettromagnetica e il potenziale vettore

Abbiamo visto nella prima parte (111), che l'azione esercitata dal circuito  $C'$ , su un polo magnetico uguale a  $1^{19}$  è una forza che deriva da un potenziale e le cui componenti sono,

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

$\Omega$  è il potenziale magnetico dovuto a un foglio limitato al contorno del circuito  $C'$ , e di potenza uguale all'intensità della corrente. Sia  $d\omega'$  un elemento dell'area limitata al contorno  $C'$ ,  $l', m', n'$  i coseni direttori della normale; questo potenziale vale

$$\Omega = \int \left( l' \frac{d^1}{dx'} + m' \frac{d^1}{dy'} + n' \frac{d^1}{dz'} \right) d\omega'$$

Ora  $\frac{1}{r}$  è funzione di  $x - x', y - y', z - z'$ ; di conseguenza

$$\frac{d^1}{dx} = -\frac{d^1}{dx'} \quad \frac{d^1}{dy} = -\frac{d^1}{dy'} \quad \frac{d^1}{dz} = -\frac{d^1}{dz'}$$

Si ha, quindi, per il valore del potenziale magnetico

$$\Omega = - \int \left( l' \frac{d^1}{dx^2} + m' \frac{d^2}{dy} + n' \frac{d^1}{dz} \right) d\omega'$$

Ciò dà per le componenti  $(\alpha, \beta, \gamma)$  della forza magnetica i seguenti valori,

$$\begin{cases} \alpha = \int \left( l' \frac{d^2}{dx^2} + m' \frac{d^2}{dx dy} + n' \frac{d^2}{dx dz} \right) d\omega' \\ \beta = \int \left( l' \frac{d^2}{dx dy} + m' \frac{d^2}{dy^2} + n' \frac{d^2}{dy dz} \right) d\omega' \\ \gamma = \int \left( l' \frac{d^2}{dx dz} + m' \frac{d^2}{dy dz} + n' \frac{d^2}{dz^2} \right) d\omega' \end{cases}$$

<sup>19</sup>Si può avere un polo magnetico isolato, considerando un solenoide magnetico di lunghezza infinita con un solo polo a distanza finita.

Trasformiamo ora

$$F = \int f(r) dx' = \int \frac{1}{r} dx'$$

in un integrale esteso all'area  $\int d\omega'$  limitato al contorno  $C'$ . Si ha

$$F = \int \frac{1}{r} dx' = \int d\omega' \left( m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) - \int d\omega' \left( n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right)$$

Avremo allo stesso modo

$$G = \int d\omega' \left( l' \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - m' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right)$$

$$H = \int d\omega' \left( m' \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - l' \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right)$$

Calcoliamo  $\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$ ; abbiamo

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \int d\omega' \left( m' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx dy} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} \right) + \int d\omega' \left( n' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx dz} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} \right)$$

e sommando l'identità seguente

$$\int d\omega' \left( l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx dx} - l' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} \right) = 0$$

viene,

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha - \int d\omega l' \Delta \frac{1}{r}$$

Ora,

$$\Delta \frac{1}{r} = 0$$

pertanto,

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha$$

Un calcolo analogo al precedente dà ancora

$$\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = \beta$$

$$\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma$$

Si hanno, in modo generale, tra la forza e l'induzione magnetica le relazioni seguenti

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases} \quad (12)$$

Se il mezzo non è magnetico,  $A = B = C = 0$  e  $a, b, c$  si confondono con  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Le formule precedenti si possono pertanto scrivere in questo caso

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (13)$$

**248.** Queste formule sono dimostrate per un mezzo non magnetico; si è sempre assunto, nei calcoli, che  $\frac{1}{r}$  e le sue derivate rimanessero finite, il che presuppone che il punto dove è posto il polo unitario sia esterno alle masse attrattive; qui c'erano solo masse attraenti oltre al foglio C'. Vedremo più avanti (276, 277) che le formule (13) sono ancora vere nei mezzi magnetici; non si ha più allora  $\alpha = \frac{dH}{dy} = \frac{dG}{dz}$ , formula equivalente alla prima delle (13) nel mezzo non magnetico. Maxwell ammette senza dimostrazione che sono le formule (13) ad essere appropriate nel caso di un mezzo magnetico; o meglio, definisce, riguardo al magnetismo, le quantità  $F, G, H$ , mediante le equazioni (i3), e le chiama componenti del *potenziale vettore dell'induzione magnetica*<sup>20</sup>; duecento pagine dopo introduce le quantità  $F, G, H$ , nell'elettromagnetismo; come le abbiamo presentate in precedenza, e dice: "Queste funzioni  $F, G, H$ , non sono altro che le componenti del potenziale vettore, che abbiamo già incontrato". Infine, poco più avanti, dice: "*Abbiamo dimostrato* che le componenti dell'induzione sono legate dalle relazioni (13) alle componenti del potenziale vettore." Daremo più avanti questa dimostrazione che Maxwell *non ha dato* (275, 276).

Applichiamo ora le relazioni (13) appena ottenute, per trasformare l'espressione (10) del potenziale elettrodinamico. Abbiamo,

$$T = \int \left[ l \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\omega$$

questa espressione si può scrivere ora

$$T = \int (la + mb + nc) d\omega$$

#### **249. Potenziale elettrodinamico di un sistema voltaico formato da due circuiti**

Il potenziale mutuo di due circuiti può essere espresso in modo molto semplice. Abbiamo trovato

$$T = \int_C (Fdx + Gdy + Hdz)$$

con

$$F = \int_{C'} f(r) dx'$$

o (246)

$$f(x) = \frac{1}{r}$$

pertanto

$$F = \int_{C'} \frac{dx'}{r}$$

L'espressione precedente si può allora scrivere

$$T = \iint \frac{dx dx' + dy dy' + dz dz'}{r} = \iint \frac{ds ds' \cos \epsilon}{r}$$

Se le intensità che erano prese finora uguali, fossero qualunque, si avrebbe:

$$T = ii' \iint \frac{ds ds' \cos \epsilon}{r}$$

<sup>20</sup>Maxwell, *Trattato di elettricità e magnetismo*, traduzione francese, t. II, § 405, p. 32, §589-592, p. 266-269 e § 616, p. 290.

e, ponendo

$$M = \iint \frac{ds ds' \cos \epsilon}{r}$$

si ha infine

$$T = ii' M \quad (14)$$

$M$  è detto il *coefficiente di mutua induzione* dei circuiti  $C$  e  $C'$ .

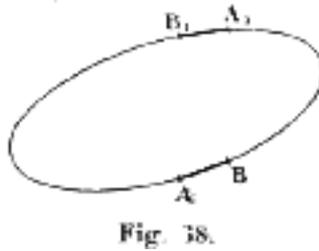
**250.** Sia ora

$$L = \iint \frac{ds ds' \cos \epsilon}{r}$$

il coefficiente di mutua induzione del circuito  $C$  e un altro che coinciderebbe con  $C$ .  $L$  è detto *coefficiente di autoinduzione* del circuito  $C$ .

I vari elementi del circuito  $C$  esercitano una certa azione l'uno sull'altro; se il circuito si deforma, questa azione produrrà un lavoro  $\delta T$ . Proponiamoci di valutare questo lavoro.

Abbiamo visto prima quale lavoro è dovuto all'azione di una corrente su un'altra corrente. Quando si vuole dedurre l'espressione del lavoro dovuto all'azione di una corrente su se stessa, si incontra una piccola difficoltà che supereremo con il seguente artificio:



Supponiamo due correnti diverse  $C$  e  $C'$  di intensità  $i$  e  $i'$  che percorrono uno stesso circuito  $C$ . Possiamo applicare a queste due correnti diverse la formula (14) e, se chiamiamo  $\delta T$  il lavoro dovuto alla loro mutua azione, possiamo scrivere

$$\delta T_1 = \delta L i i'$$

Rimane da confrontare  $\delta T$  e  $\delta T_1$ .

Siano  $d\sigma$  un elemento della corrente  $C$  di intensità  $i$ ;  $d\sigma'$ , l'elemento della corrente  $C'$  di intensità  $i'$  che coincide con  $d\sigma$ ; siano  $d\sigma_1$  un altro elemento di  $C$ , e  $d\sigma'_1$  quello degli elementi di  $C'$  che coincide con  $d\sigma'$ .

Se  $\mu$  è il lavoro dell'azione di  $d\sigma$  su  $d\sigma'_1$

se  $\mu'$  è il lavoro dell'azione di  $d\sigma'$  su  $d\sigma_1$

se  $\lambda$  è il lavoro dell'azione di  $d\sigma$  su  $d\sigma_1$

e se  $\delta T_1$  è il lavoro elementare totale dell'azione della corrente  $C$  sulla corrente  $C'$  e  $\delta T$  il lavoro dell'azione di  $C$  su se stesso, si ha:

$$\delta T_1 = \delta (L i i') = \int (\mu + \mu')$$

$$\delta T = \int \lambda$$

Ora:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{i'}{i}$$

e

$$\frac{\mu'}{\lambda} = \frac{i'}{i}$$

pertanto

$$\mu = \mu' = \frac{i'}{i}\lambda$$

L'espressione del lavoro  $\delta T_1$  diviene così

$$\delta T_1 = \int 2\frac{i'}{i}\lambda = 2\frac{i'}{i}\delta T$$

da cui

$$\delta T = \frac{1}{2}\delta(Li^2)$$

Il potenziale elettrodinamico totale del sistema voltaico formato dai due circuiti C e C', rispetto a se stesso, ha quindi l'espressione:

$$T = \frac{Li^2}{2} + Mii' + \frac{Ni'^2}{2}$$

essendo  $N$  il coefficiente di autoinduzione di C'.

Il lavoro dovuto alle azioni elettrodinamiche è:

$$\frac{i^2\delta L + 2ii'\delta M + i'^2\delta N}{2}$$

Si compone infatti

1° Del lavoro dell'azione di C su se stesso, uguale a

$$\frac{i^2}{2}\delta L$$

2° Del lavoro dell'azione di C su C', uguale a

$$ii'\delta M$$

3° Del lavoro dell'azione di C' su se stesso, uguale a

$$\frac{i'^2}{2}\delta N$$



## Cap. II - Teoria dell'induzione

**251.** L'opinione diffusa è che una volta conosciute le leggi dell'elettrodinamica, sia sufficiente l'applicazione del principio di conservazione dell'energia per trovare le leggi dell'induzione. Bertrand ha cercato di confutare questa opinione<sup>21</sup>. Discuterò dettagliatamente le sue obiezioni, ma si vedrà che la maggior parte del campo di battaglia resterà a Bertrand.

Si hanno due correnti presenti. Ciascuna è alimentata da una batteria; i conduttori si surriscaldano. Se sono mobili e si avvicinano, si produce un lavoro meccanico ricavato da qualcosa: si deve quindi ammettere che un fenomeno finora ignorato introduce un nuovo termine nelle equazioni. La legge  $dQ = Ri^2 dt$  è ancora applicabile? Perché, dice Bertrand, come il vapore che opera raffredda il vaso che lo contiene, l'elettricità non dovrebbe avere un effetto analogo? Si potrebbe immaginare che i conduttori si riscaldino meno quando la corrente opera e ciò non sarebbe così verosimile come supporre che le intensità varino?

Possiamo rispondere: no, questa ipotesi non sarebbe *a priori così verosimile* come quella confermata dall'esperienza. Supponiamo che la legge di Joule non sia più applicabile; i conduttori si riscaldano meno; si ha pertanto  $dQ = Ri^2 dt - H dt$ , con  $H$  una quantità positiva dipendente dalla velocità dei conduttori. Si potrà rendere  $H$  molto grande, dando alla velocità un valore molto grande, e potrebbe accadere che  $dQ$  sia negativo. Si utilizzerebbe quindi il calore dal circuito che si raffredderebbe e si potrebbe trasformarlo in lavoro meccanico capace di trasformarsi a sua volta, per attrito, in calore alla temperatura desiderata; ciò sarebbe contrario al principio di Clausius.

È possibile un'altra congettura: varrebbe la legge di Joule, ma la batteria consumerebbe di più per fornire la stessa corrente. In altre parole, la legge di Faraday non si applicherebbe alle correnti che producono lavoro meccanico. Questa ipotesi è molto improbabile; se ho una batteria a Parigi e la collego tramite fili ad una macchina situata a Creil, sarebbe strano se, rimanendo l'intensità sempre la stessa, la legge di Faraday cessasse di applicarsi a Parigi quando la corrente funziona a Creil.

Nonostante l'inverosimiglianza di queste due ipotesi, si è forse in torto nel considerare evidente la loro falsità, ma attirerò in particolare l'attenzione su altre due obiezioni di Bertrand che mi sembrano molto più serie. Non si tratta più di ipotesi che l'esperienza dimostra false e che non avremmo dovuto rifiutare *a priori*, ma di circostanze reali di cui spesso dimentichiamo di prendere in considerazione esponendoci così a errori.

In primo luogo, quando due correnti si attraggono, diventano solidali, e non si ha il diritto, anche se lo si fa costantemente, di applicare il principio di conservazione dell'energia a una sola di esse: bisogna considerare il sistema delle due correnti.

Ma non è tutto: l'etere ha una forza viva variabile di cui bisogna tener conto nei calcoli, come la forza dell'aria messa in moto da un mulino a vento. Qui ci sono due modi di presentare l'obiezione: si può supporre che una corrente permanente irradia forza viva come una lampada costante irradia luce; al contrario, si può supporre che la forza viva dell'etere rimanga costante appena raggiunto lo stato di regime e che non vi sia alcuna aggiunta dalla corrente: è solo durante il periodo variabile che la forza viva dell'etere varia; quando la corrente aumenta, l'etere assorbe la forza viva che restituisce quando la corrente diminuisce.

---

<sup>21</sup>*Théorie mathématique de l'électricité*, ch. XI, p. 208.

La prima ipotesi, quella dell'irraggiamento indefinito, è contraddetta dall'esperienza, poiché con corrente permanente il calore prodotto nei conduttori è equivalente all'energia voltaica della batteria. È vero che *solo l'esperienza* ce lo ha insegnato.

Quanto alla seconda ipotesi, non solo non è da respingere, ma bisogna certamente tener conto della forza viva comunicata all'etere, altrimenti non si terrà conto dei fatti. Trascurandola ci si espone all'errore.

Si potrebbero variare le obiezioni all'infinito e si sarebbe indotti a congetture più o meno improbabili che bisognerebbe respingere una dopo l'altra. Perciò Bertrand ha ragione quando dice che la *sola esperienza* potrebbe dimostrare che le leggi di Joule, Faraday e Ohm sono ancora applicabili alle correnti operanti.

**252.** Prenderemo questo fatto sperimentale come punto di partenza; e inoltre ammetteremo che l'etere abbia un'energia elettrocinetica costante quando la corrente è costante, ma variabile con l'intensità della corrente. Ma dobbiamo basarci ancora di più sull'esperienza.



Fig. 39.

Consideriamo due circuiti chiusi C e C', percorsi dalle correnti  $i$  e  $i'$ , l'esperienza mostra che al variare di  $i'$  risulta in C una forza elettromotrice  $A \frac{di'}{dt}$ , dove  $A$  è un *coefficiente di induzione* di C' su C, coefficiente indipendente dalle intensità. Se C' si sposta ed è percorso da una corrente costante  $i'$ , se al termine del tempo  $dt$ , C' assume una posizione infinitamente vicina a C'', lo spostamento del circuito da C' a C'' nel tempo  $dt$  produce una forza elettromotrice  $i' \frac{dB}{dt}$ , dove  $\frac{dB}{dt}$  è ancora un coefficiente indipendente dalle condizioni geometriche dei due circuiti.

Qui si presenta un'ipotesi del tutto naturale, è vero, ma che necessita di essere confermata dall'esperienza; siano  $A$  il coefficiente di induzione di C' su C;  $A + dA$ , quella di C'' su C.

Supponiamo che al tempo  $t$ , abbiamo in C' una corrente  $di'$  e in C'' una corrente 0. La corrente  $di'$  si sposta mantenendo la propria intensità e viene in C'' al tempo  $t + dt$ : si ha allora una corrente 0 in C', e una corrente  $di'$  in C''.

Si può immaginare di essere passati dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale con un'altra modifica variando le intensità: l'intensità in C' originariamente uguale a  $di'$  è diminuita fino ad annullarsi e in questo tempo l'intensità in C'' originariamente nulla è diventata  $di'$ . Anche i circuiti C' e C'' sono rimasti fissi. È *naturale* supporre che l'effetto prodotto su C sia lo stesso in entrambi i casi.

Nel primo caso, la forza elettromotrice sorta in A è  $di' \frac{dB}{dt}$ ; nel secondo, è la differenza tra  $-A \frac{di'}{dt}$  e  $(A + dA) \frac{di'}{dt}$ , cioè  $\frac{dA \cdot di'}{dt}$ ; pertanto

$$dA = dB$$

Se la corrente si sposta e contemporaneamente varia, le due forze elettromotrici hanno per somma:

$$A \frac{di'}{dt} + i' \frac{dA}{dt} = \frac{d(Ai')}{dt}$$

Ammetteremo questa equazione, conseguenza dell'uguaglianza  $dA = dB$ , *come un fatto sperimentale*.

**253.** L'applicazione del principio di conservazione dell'energia ci permetterà di determinare i coefficienti di induzione definiti come prima.

Siano:

$A$  il coefficiente di induzione di  $C$  rispetto a se stesso

$B$  il coefficiente di induzione di  $C$  rispetto a  $C'$

$B'$  il coefficiente di induzione di  $C'$  rispetto a  $C$

$D$  il coefficiente di induzione di  $C'$  rispetto a se stesso

La legge di Ohm, applicata ai due circuiti, dà

$$\begin{cases} Ri = E - \frac{d(Ai)}{dt} - \frac{d(Bi')}{dt} \\ R'i' = E' - \frac{d(B'i')}{dt} - \frac{d(Di')}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

Scriviamo che l'energia si conserva. L'energia voltaica spesa nel tempo  $dt$  è

$$(Ei + E'i') dt$$

Essa si presenta sotto tre forme:

1° Calore di Joule;

2° Lavoro elettrodinamico;

3° Incremento di energia elettrocinetica dell'etere.

Se questa energia dell'etere è rappresentata da  $U$ , l'equazione si scrive:

$$(Ei + E'i') dt = Ri^2 dt + R'i'^2 dt + \frac{1}{2} (i^2 dL + 2ii' dM + i'^2 dN) + dU \quad (2)$$

Non conosco nulla sulla funzione  $U$ ; scrivo solo che  $dU$  è un differenziale esatto. Sostituiamo nell'espressione di  $dU$ ,  $E - ri$  con il suo valore ricavata dalle (1)

$$dU = id(Ai) + id(Bi') + id(B'i) + i'd(Di') - \frac{1}{2} (i^2 dL + 2ii' dM + i'^2 dN) \quad (3)$$

Supponiamo che varino le sole intensità- L'ultimo termine scompare e  $dU$  si riduce a:

$$dU = Aidi + Bidi' + B'i'di + Di'di'$$

essendo  $dU$  un differenziale esatto, serve che

$$\frac{d}{dt} (Ai + B'i') = \frac{d}{dt} (Bi + Di')$$

da cui

$$B = B'$$

pertanto,

$$dU = Aidi + Bd(ii') + Di'di'$$

e integrando

$$U = \frac{Ai^2}{2} + Bii' + \frac{Di'^2}{2} + cost$$

dove la costante non dipende dalle intensità. Poiché  $U$  è nullo in assenza di corrente, quando  $i = i' = 0$ , la costante è nulla.

Da ciò, quando le intensità sono costanti e i conduttori si spostano,  $dU$  si riduce a:

$$dU = \frac{1}{2} (i^2 dA + 2ii' dB + i'^2 dD)$$

espressione che deve essere identica al valore del secondo membro della (3), quando si pone  $di = di' = 0$ , cioè:

$$i^2 dA + 2ii' dB + i'^2 dD - \frac{1}{2} (i^2 dL + 2ii' dM + i'^2 dN)$$

Identificando si ha

$$\frac{1}{2} dA = dA - \frac{1}{2} dL \quad dB = 2dB - dM \quad \frac{1}{2} dD = dD - \frac{1}{2} dN$$

o anche

$$dA = dL$$

da cui

$$A = L$$

poiché  $A$  e  $L$  si annullano quando i conduttori si trovano a una distanza infinita e anche

$$D = N \quad B = M \quad T = U$$

*Il potenziale elettrodinamico rappresenta pertanto l'energia elettrocinetica dell'etere.*

Si può allora scrivere, la legge di Ohm:

$$E - Ri = \frac{d(Li + Mi')}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dT}{di}$$

$$E' - R'i' = \frac{d}{dt} \frac{dT}{di'}$$

Questa forma ricorda le equazioni di Lagrange.

Maxwell ha mostrato — e questa è una delle parti più originali del suo lavoro — che le leggi delle azioni elettrodinamiche e dell'induzione possono essere poste sotto forma di equazioni di Lagrange; le forze elettromotrici di induzione sarebbero quindi forze di inerzia<sup>22</sup>.

---

<sup>22</sup>Si veda la prima parte, n° 151, p. 135 e seguenti.

# Cap. III - Teoria di Weber<sup>23</sup>

## 254. Spiegazione delle attrazioni elettrodinamiche.

Weber ha voluto rendere conto delle attrazioni elettrodinamiche, considerando le correnti come prodotte da *masse elettriche* in movimento nei conduttori, e assumendo che tra due masse elettriche si eserciti un'azione che dipende dal loro movimento e che si riduce all'azione determinata dalla legge di Coulomb quando esse sono a riposo.

Siano due masse  $e$  ed  $e'$ , a riposo: la forza repulsiva che si esercita tra esse è uguale a  $+\frac{ee'}{r^2}$ , in *unità elettrostatiche*. Weber ammette che se esse sono in movimento, la repulsione diviene:

$$\frac{ee'}{r^2} + ee' \left[ A \frac{d^2r}{dt^2} + B \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \quad (1)$$

con  $A$  e  $B$  funzioni soltanto di  $r$ .

Si tratta di determinare  $A$  e  $B$  in modo da ritrovare la formula di Ampère, in virtù della quale la *repulsione* tra due elementi di corrente è, in *unità elettromagnetiche*:

$$+\frac{ii'dsds'}{r^2} \left( 2r \frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \quad (2)$$

Le quantità di elettricità  $e$  ed  $e'$  sono supposte percorrere due circuiti con velocità costanti  $v$  e  $v'$ . La distanza  $r$  è funzione di  $s$  e di  $s'$  e si ha:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} & v' &= \frac{ds'}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{ds}v + \frac{dr}{ds'}v' \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d^2r}{ds^2}v^2 + 2\frac{d^2r}{dsds'}vv' + \frac{d^2r}{ds'^2}v'^2 \\ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 &= \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 v^2 + 2\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} vv' + \left( \frac{dr}{ds'} \right)^2 v'^2 \end{aligned}$$

La repulsione elettrodinamica [secondo termine dell'espressione (1)] diviene così:

$$\lambda ee'v^2 + 2\mu ee'vv' + \nu ee'v'^2$$

ponendo, per sintetizzare

$$\begin{aligned} \lambda &= A \frac{d^2r}{ds^2} + B \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \\ \mu &= A \frac{d^2r}{dsds'} + B \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \\ \nu &= A \frac{d^2r}{ds'^2} + B \left( \frac{dr}{ds'} \right)^2 \end{aligned}$$

<sup>23</sup>*Electrodynamische Maassbestimmungen*, p. 305.

Supponiamo che  $ds$  contenga  $e$  elettricità positiva,  $e_1$  di elettricità negativa ( $e_1$  è un numero essenzialmente negativo; quando il corpo allo stato neutro  $e + e_1 = 0$ ). La velocità di  $e$  è  $v$ , di  $e_1$  è  $v'$ . In  $ds'$  si ha una quantità  $e'$  di elettricità positiva ed una quantità  $e'_1$  di elettricità negativa animate rispettivamente di velocità  $v'$  e  $v'_1$ .

La repulsione totale di  $ds$  su  $ds'$  si ottiene componendo le repulsioni delle quantità  $e$  ed  $e_1$  di elettricità contenute in  $ds$  sulle quantità  $e'$  e  $e'_1$ , contenute in  $ds'$ .

Si ha quindi:

$$R = \lambda \sum ee'v^2 + 2\mu \sum ee'vv' + \nu \sum ee'v'^2$$

ponendo:

$$\sum ee'v^2 = ee'v^2 + ee'_1v^2 + e_1e'v_1^2 + e_1e'_1v_1^2 = (ev^2 + e_1v_1^2)(e' + e'_1)$$

Analogamente

$$\sum ee'vv' = (ev + e_1v_1)(e'v' + e'_1v'_1)$$

$$\sum ee'v'^2 = (e + e')(e'v'^2 + e'_1v_1'^2)$$

Il flusso elettrico del primo circuito è:

$$\frac{e}{v} = \frac{ev}{ds}$$

per l'elettricità positiva.

Vale  $\frac{e_1v_1}{ds}$  per l'elettricità negativa. Il debito totale è pertanto  $\frac{ev+e_1v_1}{ds}$ ;

D'altra parte, l'intensità  $i$  è per definizione il flusso totale espresso in unità elettromagnetiche. Il flusso totale espresso in unità elettrostatiche è quindi  $ci$ , essendo  $c$  il rapporto tra le unità, per cui si ha:

$$\frac{ev + e_1v_1}{ds} = ci$$

Quindi:

$$\sum ee'vv' = c^2 ii' ds ds'$$

La repulsione elettrodinamica è nulla tra un conduttore carico di elettricità, ma attraverso il quale non passa corrente, e un altro percorso da corrente senza essere carico.

$R$  deve essere nullo se il conduttore  $C$  non è carico ma percorso da corrente, cioè se  $e + e_1 = 0$ , e se il conduttore  $C'$  è carico ma non percorso da alcuna corrente, cioè se  $v' = v'_1 = 0$ ;

Ma se  $v' = v'_1 = 0$  gli ultimi due termini di  $R$  si annullano; il primo termine deve quindi pure annullarsi; pertanto si ha:

$$\lambda (e' + e'_1) (ev_1^2 + e_1v_1'^2) = 0$$

$\lambda$  non è in generale nullo;  $e + e_1 \geq 0$  se il conduttore  $C'$  è carico come abbiamo supposto.

Pertanto si ha

$$ev^2 + e_1v_1^2 = 0$$

e analogamente:

$$e'v'^2 + e'_1v_1'^2 = 0$$

Queste sono condizioni molto strane e artificiose. Inoltre, ci impongono di ammettere la reale esistenza di due fluide. Inoltre: Rowland ha realizzato azioni elettrodinamiche con un disco carico di elettricità e dotato di un moto rapido (si veda § 382); allora

$$v = v_1 \quad \text{da cui} \quad ev^2 + e_1v_1^2 = (e + e_1)v^2$$

e né  $v$  né  $e + e_1$  sono nulli. È vero che facendo il calcolo si riconosce che questo fattore è assolutamente trascurabile negli esperimenti di Rowland.

**255.** La teoria di Weber può essere presentata sotto una luce più favorevole. Niente è più lontano dai miei pensieri che difenderla; ma voglio solo mostrare come potremmo renderla meno strana. Possiamo assumere che  $e$  ed  $e_1$  separatamente siano molto grandi, molto maggiori in valore assoluto della loro somma algebrica  $e + e_1$ ;  $e$  ed  $e_1$  sarebbero dell'ordine di grandezza di una grandissima quantità  $N$ ,  $e + e_1$  dell'ordine di grandezza dell'unità  $e$ ,  $v$  e  $v_1$  dell'ordine di  $\frac{1}{N}$ . Ciò può sembrare del tutto naturale secondo la velocità che alcuni fisici attribuiscono all'elettricità negli elettroliti, una velocità che, secondo loro, non supererebbe alcuni millimetri al secondo; non voglio discutere qui in alcun modo le loro conclusioni. Non è necessario, inoltre, che  $v$  e  $v_1$  siano così piccole da essere considerati molto piccole. È sufficiente che  $v$  sia piccolo rispetto ad  $c$ , che è uguale alla velocità della luce.

$ev + e_1v_1$  sarà dell'ordine di grandezza di 1;  $ev^2 + e_1v_1^2$  dell'ordine di  $\frac{1}{N}$ ; e due dei termini di  $R$ , quelli in  $\lambda$  e in  $\nu$  sono completamente trascurabili in presenza del termine in  $\mu$ . Non vi sono più allora le stesse difficoltà, e si rende conto delle esperienze di Rowland.

**256.** Si trova insomma, tenendo conto solo del termine in  $\mu$  e sostituendo

$$\sum ee'vv'$$

con il suo valore

$$R = 2c^2ii'dsds' \left( A \frac{d^2r}{dsds'} + B \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right)$$

identificando con (2), si ha

$$A = \frac{1}{c^2r} \quad B = -\frac{1}{2c^2r^2}$$

pertanto l'espressione della repulsione elettrodinamica tra due masse in movimento è:

$$\frac{ee'}{c^2} \left[ \frac{dr}{r} \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr}{2r^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$$

e deve essere uguale a  $-d\psi$  se esiste un potenziale e lo si chiama  $\psi$ . Ma si ha

$$\frac{dr}{r} \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \cdot d \cdot \frac{dr}{dt}$$

da cui:

$$d\psi = -\frac{ee'}{c^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \cdot d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{dr}{r^2} \times \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{ee'}{c^2} d \left[ \frac{1}{2r} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$$

Cerchiamo da ciò, il potenziale naturale di due elementi di corrente (limitandoci a un potenziale elettrodinamico); si ha

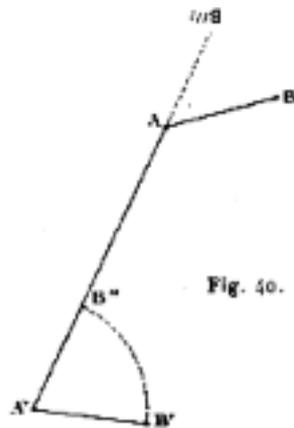
$$-\frac{1}{2c^2r} \sum ee' \left( \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{1}{2c^2r} \left[ \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \sum ee'v^2 + 2 \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} \sum ee'vv' + \left( \frac{dr}{ds'} \right)^2 \sum ee'v'^2 \right]$$

Il primo e l'ultimo termine scompaiono, resto il termine di mezzo che è  $2c^2ii'dsds' \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}$ ; il potenziale elettrodinamico è quindi

$$-ii'dsds' \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}$$

**258.** Abbiamo una differenza con la teoria di Ampère, secondo la quale l'azione reciproca di due circuiti chiusi ammette un potenziale, ma non l'azione reciproca di due elementi, e nemmeno l'azione reciproca di una corrente chiusa e di una porzione di corrente. Dico che nella teoria di Ampère un elemento di corrente non ha potenziale rispetto ad una corrente chiusa; consideriamo

infatti un elemento  $AB$  che si sposta sotto l'azione di una corrente chiusa e giunge in  $A'B'$ ; posso scegliere  $AA'$ , tale che il lavoro compiuto in questo spostamento non sia nullo. Potrò sempre riportare l'elemento in  $AB$  senza lavoro, se è vera la legge di Ampère; infatti ruoto  $A'B'$  attorno ad  $A'$ , finché la sua direzione non coincide con  $AA'$ . Il lavoro compiuto in questa relazione è infinitesimo di ordine superiore. Faccio poi muovere l'elemento nella sua direzione: arriva in  $AB''$ : nessun lavoro, poiché l'azione di una corrente chiusa è normale all'elemento; una rotazione attorno ad  $A$  lo riporta poi in  $AB$ , e effettuando ancora solo solo un lavoro infinitamente piccolo di ordine superiore. Non esiste quindi alcun potenziale, poiché si è potuto riportare l'elemento nella sua posizione iniziale senza che il lavoro totale compiuto sia nullo; questo lavoro totale si riduce a quello compiuto per portare  $AB$  in  $A'B'$ .



La contraddizione con la teoria di Weber è solo apparente. In questa teoria, si presume che le molecole elettriche abbiano un moto uniforme; questo è possibile solo per una corrente chiusa, non per una corrente aperta. All'estremità di una corrente aperta, infatti, le molecole elettriche si *fermano*; la loro accelerazione quindi non è nulla. Gli elementi vicini alle estremità non obbediranno alla legge di Ampère, perché bisognerebbe tener conto dell'accelerazione delle molecole elettriche che vi circolano, accelerazione che non è più nulla. Ci sarebbe quindi una divergenza tra le due teorie se si dovesse trattare, ad esempio, di una corrente chiusa e di una porzione di corrente interamente libera.

Ma questo non è il caso in cui siamo soliti metterci quando esaminiamo sperimentalmente l'azione di una corrente chiusa su un elemento corrente.



Infatti, quando studiamo l'azione di un conduttore chiuso su un elemento mobile  $AMB$ , questo elemento mobile  $AMB$  è esso stesso parte di una corrente chiusa e le sue estremità  $A$  e  $B$  sono mobili lungo conduttori fissi. Allora non c'è accelerazione per la molecola che arriva in  $A$  o in  $A'$ ; e, in questo caso, la teoria di Weber ci porta alla legge di Ampère. Si trova allora, infatti, che le forze indicate dalle due leggi ammettono entrambe un potenziale, e lo stesso potenziale; solo che nella teoria di Ampère esiste un potenziale solo in virtù delle particolari connessioni

imposte al sistema. Se invece considerassimo le correnti istantanee, aperte, la legge di Ampère e l'ipotesi di Weber porterebbero a risultati diversi; ma in questo caso l'esperimento sembra difficilmente possibile.

## 259. Induzione nella teoria di Weber

La legge di Weber soddisfa il principio di conservazione dell'energia. Pertanto, secondo Maxwell, da ciò si devono dedurre le leggi dell'induzione. Nel caso presente questo ragionamento non vale: troveremmo le leggi ordinarie dell'induzione solo a partire dall'ipotesi di Weber, supponendo di avere solo correnti chiuse, e in nessun modo se supponiamo di avere circuiti aperti. Maxwell ha commesso gravi errori nel calcolo<sup>24</sup>, ma ne ha fatti due che si compensano a vicenda.

Cerchiamo l'induzione di C su C'. I due circuiti sono mobili, la distanza  $r$  dei due elementi  $ds$  e  $ds'$  è qui funzione non solo di  $s$  e di  $s'$ , ma anche del tempo  $t$ ; si ha pertanto

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$v$  funzione di  $s$  e di  $t$ .

$$\frac{ds'}{dt} = v'$$

$v'$  funzione di  $s'$  e di  $t'$ .

L'azione elettrodinamica è

$$\frac{ee'}{c^2 r^2} \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right]$$

(rappresento con  $\partial$  le derivate totali, e con  $d$  le derivate parziali).

$\frac{\partial r}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$  valgono

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{ds} v + \frac{dr}{ds'} v' + \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 + \left[ 2 \frac{d^2 r}{ds dt} v + 2 \frac{d^2 r}{ds' dt} v' \right] + \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{ds} \frac{dv}{dt} + \frac{dr}{ds'} \frac{dv'}{dt} + \frac{dr}{ds} \frac{dv}{ds} v + \frac{dr}{ds'} \frac{dv'}{ds'} v'$$

Maxwell dimentica i due termini che abbiamo messo tra parentesi.

In  $ds$  abbiamo  $e$  di elettricità positiva, con velocità  $v$ ; ed  $e_1$  di negativa, con velocità  $v_1$ ; in  $ds'$  si hanno le quantità di elettricità  $e'$  ed  $e'_1$ , con le velocità  $v'$  e  $v'_1$ .

Se  $R_1$  è la repulsione di  $e$  su  $e'$ ,  $R_2$  di  $e_1$  su  $e'$ ,  $R_3$  di  $e$  su  $e'_1$ ,  $R_4$  di  $e_1$  su  $e'_1$ , la repulsione totale, precedentemente trovata, è

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

La forza elettromotrice di induzione è proporzionale alla forza che tende a separare l'elettricità positiva dall'elettricità negativa nell'elemento  $ds$ ; ciò sarà  $R_1 + R_2 - R_3 - R_4$ ; bisognerà moltiplicare per  $\cos \theta' = \frac{dr}{ds}$ , per avere la componente della forza nella direzione del filo. La forza elettromotrice desiderata è quindi uguale a

$$E = k \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4) \quad (4)$$

essendo  $k$  un coefficiente costante che dipende dall'unità alla quale sono riferite le forze elettromotrici.

Per determinare questo coefficiente  $k$  esaminiamo un caso particolare, ad esempio dove le masse elettriche sono a riposo e dove le forze elettromotrici sono quindi ridotte alle forze elettrostatiche.

In questo caso, sintetizzando

$$H = \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

<sup>24</sup>Maxwell, *Électr. et Magn.*, trad. franc., t. II, § 806-860, p. 554-558, si veda *Comptes rendus*, t. CX, p. 825 (21 aprile 1890).

viene:

$$H = \frac{e + e_1}{r^2} (e' - e'_1) \frac{dr}{ds'} = -\frac{1}{c} (e' - e'_1) \frac{d\varphi}{ds'}$$

rappresentando con  $\varphi$  il potenziale elettrostatico

$$\varphi = \frac{1}{c} \frac{e + e_1}{r}$$

La forza elettromotrice è d'altra parte

$$E = -\frac{d\varphi}{ds'} \quad ds' = \frac{H ds'}{e' - e'_1} c$$

e, poiché per definizione  $E = kH$ , si ha:

$$k = c \frac{ds'}{(e' - e'_1)} \quad (5)$$

Potremo quindi in generale dedurre la forza elettromotrice. E dalla conoscenza di

$$H = \cos \theta' (R_1 + R_2 - R_3 - R_4)$$

**260.** Basandosi sulle espressioni di  $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$  e  $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$  si riconoscerà che  $H$  contiene termini in  $v^2, v'^2, vv', v, v'$ , che sono tutti noti; e termini in  $\frac{dv}{dt}, \frac{dv'}{dt}, v \frac{dv}{ds}, v' \frac{dv'}{ds}$ .

Se si traslascia un coefficiente dipendente soltanto dalla posizione e dal moto relativo di due elementi  $ds$  e  $ds'$  ma che è indipendente da  $e, e_1, v, v_1$  e da  $e', e'_1, v', v'_1$ :

i termini in  $v^2$  saranno  $(ev^2 + e_1 v_1^2) (e' - e'_1)$

i termini in  $vv'$  saranno  $(ev + e_1 v_1) (e' v' - e'_1 v'_1)$

i termini in  $v'^2$  saranno  $(e + e_1) (e' v'^2 - e'_1 v'^2_1)$

i termini in  $v$  saranno  $(ev + e_1 v_1) (e' - e'_1)$

i termini in  $v'$  saranno  $(e + e_1) (e' v' - e'_1 v'_1)$

i termini noti:  $(e + e_1) (e' - e'_1)$  si avrà analogamente ciò che danno i termini in  $\frac{dv}{dt}, v \frac{dv}{ds}$ , ecc.

Nelle correnti voltaiche comuni, si ha:

$$e = -e_1 \quad e' = -e'_1 \quad v = -v_1 \quad v' = -v'_1$$

Tutti i termini scompaiono, salvo quello in  $v$  e il termine in  $\frac{dv}{dt}$  (il termine in  $v \frac{dv}{ds}$  scompare per la stessa ragione del termine in  $v^2$ ). I soli termini importanti nell'espressione di  $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$  sono quindi  $\frac{dr}{ds} \frac{dv}{dt}$  e il termine  $2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v$ , che è uno di quelli che Maxwell ha dimenticato.

In  $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$  che vale

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 v^2 + \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 v'^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} v + 2 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} v v' + 2 \frac{dr}{ds'} \frac{dr}{dt} v'$$

si dovrà conservare  $2 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} v$ .

L'azione elettrodinamica (3) si scrive quindi, dopo averla moltiplicata per

$$\cos \theta' = \frac{dr}{ds'}$$

per avere la componente della forza nella direzione del filo,

$$H = \frac{(e' - e'_1)}{c^2 r^2} \left[ r \frac{dr}{ds} \left( e \frac{dv}{dt} + e_1 \frac{dv_1}{dt} \right) + \left\{ 2r \frac{d^2 r}{ds dt} (ev + e_1 v_1) \right\} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} (ev + e_1 v_1) \right] \frac{dr}{ds'}$$

Ora

$$ev + e_1 v_1 = cid s$$

$$e \frac{dv}{dt} + e_1 \frac{dv_1}{dt} = c \frac{di}{dt} ds$$

Pertanto,

$$H = c \frac{(e_1 - e'_1)}{c^2 r^2} \left[ r \frac{dr}{ds} \frac{di}{dt} + \left\{ 2r \frac{d^2 r}{ds dt} i \right\} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} i \right] \frac{dr}{ds'}$$

Da ciò il valore della forza elettromotrice,

$$E = kH = c \frac{ds'}{(e' - e'_1)} \cdot c \frac{(e' - e'_1)}{c^2 r^2} ds \left[ r \frac{dr}{ds} \frac{di}{dt} + \left\{ 2ir \frac{d^2 r}{ds dt} \right\} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} i \right] \frac{dr}{ds'}$$

$$= \frac{ds ds'}{r^2} \left[ r \frac{dr}{ds} \frac{di}{dt} + \left\{ 2ir \frac{d^2 r}{ds dt} \right\} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} i \right] \frac{dr}{ds'}$$

Ora,

$$\frac{ds ds'}{r^2} \left[ r \frac{dr}{ds} \frac{di}{dt} \frac{dr}{ds'} - i \frac{dr}{ds} \frac{dr}{dt} \frac{dr}{ds'} \right] = ds ds' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{d}{dt} \left( \frac{i}{r} \right)$$

Pertanto,

$$E = ds ds' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{d}{dt} \left( \frac{i}{r} \right) + \left\{ \frac{2ids ds'}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{d^2 r}{ds dt} \right\}$$

Maxwell trascura il secondo termine e scrive il primo

$$E = ds ds' \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{i}{r} \right) \quad (1)$$

cosa non esatta. Poiché,

$$ds ds' \frac{d}{dt} \left[ \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{i}{r} \right] = ds ds' \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{d}{dt} \left( \frac{i}{r} \right) + \frac{ids ds'}{r} \left[ \frac{dr}{ds} \frac{d^2 r}{ds dt} + \frac{dr}{ds'} \frac{d^2 r}{ds dt} \right]$$

dimentica quindi il secondo termine.

In ultima analisi, la somma algebrica dei termini trascurati

$$\frac{2ids ds'}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d^2 r}{ds dt}$$

e

$$-\frac{ids ds'}{r} \left[ \frac{dr}{ds} \frac{d^2 r}{ds dt} + \frac{dr}{ds'} \frac{d^2 r}{ds dt} \right]$$

si scrive

$$-\frac{ids ds'}{r} \left[ \frac{dr}{ds} \frac{d^2 r}{ds dt} - \frac{dr}{ds'} \frac{d^2 r}{ds dt} \right]$$

Così quindi, secondo Maxwell, la forza elettromotrice totale (1) vale, integrando rispetto a  $s$  e  $s'$

$$E = \frac{d}{dt} \iint \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \frac{i}{r} ds ds' = -\frac{d(Mi)}{dt}$$

vera solo se l'integrale dei termini tralasciati,

$$\iint \frac{ids ds'}{r} \left[ \frac{dr}{ds'} \frac{d^2 r}{ds dt} - \frac{dr}{ds'} \frac{d^2 r}{ds' dt} \right]$$

è nullo.

Questo integrale, però, è nullo solo se i due circuiti ai quali si estende l'integrazione sono chiusi.

Mostriamolo. Consideriamo a tale scopo l'integrale

$$\int \frac{ds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'}$$

che, integrato per parti, dà

$$\int \frac{ds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = \left[ \log r \cdot \frac{d^2r}{dsdt} \right] - \int \log r \cdot \frac{d^3r}{dsds't} ds'$$

Essendo il circuito considerato chiuso, il primo termine del secondo membro di questa espressione è nullo, essendo il suo valore lo stesso ai due estremi. Rimane quindi

$$\int \frac{ds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = - \int \log r \cdot \frac{d^3r}{dsds't} ds'$$

Integriamo rispetto a  $s$ ; viene

$$\iint \frac{dsds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = - \iint \log r \cdot \frac{d^3r}{dsds't} dsds'$$

Ciò vuol dire che il primo membro è uguale a un'espressione che non cambia quando si permutano  $s$  e  $s'$ . Di conseguenza,

$$\iint \frac{dsds'}{r} \frac{d^2r}{dsdt} \frac{dr}{ds'} = \iint \frac{dsds'}{r} \frac{d^2r}{ds'dt} \frac{dr}{ds}$$

e ciò quanto vogliamo mostrare.

Ma, lo ripeto, *ciò è vero solo per due correnti chiuse.*

## Cap. IV - Teoria di Helmholtz

**261.** L'esperienza ci fa conoscere l'azione reciproca di due correnti chiuse; per dedurre l'azione di due elementi di corrente, Ampère fu costretto a formulare l'ipotesi che tale azione si riducesse a una forza diretta lungo la retta che congiunge questi due elementi. Questa non è l'unica possibile. Abbiamo visto sopra come Weber, guidato da una teoria che concorda con quella di Ampère nel caso delle correnti chiuse, sia stato portato ad ammettere che due elementi hanno un mutuo potenziale che vale

$$-ii' \frac{ds ds' dr dr}{r ds ds'}$$

D'altro lato F. Neumann ammette per il potenziale reciproco di due elementi l'espressione:

$$-ii' ds ds' \frac{\cos \varepsilon}{r}$$

Helmholtz cerca una formula generale che comprenda quelle di Weber e Neumann e a questo scopo formula le seguenti ipotesi:

1° Esiste un potenziale reciproco di due elementi di corrente;

2° Questo potenziale è inversamente proporzionale a  $r$ .

Poiché, in virtù del principio delle correnti sinusoidali, questo potenziale deve essere lineare in  $\cos \varepsilon \cos \theta'$  (Cfr. n° 240) Helmholtz è portato a dargli l'espressione

$$ii' ds ds' \left( A \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} \right)$$

dove  $A$  e  $B$  sono coefficienti costanti.

Questa espressione si può scrivere, ricordando che (n° 240)

$$\cos \theta \cos \theta' = \cos \varepsilon + r \frac{d^2 r}{ds ds'}$$

$$ii' ds ds' \left[ (A + B) \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{d^2 r}{ds ds'} \right]$$

Se si hanno due correnti chiuse, il loro mutuo potenziale elettrodinamico sarà l'integrale doppio

$$T = \iint ii' ds ds' \left[ (A + B) \frac{\cos \varepsilon}{r} + B \frac{d^2 r}{ds ds'} \right]$$

Il secondo termine è nullo, essendo l'integrale preso lungo un circuito chiuso; pertanto,

$$\int ds \frac{d^2 r}{ds ds'} = 0$$

Il potenziale elettrodinamico si riduce allora a

$$(A + B) \iint ii' ds ds' \frac{\cos \varepsilon}{r}$$

L'esperienza mostra che si può assumere (n° 246 e 249)

$$A + B = 1$$

Ma finché l'esperimento riguarda correnti chiuse, è impotente determinare il coefficiente  $B$  del termine  $\frac{d^2r}{dsds'}$ ; è il motivo per cui, in varie ipotesi, si è potuto attribuire valori diversi a  $B$ .

Ponendo con Helmholtz

$$B = \frac{1 - k}{2}$$

l'espressione del potenziale elementare diviene

$$iidsds' \left( \frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{1 - k}{2} \frac{d^2r}{dsds'} \right)$$

La formula di Weber è un caso speciale di quella di Helmholtz; la si ritrova assegnando a  $k$  il valore  $-1$ ; allora il potenziale ha la forma:

$$iidsds' \left( \frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{d^2r}{dsds'} \right) = \frac{i i' ds ds' dr dr}{r ds ds'}$$

Ponendo  $k = 1$ , si ha l'espressione del potenziale proposta da Franz Neumann. Ponendo  $k = 0$ , dice Helmholtz, si ritroverà l'elettrodinamica di Maxwell. Questa affermazione di Helmholtz è stata talvolta mal compresa; torneremo su questo argomento più avanti (n. 285).

**262.** La formula di Ampère può essere considerata un caso speciale di quella di Helmholtz? In nessun modo. Infatti, nella teoria dell'azione reciproca di Ampère, abbiamo visto che due elementi non vi è potenziale. La formula di Ampère è l'unica che spiega i fatti attraverso un'azione tra due elementi, ridotta a una forza diretta lungo la retta congiungente. Non appena si ammette che questa azione deriva da un potenziale, poiché questo dipende dall'orientamento degli elementi, le sue derivate rispetto agli angoli che definiscono tale orientazione non sono identicamente nulle, e lo stesso vale per il lavoro virtuale che risulta da una variazione infinitesimale di questi angoli; cioè che, oltre alla forza diretta lungo la linea congiungente, ci sono delle coppie che tendono a far ruotare gli elementi e i cui momenti sono dell'ordine di grandezza della forza. Bertrand ha avanzato obiezioni alla teoria di Helmholtz, (*Comptes rendus*, LXXIII, p. 965, LXXV, p. 860, LXXVII, p. 1049); secondo lui, tutte queste coppie, agendo su tutti gli elementi di un filo conduttore percorso da una corrente e sottoposto all'azione di un'altra corrente o della terra, dovrebbero immediatamente rompere il filo e ridurlo in polvere. Helmholtz rispose che un ago magnetico non si rompeva sotto l'azione della terra, sebbene su ogni elemento di lunghezza agisse una coppia il cui momento era dell'ordine di grandezza dell'elemento. Bertrand rispose che oggi nessuno credeva alla reale esistenza dei fluidi magnetici di Coulomb e che la risposta di Helmholtz non aveva senso; sembra che Helmholtz avrebbe potuto affermare che non si poteva più credere all'esistenza oggettiva di una corrente materiale che scorreva in un conduttore.

Non voglio entrare in questa controversia; voglio però mostrare qual è il malinteso che separa questi due eminenti studiosi.

Per Bertrand, la corrente si compone di elementi estremamente piccoli, il cui numero è estremamente grande sebbene finito; a ciascuno di essi è applicata una coppia le cui due componenti hanno un'esistenza reale e un punto di applicazione perfettamente determinato. Nella figura gli elementi sono rappresentati dai quattro rettangoli a linea continua e le coppie ad essi applicate sono  $A_1F_1; B_1G_1; A_2F_2; B_2G_2; A_3F_2, B_2G_3; A_4F_4; B_4G_4$ .

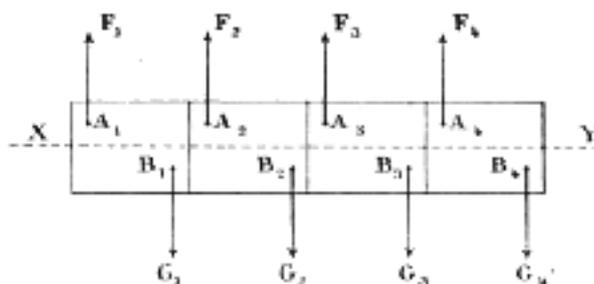


Fig. 00.

In queste condizioni è chiaro che la rottura avverrà lungo la linea tratteggiata XY.

Per von Helmholtz, al contrario, la coppia è solo una sorta di tendenza a ruotare che ha una propria esistenza indipendente dalle sue due componenti, che non possono avere un punto di applicazione determinato. La coppia esiste ogni volta che la rotazione produce lavoro.

In altre parole Helmholtz suppone che, per quanto si spinga oltre la divisione della materia, ciascuna parte rimarrà sempre soggetta ad una coppia. Bertrand ritiene invece che verrà un tempo in cui le parti ultime della materia saranno sottoposte ad un'unica forza e che, adottando un altro modo di vedere, ci si lasci ingannare da una finzione matematica che nasconde la realtà dei fatti. Forse non sarebbe impossibile, anche accettando il punto di vista di Bertrand, immaginare una distribuzione delle forze che non provochi la rottura dei conduttori. Ma probabilmente sarebbe complicato e innaturale.

Mi limiterò a ricordare che, nella teoria di Weber, che è solo un caso particolare di quella di Helmholtz, si può spiegare tutto supponendo che l'azione reciproca di due elementi si riduca ad un'unica forza diretta lungo la congiungente. Ho detto al n. 258 come ciò si possa conciliare con il fatto dell'esistenza di una potenziale apparentemente contraddittoria.

### 263. Equazioni fondamentali

Abbiamo messo il potenziale elettrodinamico reciproco di due circuiti nella forma (n°. 249)

$$T = i \int (F dx + G dy + H dz) \quad (1)$$

nel caso di un circuito chiuso.

Qui, si ha, per due circuiti qualsiasi:

$$T = \iint i i' ds ds' \left[ \frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2 r}{ds ds'} \right] \quad (2)$$

Si ha d'altronde,

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon ds ds' &= dx dx' + dy dy' + dz dz' \\ \frac{d^2 r}{ds ds'} ds &= \frac{d^2 r}{dx ds'} dx + \frac{d^2 r}{dy ds'} dy + \frac{d^2 r}{dz ds'} dz \end{aligned}$$

Sostituendo in  $T$  questo valore di  $\frac{d^2 r}{ds ds'}$ , possiamo esprimere  $T$  nella forma (1), già trovata nel caso di una corrente chiusa, ponendo,

$$\begin{cases} F = \int \frac{i dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \int i' ds' \frac{d^2 r}{dx ds'} \\ G = \int \frac{i dy'}{r} + \frac{1-k}{2} \int i' ds' \frac{d^2 r}{dy ds'} \\ H = \int \frac{i dz'}{r} + \frac{1-k}{2} \int i' ds' \frac{d^2 r}{dz ds'} \end{cases} \quad (3)$$

Diremo che  $F, G, H$  sono le componenti del *potenziale vettore*.

Poniamo

$$\psi = \int i' ds' \frac{dr}{ds'} \quad (4)$$

dove l'integrale è esteso al contorno C ed essendo nullo nel caso di una corrente chiusa; differenziando rispetto a  $x$ , si ha

$$\frac{d\psi}{dx} = \int i' \frac{d^2 r}{dx ds'} ds'$$

$F, G, H$  diventano

$$\begin{cases} F = \int \frac{i dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx} \\ G = \int \frac{i dy'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dy} \\ H = \int \frac{i dz'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (5)$$

Si può anche scrivere

$$\psi = \int i' \left( \frac{dr}{dx'} dx' + \frac{dr}{dy'} dy' + \frac{dr}{dz'} dz' \right) \quad (6)$$

e infatti se si considerano  $x, y, z$  come costanti si ha

$$dr = \frac{dr}{ds'} ds = \frac{dr}{dx'} dx' + \frac{dr}{dy'} dy' + \frac{dr}{dz'} dz'$$

**264.** Diamo a queste equazioni una forma applicabile ai conduttori tridimensionali.

Se  $\rho$  è la densità dell'elettricità libera,  $\rho d\tau$  è la quantità di elettricità contenuta nel volume  $d\tau$ ;  $ud\omega$  è la quantità di elettricità che attraversa nell'unità di tempo l'area  $d\omega$  normale a  $Ox$ ; analogamente,  $v d\omega$  è la quantità di elettricità che attraversa l'area  $d\omega$  normale a  $Oy$ ;  $w d\omega$ , quella che attraversa  $d\omega$  normale a  $Oz$ .

Si ha:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Questa è l'equazione detta di continuità.

Il filo conduttore può essere assimilato a un cilindro di sezione  $d\omega$ . Essendo  $ds$  l'elemento di lunghezza, l'elemento di volume vale  $d\tau = d\omega ds$ .

La sezione per un piano perpendicolare a  $dx$  è  $\frac{d\tau}{dx}$ .

Pertanto,

$$i = u \frac{d\tau}{dx}$$

da cui

$$\begin{cases} u d\tau = i dx \\ v d\tau = i dy \\ w d\tau = i dz \end{cases}$$

e per l'elemento  $ds$

$$\begin{cases} u' d\tau' = i' dx' \\ v' d\tau' = i' dy' \\ w' d\tau' = i' dz' \end{cases}$$

Pertanto,

$$T = \int (Fu + Gv + Hw) d\tau$$

con

$$\begin{cases} F = \int \frac{u' d\tau''}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx} \\ G = \int \frac{v' d\tau''}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dy} \\ H = \int \frac{w' d\tau''}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (7)$$

Trasformiamo ora l'espressione (6); abbiamo

$$\psi = \int \left( u' \frac{dr}{dx'} + v' \frac{dr}{dy'} + w' \frac{dr}{dz'} \right) d\tau'$$

Se cerchiamo il potenziale elettrodinamico reciproco totale dobbiamo prendere l'elemento differenziale:

$$(Fu + Gv + Hw) d\tau$$

dove  $F, G, H$  sono integrali estesi a tutti gli elementi  $d\tau'$  di tutti i conduttori, eccetto  $d\tau$ . Operando in questo modo si conta due volte nell'integrale doppio il potenziale reciproco di una coppia di elementi  $d\tau$  e  $d\tau'$ . Si deve quindi dividere l'integrale così calcolato per 2 per avere  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau \quad (8)$$

Possiamo dire che l'integrale è esteso a tutto lo spazio, perché a parte i conduttori,  $u, v, w$  sono nulli.

Si potrà quindi applicare il teorema di Green, relativo all'integrazione per parti nell'intero spazio<sup>25</sup>; questo ci darà

$$\begin{aligned}\int d\tau' u' \frac{dr}{dx'} &= - \int d\tau' r \frac{du'}{dx'} \\ \int d\tau' v' \frac{dr}{dy'} &= - \int d\tau' r \frac{dv'}{dy'} \\ \int d\tau' w' \frac{dr}{dz'} &= - \int d\tau' r \frac{dw'}{dz'}\end{aligned}$$

$\psi$  assume allora la forma

$$\psi = - \int r d\tau' \left( \frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} \right) = \int r \frac{d\rho'}{dt} d\tau' \quad (9)$$

**265.** Consideriamo due quantità di elettricità  $e', e'$ ; si respingono con una forza di intensità  $\frac{1}{\lambda} \frac{ee'}{r^2}$ , essendo  $\lambda$  una costante. Se si adottano le idee universalmente accettate,  $\lambda$  è 1 nel sistema delle unità elettrostatiche ed è il quadrato della velocità della luce nel sistema elettromagnetico. Mantengo  $\lambda$  perché saremo portati a modificare un po' le idee ricevute.

Il potenziale elettrostatico è quindi dato da,

$$\lambda\varphi = \int \frac{\rho'}{r} d\tau'$$

da cui, differenziando

$$\lambda \frac{d\varphi}{dt} = \int \frac{1}{r} \frac{d\rho'}{dt} d\tau'$$

Ora:

$$\Delta\psi = \int \Delta r \frac{d\rho'}{dt} d\tau'$$

e poiché

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-x'}{r} \quad \frac{d^2r}{dx^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-x')^2}{r^3}$$

risulta che

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

Pertanto

$$\Delta\psi = \int \frac{2}{r} \frac{d\rho'}{dt} d\tau' = 2\lambda \frac{d\varphi}{dt} \quad (9 \text{ bis})$$

Applichiamo ora ad entrambi i membri delle equazioni (7) l'operatore  $\Delta$ ; si ha per i primi membri di queste equazioni, secondo il teorema di Poisson,

$$\begin{cases} \Delta = \int \frac{u' d\tau'}{r} = -4\pi u \\ \Delta = \int \frac{v' d\tau'}{r} = -4\pi v \\ \Delta = \int \frac{w' d\tau'}{r} = -4\pi w \end{cases}$$

Per quanto riguarda i secondi membri, abbiamo

$$\Delta \frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \Delta\psi$$

<sup>25</sup>Integriamo per parti rispetto a  $x$  tra i limiti  $\infty$  e  $-\infty$  e, poiché si assume  $u'$  uguale a zero all'infinito, il termine tutto conosciuto scompare..

e tenendo conto della (9 bis)

$$\begin{cases} \Delta = \frac{d\psi}{dx} = 2\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \Delta = \frac{d\psi}{dy} = 2\lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \Delta = \frac{d\psi}{dz} = 2\lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{cases}$$

Pertanto,

$$\begin{cases} \Delta F = -4\pi u + (1-k) \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \Delta G = -4\pi v + (1-k) \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \Delta H = -4\pi w + (1-k) \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{cases} \quad (10)$$

Calcoliamo ora

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = J$$

Abbiamo differenziando la prima equazione (7) rispetto a  $x$ ,

$$\frac{dF}{dx} = \int u' d\tau' \frac{d^1}{dx} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Ora,

$$\frac{d^1}{dx} = -\frac{d^1}{dx'}$$

Pertanto,

$$\int u' d\tau' \frac{d^1}{dx} = - \int u' d\tau' \frac{d^1}{dx'}$$

e, applicando il teorema di Green,

$$- \int u' d\tau' \frac{d^1}{dx'} = \int \frac{d\tau'}{r} \frac{du'}{dx'}$$

Effettuando trasformazioni analoghe su

$$\frac{dG}{dy} = \int v' d\tau' \frac{d^1}{dy} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2\psi}{dy^2}$$

e

$$\frac{dH}{dz} = \int w' d\tau' \frac{d^1}{dz} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2\psi}{dz^2}$$

si trova,

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} = \int \frac{d\tau'}{r} \frac{du'}{dx'} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2\psi}{dx^2} \\ \frac{dG}{dy} = \int \frac{d\tau'}{r} \frac{dv'}{dy'} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2\psi}{dy^2} \\ \frac{dH}{dz} = \int \frac{d\tau'}{r} \frac{dw'}{dz'} + \frac{1-k}{2} \frac{d^2\psi}{dz^2} \end{cases}$$

L'espressione che ci siamo proposti di calcolare si scrive quindi,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = \int \frac{d\tau'}{r} \left( \frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} \right) + \frac{1-k}{2} \Delta\psi$$

e tenendo conto dell'equazione di continuità,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = - \int \frac{d\tau'}{r} \frac{d\rho'}{dt} + \frac{1-k}{2} \Delta\psi$$

o ancora, dalla (9 bis)

$$= \lambda \frac{d\varphi}{dt} + (1-k) \lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Si ha quindi infine,

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Si vede che  $J$  sarà nullo in particolare se si pone  $k = 0$ .

## 266. Equazioni della legge di Ohm

La formula

$$Ri = E - \frac{d(Mi')}{dt}$$

si applica alle correnti chiuse. Se la si applica a una porzione di corrente dobbiamo tenere conto della differenza di potenziale agli estremi. Chiamiamo  $\varphi_1 - \varphi_2$  questa differenza potenziale; abbiamo quindi in questo caso,

$$Ri = \varphi_1 - \varphi_2 + E - \frac{d(Mi')}{dt}$$

Se su un elemento rettilineo parallelo a  $Ox$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2$  diviene,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{d\varphi}{dx} dx$$

Si può porre

$$E = X dx$$

e

$$R = \frac{dx}{Cd\omega}$$

essendo  $C$  la conducibilità specifica; da cui

$$Ri = \frac{idx}{Cd\omega} = \frac{udx}{C}$$

Per quanto riguarda la forza elettromotrice di induzione, si ha

$$T = iF dx = Mii'$$

da cui

$$\frac{d(Mi')}{dt} = dx \frac{dF}{dt}$$

Le equazioni della legge di Ohm si scrivono pertanto:

$$\begin{cases} \frac{u}{C} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X \\ \frac{v}{C} = -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dG}{dt} + Y \\ \frac{w}{C} = -\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dH}{dt} + Z \end{cases} \quad (12)$$

Si può dire che vi sono quattro forze elettromotrici che si equilibrano:

1° La forza elettrostatica  $\left(-\frac{d\varphi}{dx}, -\frac{d\varphi}{dy}, -\frac{d\varphi}{dz}\right)$

2° La forza d'induzione  $\left(-\frac{dF}{dx}, -\frac{dG}{dy}, -\frac{dH}{dz}\right)$

3° La forza elettromotrice esterna (di origine chimica, termoelettrica, ecc)  $(X, Y, Z)$

4° La forza elettromotrice resistente  $\left(-\frac{u}{C}, -\frac{v}{C}, -\frac{w}{C}\right)$

L'ipotesi su cui si basano le formule (12), ovvero l'estensione della legge di Ohm ai conduttori tridimensionali, sembra molto plausibile; ma è un'ipotesi, e Bertrand non ne ammette la legittimità. Vedremo che facendo un'ipotesi sulla generalità della legge di Joule nei conduttori tridimensionali che sembra necessaria (si veda la formula 18 bis), le formule (12) concordano con il principio di conservazione dell'energia. Inoltre, si potrebbero applicare ai conduttori tridimensionali le equazioni di Lagrange e della teoria dell'induzione di Maxwell (I parte, n. 151); se non presento questo calcolo in queste lezioni è perché qui abbiamo un'infinità di parametri e sarei costretto a ricorrere al calcolo delle variazioni.

Mi limiterò a dire che se si ammette la formula (18 bis), il calcolo porterebbe alle equazioni (12).

## 267. Definizione della forza magnetica

Nel caso in cui *tutte le correnti siano chiuse*, la forza magnetica può avere due definizioni equivalenti.

1° si può dire che la forza magnetica, con le componenti indicate con  $\alpha, \beta, \gamma$ , è la risultante di tutte le azioni elettromagnetiche applicate a un polo magnetico uguale a 1. È la definizione data al n. 147. Un polo magnetico può essere paragonato ad un solenoide indefinito. Infatti l'azione di una corrente chiusa su un solenoide chiuso è nulla; la sua azione su un solenoide limitato dipende quindi solo dalla posizione delle sue due estremità assimilabili a due poli magnetici uguali di segno contrario; la sua azione su un solenoide indefinito è quindi la stessa che su un unico polo magnetico situato all'estremità libera del solenoide (Cfr. prima parte, n° 124);

2° Consideriamo un elemento magnetico e siano  $Ad\tau, Bd\tau, Cd\tau$ , le componenti del suo momento magnetico. Le azioni subite da questo elemento possono ridursi a un'unica forza applicata al centro di gravità dell'elemento e le cui componenti sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d\alpha}{dx} A + \frac{d\alpha}{dy} B + \frac{d\alpha}{dz} C \right) d\tau \\ \left( \frac{d\beta}{dx} A + \frac{d\beta}{dy} B + \frac{d\beta}{dz} C \right) d\tau \\ \left( \frac{d\gamma}{dx} A + \frac{d\gamma}{dy} B + \frac{d\gamma}{dz} C \right) d\tau \end{array} \right.$$

e a una coppia il cui momento ha per componenti

$$\left\{ \begin{array}{l} (C\beta - B\gamma) d\tau \\ (A\gamma - C\alpha) d\tau \\ (B\alpha - A\beta) d\tau \end{array} \right.$$

In altre parole il momento di questa coppia è normale al piano dei due vettori che rappresentano il momento magnetico dell'elemento e la forza magnetica ed è uguale al prodotto di questi due vettori per il seno del loro angolo.

Se l'elemento cambia direzione senza che si sposti il suo centro di gravità e senza che vari il modulo del suo momento vero, il lavoro di questa coppia è uguale alla variazione del prodotto di questi stessi due vettori per il coseno del loro angolo, cioè c alla variazione della seguente espressione:

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma) d\tau$$

Immaginiamo ora un circuito chiuso infinitamente piccolo, percorso da una corrente di intensità  $i$ ; sia  $d\omega$  l'area di questo circuito;  $l, m, n$  i coseni direzionali del suo piano. Questo circuito sarà equivalente a un elemento magnetico il cui momento avrà le seguenti componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ad\tau = ild\omega \\ Bd\tau = imd\omega \\ Cd\tau = ind\omega \end{array} \right.$$

Le azioni subite da questo circuito si ridurranno quindi ad un'unica forza applicata al centro di gravità del circuito e ad una coppia il cui momento avrà le seguenti componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} ild\omega (n\beta - m\gamma) \\ ild\omega (l\gamma - n\alpha) \\ ild\omega (m\alpha - l\beta) \end{array} \right. \quad (12 \text{ bis})$$

Se il circuito cambia direzione senza che il suo centro di gravità si sposti, senza deformarsi e senza variare l'intensità  $i$ , il lavoro di questa coppia sarà la variazione dell'espressione

$$id\omega (l\alpha + m\beta + n\gamma) \quad (12 \text{ ter})$$

Da qui la seguente definizione della *forza magnetica*:

*È un vettore le cui componenti chiamerò  $\alpha, \beta, \gamma$  e che è tale che l'azione esercitata su un circuito infinitamente piccolo si riduce ad una forza applicata al centro di gravità del circuito e ad una coppia il cui momento ha come componenti le espressioni (12 bis) e il cui lavoro è uguale alla variazione dell'espressione (12 ter).*

Immaginiamo ora un sistema S contenente correnti *non chiuse*.

*La prima definizione di forza magnetica non ha più senso.*

È infatti impossibile realizzare un polo magnetico isolato utilizzando un solenoide indefinito. Ecco perché:

L'azione di una corrente *non chiusa* su un solenoide chiuso non è nulla; la sua azione a solenoide non chiuso dipende quindi non solo dalla posizione delle due estremità ma anche dalla forma del solenoide; e la sua azione su un solenoide indefinito non si riduce ad una sola forza applicata alla sua estremità libera.

Siamo quindi portati ad adottare la seconda definizione.

Cerchiamo l'espressione del potenziale elettrodinamico  $T$  di un qualunque circuito chiuso C rispetto al sistema S.

Supponiamo innanzitutto che il circuito C sia infinitamente piccolo, l'azione del sistema S su questo circuito si ridurrà ad una forza applicata al suo centro di gravità e ad una coppia. Se il circuito cambia direzione senza deformarsi, senza variare l'intensità e senza spostare il centro di gravità, il lavoro della forza sarà nullo; quello della coppia sarà *per definizione* uguale alla variazione dell'espressione (12 ter), cioè a:

$$id\omega (\alpha\delta l + \beta\delta m + \gamma\delta n)$$

Se quindi non cambiano l'intensità  $i$  della corrente, l'area  $d\omega$  del circuito, le coordinate  $x, y, z$  del suo centro di gravità; se di conseguenza variano solo i coseni direttori  $l, m, n$ , si avrà

$$\delta T = id\omega (\alpha\delta l + \beta\delta m + \gamma\delta n)$$

Se ne deduce:

$$T = id\omega (\alpha l + \beta m + \gamma n)$$

più una funzione arbitraria di  $id\omega$ , di  $x, y, z$ .

Questa funzione arbitraria che non contiene i coseni direttori  $l, m, n$  è ovviamente nulla; perché  $T$  deve cambiare segno quando la corrente cambia verso, o quando si ruota il circuito di  $180^\circ$  attorno ad un asse situato nel suo piano, o anche quando si cambiano  $l, m, n$  in  $-l, -m, -n$ .

Si ha quindi infine:

$$T = id\omega (\alpha l + \beta m + \gamma n)$$

Se il circuito è finito lo si scomporrà in un'infinità di circuiti infinitamente piccoli come si diceva al n° 107 della prima parte e si avrà:

$$T = \int id\omega (\alpha l + \beta m + \gamma n) \quad (13)$$

l'integrazione essendo estesa a tutti gli elementi  $d\omega$  di un'area A appartenenti ad una qualunque superficie passante per il circuito C e delimitata da questo circuito.

Quanto a  $l, m, n$ , questi sono i coseni direttori dell'elemento  $d\omega$  o della normale alla superficie a cui appartiene l'area A.

**268.** Si ha [equazione (1)]

$$T = i \int (Fdx + Gdy + Hdz)$$

Trasformiamo questa equazione con il teorema di Stokes; si ha

$$T = i \int d\omega \left[ l \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + m \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + n \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right]$$

Poiché si ha per definizione di  $\alpha, \beta, \gamma$

$$T = i \int (l\alpha + m\beta + n\gamma) d\omega \quad (13)$$

ne segue che

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (14)$$

Calcoliamo ora

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

Abbiamo, differenziando le terza equazione delle (14) rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $z$

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{d^2 G}{dx dy} - \frac{d^2 F}{dy^2}$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d^2 H}{dx dz}$$

e sommando l'identità

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{d^2 F}{dx^2} = 0$$

viene,

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) - \Delta F$$

Ora, sappiamo già che [equazioni (10) e (11)]

$$\begin{cases} \Delta F = -4\pi u + (1-k)\lambda \frac{d^2 \varphi}{dx dt} \\ \Delta G = -4\pi v + (1-k)\lambda \frac{d^2 \varphi}{dy dt} \\ \Delta H = -4\pi w + (1-k)\lambda \frac{d^2 \varphi}{dz dt} \end{cases}$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Pertanto,

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{dJ}{dx} - \Delta F = -k\lambda \frac{d^2 \varphi}{dx dt} + 4\pi u - (1-k)\lambda \frac{d^2 \varphi}{dx dt} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2 \varphi}{dx dt}$$

Un calcolo analogo al precedente ci darà  $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}$  e  $\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}$ .

Si ottiene così alla fine

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2 \varphi}{dx dt} \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v - \lambda \frac{d^2 \varphi}{dy dt} \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w - \lambda \frac{d^2 \varphi}{dz dt} \end{cases} \quad (15)$$

In Maxwell gli ultimi termini non esistono. Vedremo infatti che Maxwell suppone  $\lambda = 0$ .  
Le equazioni (15) si prestano alla seguente verifica:

Differenziando la prima delle equazioni (15) rispetto  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$  e sommando si ottiene

$$4\pi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) - \lambda \Delta \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Infatti, sappiamo che (n°. 165)

$$\lambda \varphi = \int \frac{\rho' d\tau'}{r}$$

da cui

$$\lambda \Delta \varphi = -4\pi \rho$$

e differenziando rispetto a  $t$ ,

$$\lambda \Delta \frac{d\varphi}{dt} = -4\pi \frac{d\rho}{dt}$$

da cui

$$4\pi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \frac{d\rho}{dt} \right) = 0$$

Ritroviamo così l'equazione di continuità.

## Conservazione dell'energia e stabilità dell'equilibrio

### 269. Espressione dell'energia elettrocinetica $T$ e dell'energia elettrostatica $U$ .

Presento di  $T$  una nuova espressione. Sostituiamo nell'equazione (8)

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau \quad (16)$$

$u, v, w$  con i loro valori ricavati dalle (15). Si ha allora

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \sum \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) F d\tau + \frac{1}{8\pi} \int \sum \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} F d\tau \quad (16 \text{ bis})$$

dove il simbolo  $\sum$  indica una permutazione circolare da effettuare sulle lettere  $\alpha, \beta, \gamma; x, y, z$  e  $F, G, H$ .

Integrando per parti *in tutto lo spazio* si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{d\gamma}{dy} F d\tau &= - \int \frac{dF}{dy} \gamma d\tau \\ - \int \frac{d\beta}{dz} F d\tau &= \int \frac{dF}{dz} \beta d\tau \\ \int \frac{d\alpha}{dz} G d\tau &= - \int \frac{dG}{dz} \alpha d\tau \\ - \int \frac{d\gamma}{dx} G d\tau &= \int \frac{dG}{dx} \gamma d\tau \\ \int \frac{d\beta}{dx} H d\tau &= - \int \frac{dH}{dx} \beta d\tau \\ - \int \frac{d\alpha}{dy} H d\tau &= \int \frac{dH}{dy} \alpha d\tau \end{aligned}$$

Il primo integrale della (16 bis) vale quindi

$$\frac{1}{8\pi} \int \left[ \alpha \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) + \beta \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) + \gamma \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \right] d\tau = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

dalla (14).

Anche il secondo integrale della (16 bis) si trasforma e si ottiene

$$\begin{aligned} \int F \frac{d^2\varphi}{dxdt} d\tau &= - \int \frac{dF}{dx} \frac{d\varphi}{dt} d\tau \\ \int G \frac{d^2\varphi}{dydt} d\tau &= - \int \frac{dG}{dy} \frac{d\varphi}{dt} d\tau \\ \int H \frac{d^2\varphi}{dzdt} d\tau &= - \int \frac{dH}{dz} \frac{d\varphi}{dt} d\tau \end{aligned}$$

per cui, infine

$$\frac{\lambda}{8\pi} \int \sum \frac{d^2\varphi}{dxdt} d\tau = - \frac{\lambda}{8\pi} \int \frac{d\varphi}{dt} \left( \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right)$$

e, tenendo conto della (11),

$$= \frac{k\lambda^2}{8\pi} \int \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 d\tau$$

L'espressione (16 bis) diviene allora

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau + \frac{k\lambda^2}{8\pi} \int \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 d\tau$$

Se  $k$  è positivo o nullo, tutti gli elementi dell'integrale sono positivi, e se  $T$  è nullo, tutti i suoi elementi sono nulli; al contrario, se  $k$  è negativo, si può affermare al momento che  $T$  è nullo, tutti gli elementi sono nulli e non c'è corrente.

$T$ , energia elettrocinetica, è solo un termine dell'energia. L'altro termine è l'energia elettrostatica

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi d\tau$$

Ora:

$$\lambda\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Pertanto

$$U = -\frac{\lambda}{8\pi} \int \Delta\varphi\varphi d\tau$$

Dal teorema di Green,

$$\int \Delta\varphi\varphi d\tau = - \int \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau$$

L'espressione  $U$  si scrive allora

$$U = \frac{\lambda}{8\pi} \int \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau \quad (17)$$

$U$  è quindi essenzialmente positivo.

L'energia totale  $T + U$  è positiva se  $k \geq 0$ . Se  $k < 0$ ,  $T + U$  può avere un segno qualsiasi.

Supponiamo che  $F, G, H$  siano tali da avere

$$F = \frac{d\chi}{dx} \quad G = \frac{d\chi}{dy} \quad H = \frac{d\chi}{dz}$$

essendo  $\chi$  una qualunque funzione di  $x, y, z$ ; i tre binomi (14) sono allora nulli e il primo termine delle (16 ter) scompare. Il secondo non scompare.

Supponiamo ora che  $\varphi = 0$  all'origine del tempo;  $T + U$  sarà negativo; siccome  $\varphi = 0$  all'origine del tempo, all'inizio non vi è elettricità libera, ma compare successivamente, poiché  $\frac{d\varphi}{dt}$  non è nullo.

## 270. Conservazione dell'energia

Verifichiamo che l'energia si conserva, cioè che la variazione  $T + U$  è uguale al lavoro compiuto dalle forze elettromotrici esterne (chimiche, termoelettriche, ecc.), diminuito del calore ceduto nelle resistenze per effetto di Joule legge

$$d(T + U) = -dt \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau + dt \int (Xu + Yv + Zw) d\tau \quad (18)$$

Facciamo riferimento alle equazioni (12) e moltiplichiamo la prima per  $-ud\tau$ , la seconda per  $-vd\tau$ , la terza per  $-wd\tau$ , poi integriamo in tutto lo spazio e sommiamo; viene,

$$- \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau + \int (Xu + Yv + Zw) d\tau = \int \left( u \frac{d\varphi}{dx} + v \frac{d\varphi}{dy} + w \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau + \int \left( u \frac{dF}{dx} + v \frac{dG}{dy} + w \frac{dH}{dz} \right) d\tau \quad (18')$$

Dimostriamo che il primo integrale del secondo membro è  $\frac{dT}{dt}$ , e il secondo  $\frac{dU}{dt}$ .

Quanto all'integrale  $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau$  è il calore di Joule. Mostriamolo. Una linea di corrente è una linea che soddisfa alle equazioni differenziali  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ , cioè che ha come tangente in ogni punto la velocità dell'elettricità.

Un conduttore tridimensionale può essere considerato come formato da un'infinità di conduttori lineari elementari aventi la forma di cilindri infinitamente piccoli, di altezza  $ds$ , di sezione  $d\omega$ , di volume  $d\tau = dsd\omega$  e la cui altezza è diretta lungo le linee di corrente.

*Ammettiamo che la legge di Joule si applichi a questi conduttori lineari elementari.*

Se ne consideriamo uno, il calore liberato dal passaggio di corrente è  $Ri^2dt$ ; ora

$$R = \frac{ds}{Cd\omega}$$

e

$$i^2 = (u^2 + v^2 + w^2) d\omega^2$$

per cui

$$Ri^2dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} dsd\omega dt = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau dt \quad (18 \text{ bis})$$

come volevasi dimostrare.

**271.** Mi propongo ora di dimostrare che il primo integrale del secondo membro (della 18') è uguale a  $\frac{dU}{dt}$ . Abbiamo visto che

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi d\tau$$

Dico che

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} \varphi d\tau$$

Poiché

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{dt} \rho d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \frac{d\rho}{dt} d\tau$$

e

$$\int \frac{d\varphi}{dt} \rho d\tau = \int \varphi \frac{d\rho}{dt} d\tau$$

Infatti

$$\varphi = \int \frac{\rho' d\tau'}{\lambda r}$$

Ne deduciamo

$$\iiint \frac{d\rho}{dt} \rho' \frac{d\tau d\tau'}{\lambda r} = \iiint \rho \frac{d\rho'}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{\lambda r}$$

perché il primo integrale non cambia, se si permuta  $\rho$  con  $\rho'$  contemporaneamente a  $d\tau$  e  $d\tau'$ , poiché le due integrazioni rispetto a  $d\tau$  e  $d\tau'$  si estendono a tutto lo spazio.

Pertanto

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} \varphi d\tau$$

come volevasi dimostrare.

D'altra parte

$$\frac{d\rho}{dt} = - \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)$$

di conseguenza

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} \varphi d\tau = - \int \varphi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau$$

e integrando per parti in tutto lo spazio si ha infine

$$\frac{dU}{dt} = \int \left( u \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau$$

che è quanto si voleva dimostrare.

**272.** Passiamo ora all'integrale

$$\int \left( u \frac{dF}{dx} + v \frac{dG}{dy} + w \frac{dH}{dz} \right) d\tau$$

Abbiamo visto che

$$T = \frac{1}{2} \int (Fu + Gv + Hw) d\tau$$

da cui

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \int \sum F \frac{du}{dt} d\tau + \int \sum u \frac{dF}{dt} d\tau$$

avendo il simbolo  $\sum$  lo stesso significato precedente. Dico che questi due integrali sono uguali. Per dimostrarlo, poniamo

$$F = F' + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dt}$$

con

$$F' = \int \frac{u' d\tau'}{r}$$

L'identità da dimostrare diviene allora

$$\int \sum F \frac{du}{dt} d\tau + \frac{1-k}{2} \int \sum \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} d\tau = \int \sum \frac{dF'}{dt} u d\tau + \frac{1-k}{2} \int \sum u \frac{d^2\psi}{dt^2} d\tau$$

Ora, si ha

$$\int \sum F' \frac{du}{dt} d\tau = \int u \frac{dF'}{dt} d\tau$$

poiché

$$\iint u' \frac{du}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{r} = \iint u \frac{du'}{dt} \frac{d\tau d\tau'}{r}$$

dove le integrazioni rispetto a  $d\tau$  e  $d\tau'$  si estendono all'intero spazio.

Per quanto riguarda gli integrali

$$\int \sum \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} d\tau \quad e \quad \int \sum u \frac{d^2\psi}{dt^2} d\tau$$

dico che

$$\int \sum \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} d\tau = \int \sum u \frac{d^2\psi}{dt^2} d\tau$$

Infatti, integrando per parti in tutto lo spazio, si ha per il primo integrale

$$\int \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} d\tau = - \int \psi \frac{d^2u}{dt^2} d\tau$$

e per il secondo

$$\int \frac{d^2u}{dt^2} \psi d\tau = \int \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} d\tau$$

Ora si ha

$$\sum \frac{du}{dx} = - \frac{d\rho}{dt} \quad \sum \frac{d^2u}{dxdt} = - \frac{d^2\rho}{dt^2}$$

d'altra parte

$$\psi = \int \frac{d\rho'}{dt} r d\tau'$$

e, per un artificio di calcolo analogo a quello utilizzato per la dimostrazione dell'uguaglianza (18 ter), si ottiene l'uguaglianza

$$\iint \frac{d\rho'}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} r d\tau d\tau' = \iint \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho'}{dt^2} r d\tau d\tau'$$

per cui

$$\int \sum \psi \frac{d^2u}{dxdt} = \int \sum \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} d\tau$$

come volevasi dimostrare.

Sostituendo i due integrali del secondo membro della (18') con i valori così trovati, si ha:

$$\frac{d(T + U)}{dt} = - \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau + \int (Xu + Yv + Zw) d\tau$$

Se si moltiplicasse questa equazione per  $dt$ , il primo membro rappresenterebbe l'aumento dell'energia sia elettrodinamica che elettrostatica, il secondo integrale del secondo membro rappresenterebbe il lavoro delle forze elettromotrici esterne (chimiche, termoelettriche, ecc.); il primo integrale del secondo membro rappresenterebbe l'energia persa sotto forma di calore Joule.

Questa equazione esprime quindi chiaramente che esiste conservazione dell'energia.

### 273. Stabilità dell'equilibrio

Nel caso in cui non vi è alcuna forza elettromotrice al sistema

$$\frac{d(T + U)}{dt} = - \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{C} d\tau$$

la derivata di  $T + U$  rispetto al tempo è quindi essenzialmente negativa in questo caso.

Se la costante  $k$  di Helmholtz è  $\geq 0$ , l'equilibrio è stabile.  $T + U$  infatti è essenzialmente positivo e si annulla solo se nello spazio non ci sono né elettricità né correnti libere; se  $T + U$  è molto piccola è perché le correnti e la densità dell'elettricità libera sono ovunque molto piccole. Partiamo dall'equilibrio:  $T + U = 0$ , e facciamo subire una piccola perturbazione,  $T + U$  assumerà un valore positivo molto piccolo; ma se lasciamo il sistema a se stesso,  $T + U$  diminuirà, pur rimanendo positivo;  $T + U$  rimarrà quindi molto piccolo, cosa che può accadere solo se le correnti stesse rimangono molto piccole. Quindi c'è stabilità.

Al contrario, se  $k$  è negativo, possiamo ancora partire dall'equilibrio assoluto e sottoporre il sistema ad una perturbazione molto piccola; ma possiamo sempre assumere questa perturbazione in modo tale che il piccolissimo valore iniziale che assume  $T + U$  sia negativo. Da lì in poi,  $T + U$  diminuirà; il suo valore assoluto aumenterà e ci allontaneremo sempre di più dall'equilibrio iniziale. L'equilibrio è instabile.

Dobbiamo quindi respingere ogni teoria che dia ad  $h$  un valore negativo, in particolare la teoria di Weber, che si deduce da quella di Helmholtz, ponendo  $k = -1$ .

### Studio dei mezzi magnetici

**274.** Cosa succede alle equazioni (14) e (15) nei mezzi magnetici?

Definiamo innanzitutto la forza e l'induzione magnetica in un punto.

La forza magnetica sarà la somma geometrica di due vettori:

1° La forza elettromagnetica, dovuta a correnti chiuse o meno, e definita come al n. 28, come sarebbe nel punto considerato se il mezzo non fosse magnetico: questa forza potrà non derivare da un potenziale, ciò avverrà se nel punto considerato la corrente elettrica non è nulla.

2° La forza magnetica dovuta ai magneti permanenti o non permanenti; essa può essere ridotta all'azione esercitata dalla magnetizzazione indotta dalle correnti nella massa magnetica all'interno della quale è preso il punto considerato. Questa forza deriva sempre da un potenziale, il potenziale magnetico:

$$\Omega = - \int \left( \frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'} \right) \frac{1}{r} d\tau'$$

Pertanto

$$\alpha = \int \left( \frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'} \right) \frac{d^1}{dx} d\tau'$$

Per quanto riguarda l'induzione magnetica, è la somma geometrica della forza magnetica e della magnetizzazione nel punto considerato, moltiplicata per  $4\pi$ .

**275.** Dico che in un mezzo magnetico le equazioni (14) devono essere sostituite dalle equazioni:

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (19)$$

e le equazioni (15) rimangono ancora vere.

**276.** Consideriamo infatti un magnete; supponiamo che non ci sia corrente esterna. Il magnete può considerarsi costituito da un sistema di correnti di particolari secondo le idee di Ampère.

La componente  $F$  del potenziale vettore dovuta ad una di queste correnti è:

$$F = i' \int \frac{dx'}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{d\psi}{dx}$$

Essendo tutte le correnti di particelle chiuse, la derivata  $\frac{d\psi}{dx}$  scompare, e rimane

$$F = i' \int \frac{dx'}{r}$$

Trasformando questo integrale di linea in un integrale di superficie si ha

$$F = i' \int \left( m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) d\omega'$$

essendo  $d\omega'$  l'elemento dell'area concatenata alla corrente; quest'area è infinitamente piccola; pertanto l'integrale si riduce al solo elemento

$$i' d\omega' \left( m' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - n' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right)$$

La corrente è equivalente a un elemento magnetico, il cui momento ha per componenti  $A'd\tau', B'd\tau', C'd\tau'$ ,

$$\begin{cases} A'd\tau' = i'l'd\omega' \\ B'd\tau' = i'm'd\omega' \\ C'd\tau' = i'n'd\omega' \end{cases}$$

quindi la componente  $F$  del potenziale vettore dovuta a questo elemento è

$$\left( B' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - C' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) d\tau'$$

Per avere la componente dovuta all'intero magnete è necessario integrare rispetto agli elementi  $d\tau'$  del volume del magnete, oppure, il che è la stessa cosa, integrare in tutto lo spazio, perché, all'esterno,  $A' = B' = C' = 0$ . Quindi viene

$$F = \int \left( B' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - C' \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) d\tau'$$

Ecco il punto delicato del calcolo:  $r$  è la distanza di due elementi  $d\tau$  e  $d\tau'$  e l'elemento  $d\tau$  è all'interno della massa; pertanto  $r$  può essere infinitamente piccolo;  $\frac{1}{r}$  è allora infinitamente grande; se è infinitamente grande del primo ordine,  $\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$  lo è del secondo, e  $\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx'^2}$  del terzo; e così di seguito.

Devo prendere gli integrali tripli; se ho sotto il simbolo  $\int$  termini in  $\frac{1}{r}$ , l'integrale è finito e determinato, lo stesso per i termini in  $\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}$ , ma non è più così se abbiamo derivate seconde. Se non prestassimo attenzione a questa osservazione, dimostreremmo facilmente che  $\Delta V$  è nullo anche all'interno del corpo attrattivo, il che è falso.

Devo quindi riuscire a non introdurre, come nel n°147 e nel n° 148, le derivate seconde di  $\frac{1}{r}$  rispetto alle coordinate.

Integrando per parti *in tutto lo spazio*, si ha,

$$\int B' \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} = - \int \frac{1}{r} \frac{dB'}{dz'} d\tau'$$

L'espressione di  $F$  che vogliamo trasformare diviene pertanto,

$$\begin{cases} F = \int \left( \frac{dC'}{dy'} - \frac{dB'}{dz'} \right) \frac{1}{r} d\tau' \\ G = \left( \frac{dA'}{dz'} - \frac{dC'}{dx'} \right) \frac{1}{r} d\tau' \\ H = \left( \frac{dB'}{dx'} - \frac{dA'}{dy'} \right) \frac{1}{r} d\tau' \end{cases} \quad (20)$$

Calcoliamo ora l'espressione che ci interessa

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

Si ha differenziando la terza relazione delle (20) rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $z$  :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dy} = \int \frac{dB'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} d\tau' - \int \frac{dA'}{dy'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} d\tau' \\ -\frac{dG}{dz} = \int \frac{dC'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} d\tau' - \int \frac{dA'}{dz'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} d\tau' \\ \text{Consideriamo ancora l'identità} \\ 0 = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} d\tau' - \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} d\tau' \end{cases} \quad (21)$$

Trasformiamo questi integrali; sappiamo che,

$$\frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} = -\frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy'}$$

perché  $r$  è una funzione di  $x - x'$ ,  $y - y'$ ,  $z - z'$ . Si ha quindi tenendo conto di questa identità e integrando per parti in tutto lo spazio rispetto a  $y$ :

$$\int \frac{dB'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} d\tau' = - \int \frac{dB'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy'} d\tau' = \int \frac{d^2 B'}{dx' dy' r} d\tau'$$

e, integrando di nuovo per parti rispetto a  $x'$

$$\int \frac{d^2 B'}{dx' dy' r} d\tau' = - \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx'} d\tau' = \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} d\tau'$$

Pertanto

$$\int \frac{dB'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy} d\tau' = \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} d\tau'$$

e analogamente

$$\int \frac{dC'}{dx'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz} d\tau' = \int \frac{dC'}{dz'} \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} d\tau'$$

D'altra parte, se si pone

$$V = \int \frac{A' d\tau'}{r}$$

abbiamo

$$\frac{dV}{dx} = \int A' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx} d\tau' = - \int A' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx'} d\tau'$$

e, integrando per parti nell'intero spazio, viene

$$\frac{dV}{dx} = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{1}{r} d\tau'$$

da cui, differenziando rispetto a  $x$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d_r^1}{dx} d\tau'$$

e con un calcolo analogo

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \int \frac{dA'}{dy'} \frac{d_r^1}{dy} d\tau'$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \int \frac{dA'}{dz'} \frac{d_r^1}{dz} d\tau'$$

Le equazioni (21) si scrivono allora,

$$\begin{cases} \frac{dH}{dy} = \int \frac{dB'}{dy'} \frac{d_r^1}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dy^2} \\ -\frac{dG}{dz} = \int \frac{dC'}{dz'} \frac{d_r^1}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dz^2} \\ 0 = \int \frac{dA'}{dx'} \frac{d_r^1}{dx} d\tau' - \frac{d^2V}{dx^2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro queste equazioni si ottiene,

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \int \left( \frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'} \right) \frac{d_r^1}{dx} d\tau' - \Delta V$$

d'altra parte la relazione di Poisson ci dà,

$$\Delta V = -4\pi A$$

Viene quindi

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha + 4\pi A$$

e, tenendo conto delle relazioni (12) del n° 8, si ha infine

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = a$$

e con un calcolo analogo al precedente

$$\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = b$$

$$\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = c$$

Come volevasi dimostrare.

**277.** Prendiamo ora un mezzo magnetico percorso da correnti finite;  $u, v, w$  sono le componenti della corrente;  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  sono le componenti della forza elettromagnetica di due correnti finite,  $F_1, G_1, H_1$  le componenti del loro potenziale vettore. Analogamente,  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  saranno le componenti della forza magnetica di due correnti di particelle;  $a_2, b_2, c_2$  le componenti dell'induzione che loro è dovuta, e  $F_2, G_2, H_2$  le componenti del loro potenziale vettore. Si ha per le componenti della forza magnetica totale, dell'induzione totale e del potenziale vettore totale:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta = \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \\ c = c_1 + c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ G = G_1 + G_2 \\ H = H_1 + H_2 \end{cases}$$

Ora, dalla n° 268, si ha, per le correnti finite,

$$\begin{cases} a_1 = \frac{dH_1}{dy} - \frac{dG_1}{dz} \\ b_1 = \frac{dF_1}{dz} - \frac{dH_1}{dx} \\ c_1 = \frac{dG_1}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \frac{d\alpha_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dx} = 4\pi v - \lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dy} = 4\pi w - \lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{cases}$$

Per le correnti di particelle, dalla n° 275, si ha

$$\begin{cases} a_2 = \frac{dH_2}{dy} - \frac{dG_2}{dz} \\ b_2 = \frac{dF_2}{dz} - \frac{dH_2}{dx} \\ c_2 = \frac{dG_2}{dx} - \frac{dF_2}{dy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_2}{dy} - \frac{d\beta_2}{dz} = 0 \\ \frac{d\alpha_2}{dz} - \frac{d\gamma_2}{dx} = 0 \\ \frac{d\beta_2}{dx} - \frac{d\alpha_2}{dy} = 0 \end{cases}$$

Sommando queste quattro serie di equazioni membro a membro viene,

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u - \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v - \lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w - \lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{cases}$$

ciò che era da dimostrare.

# Cap. V - Passaggio dalla teoria di Helmholtz a quella di Maxwell

**278.** Per capire come si possa passare dalla teoria di Helmholtz a quella di Maxwell, che è solo un caso particolare o più precisamente un caso limite, dobbiamo conoscere le varie ipotesi fatte sul magnetismo indotto e sulla polarizzazione dielettrica. Questo capitolo è strettamente legato al capitolo III della prima parte dove ho presentato idee simili a quelle di Helmholtz in forma diversa.

Prima di affrontare la questione della polarizzazione dielettrica ricordiamo le teorie del magnetismo indotto. Inizieremo con quella di Poisson, la più importante dal punto di vista di quanto segue. Ma poiché i calcoli sono stati presentati dettagliatamente nella prima parte di questo volume (dal n. 52 al 59), ci limiteremo a richiamare brevemente i risultati. Devo avvertire però che la teoria esposta nei numeri citati, da 52 a 59, relativa più particolarmente ai dielettrici, è necessario, per dedurre la teoria del magnetismo che non differisce da essa dal punto di vista matematico, cambiare alcune notazioni.

È così che ciò che ho chiamato  $-\frac{dU}{d\xi}$  in questi paragrafi qui si chiamerà qui  $\alpha$  e  $\varepsilon$ . Infatti  $U$  rappresentava il potenziale elettrico; qui deve essere sostituito dal potenziale magnetico le cui derivate cambiate segno non sono altro che le componenti della forza magnetica. Allo stesso modo ciò che chiamiamo  $K$  si chiamerà qui  $\mu$ .

## 279. Induzione magnetica

Poisson attribuisce i fenomeni magnetici a due fluidi, australe e boreale. Un corpo magnetico è costituito da piccole sfere conduttrici di magnetismo, distribuite irregolarmente in uno spazio intermedio isolante. Ciascuna sfera può essere vista come la sovrapposizione di una sfera solida di fluido australe e di una di fluido boreale: l'effetto della magnetizzazione è di far scorrere una di queste sfere rispetto all'altra di una quantità più o meno grande; si hanno così *strati di scorrimento*<sup>26</sup>.

Poisson ammette che le azioni reciproche di tutte le altre sfere su una di esse si neutralizzano, Se  $m$  è la massa di ciascuna delle sfere, australe e boreale, e se  $\xi, \eta, \zeta$  sono le componenti dello spostamento del centro della sfera che scorre, si ha

$$m\xi = Ad\tau \quad m\eta = Bd\tau \quad m\zeta = Cd\tau$$

essendo  $Ad\tau, Bd\tau, Cd\tau$  le componenti del momento magnetico di questo elemento sferico.

Per poter definire la forza magnetica in un punto interno, bisogna supporre una cavità scavata attorno al punto, e la forza dipende dalla forma di tale cavità, contrariamente a quanto credeva Poisson. Essa ha per componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  all'interno di un cilindro infinitamente lungo rispetto alla sua base e il cui asse è diretto lungo la magnetizzazione; le componenti sono  $\alpha + 4\pi A, \beta + 4\pi B, \gamma + 4\pi C$  all'interno di un cilindro infinitamente piatto, pure parallelo alla magnetizzazione; infine, esse sono

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A \quad \beta + \frac{4}{3}\pi B \quad \gamma + \frac{4}{3}\pi C$$

all'interno di una sfera.

<sup>26</sup>Vedere per questa teoria degli strati di scorrimento, la prima parte, cap. III.

Descriviamo attorno al punto  $O$  una sfera  $\sigma$  di volume  $d\tau$ , piccolissima in modo assoluto, ma grande rispetto agli elementi sferici; scriviamo che c'è equilibrio all'interno di uno di questi elementi,  $s$ . L'azione dei corpi esterni alla sfera  $\sigma$  ha per componente parallela a  $Ox$ ,  $\alpha + \frac{4}{3}\pi A$ .  $A, B, C$  sono le componenti della magnetizzazione. Se  $\varepsilon$  è il rapporto tra il volume delle piccole sfere  $s$  e il volume  $d\tau$ , la magnetizzazione di ognuno di questi elementi  $s$  ha per componenti  $\frac{A}{\varepsilon}, \frac{B}{\varepsilon}, \frac{C}{\varepsilon}$ . L'azione su un punto interno a  $\sigma$  degli elementi sferici esterni a  $s$ , ma interni a  $\sigma$ , è assunta nulla (Cfr. prima parte, n. 55). L'azione dell'elemento stesso ha una componente parallela a  $Ox$ ,  $-\frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon}$ .

L'equazione dell'equilibrio si scrive

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A - \frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon} = 0 \quad (1)$$

da cui

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi A \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

e

$$4\pi A = \frac{3\varepsilon A}{1 - \varepsilon}$$

pertanto

$$a = \alpha + 4\pi A = \frac{1 + 2\varepsilon}{1 - \varepsilon}\alpha$$

e ponendo

$$\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \mu$$

si ha alla fine

$$a = \mu\alpha$$

$\frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon} = \mu$  è detto *permeabilità magnetica*.

Insisto sul significato dell'equazione (i).

Una molecola magnetica situata all'interno della sfera  $s$  che è conduttrice di magnetismo deve essere in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze che agiscono su di essa. Se consideriamo solo le componenti parallele all'asse  $x$ , la somma di queste componenti deve essere zero. Si ha quindi:

(Azione dei magneti esterni e degli elementi magnetici esterni a  $\sigma = \alpha + \frac{4}{3}\pi A$ ) + (azione degli elementi magnetici interni a  $\sigma$  e altri di  $s = 0$ ) + (azione di  $s = -\frac{4}{3}\pi\frac{A}{\varepsilon}$ ) = 0.

La teoria presenta difficoltà:  $\varepsilon$  deve essere  $< \frac{\pi}{6}$ , il che impone un limite superiore a  $\mu$  che viene superato per il ferro. È vero che si può dire che nulla obbliga a considerare gli elementi sferici; si può, come ha fatto Mathieu, prendere elementi di altre forme e sfuggire a questa difficoltà.

Un'altra difficoltà è che  $\mu$  non è una costante ma varia con la forza  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ .

Weber assume elementi già polarizzati, ma orientati in modo qualsiasi: la forza magnetica li riporta verso una direzione comune, avvicinandosi alle idee di Ampère.

Per quanto riguarda il diamagnetismo, notiamo che per renderne conto nelle idee di Poisson, dobbiamo ammettere che il vuoto è suscettibile di polarizzazione magnetica e che i corpi diamagnetici sono solo meno magnetici del vuoto. Allora il  $\mu$  nel vuoto non è più 1: noi avevamo definito l'unità di magnetismo ammettendo che due poli uguali a 1 si attraessero con una forza 1 all'unità di distanza; se  $\mu = 1$  per il vuoto, l'attrazione osservata nel vuoto è infatti l'attrazione effettiva. Non è più così se  $\mu > 1$ .

## 280. Polarizzazione dielettrica

Mossotti è riuscito a rendere conto dei fenomeni presentati dai dielettrici nelle idee di Coulomb, trasportando all'elettricità le teorie di Poisson, e queste teorie, che non sono altro che l'archeologia nel magnetismo, possono ancora essere utilizzate nello studio dei dielettrici, senza però probabilmente corrispondere ad alcun realtà oggettiva.

I dielettrici sarebbero composti da sfere conduttrici immerse in un mezzo isolante. Ciò che gioca il ruolo della magnetizzazione è la *polarizzazione dielettrica*, che Maxwell chiama *spostamento elettrico*:  $f, g, h$ .

Si ha quindi in questo caso

$$\begin{cases} m\xi = f d\tau \\ m\eta = g d\tau \\ m\zeta = h d\tau \end{cases}$$

Un dielettrico così costituito è del tutto paragonabile ad un magnete; voglio dire che il fluido elettrico vi è distribuito assolutamente allo stesso modo del fluido magnetico in un magnete costituito come suppone Poisson.

Il potenziale magnetico di una massa magnetica  $m$  rispetto a un punto esterno è  $\frac{m}{r}$ . Il potenziale elettrico di una massa elettrica  $m$  è lo stesso, secondo le notazioni che abbiamo adottato  $\frac{m}{\lambda r}$ .

Il potenziale di una delle sfere di Poisson rispetto ad un punto esterno è, chiamando  $Ad\tau, Bd\tau, Cd\tau$  le componenti del momento magnetico di questa sfera:

$$d\tau \left( A \frac{1}{dx'} + B \frac{1}{dy'} + C \frac{1}{dz'} \right)$$

Analogamente il potenziale di una delle sfere di Mossotti rispetto a un punto esterno sarà:

$$\frac{d\tau}{\lambda} \left( f \frac{1}{dx'} + g \frac{1}{dy'} + h \frac{1}{dz'} \right)$$

Così anche il potenziale di un magnete è rappresentato dall'integrale

$$\Omega = \int d\tau \left( A' \frac{1}{dx'} + B' \frac{1}{dy'} + C' \frac{1}{dz'} \right)$$

quello di un dielettrico sarà rappresentato dall'integrale:

$$\varphi = \int \frac{d\tau'}{\lambda} \left( f' \frac{1}{dx'} + g' \frac{1}{dy'} + h' \frac{1}{dz'} \right)$$

La forza magnetica (parallela all'asse  $x$ ) dovuto a un magnete è in un punto esterno  $\alpha = -\frac{d\omega}{dx}$ ; la forza elettrostatica dovuta a un dielettrico sarà ancora  $-\frac{d\varphi}{dx}$ .

Se si vuole calcolare questa forza in un punto interno, si ritrova l'analogia con i magneti. Per definirlo è necessario assumere una piccola cavità scavata nel dielettrico attorno al punto considerato; si vede allora che la componente parallela all'asse  $x$  è uguale a:

- $-\frac{d\varphi}{dx}$  se la cavità è un cilindro molto allungato;
- $-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{\lambda}$  se è un cilindro molto appiattito;
- $-\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{3\lambda}$  se è sferico.

Scriviamo come prima le equazioni dell'equilibrio; poiché basta aggiungere qui solo le forze elettromotrici d'induzione, e d'altra parte le forze elettromotrici di qualsiasi origine, chimica per esempio o termoelettrica, e delle quali chiamo le componenti  $X, Y, Z$ .

$\alpha$  deve essere qui sostituita da  $-\frac{d\varphi}{dx}$ , essendo  $\varphi$  il potenziale elettrostatico.

Una molecola elettrica situata all'interno di una delle sfere di Mossotti deve essere in equilibrio; se consideriamo quindi le forze elettromotrici di diversa origine alle quali è sottoposta questa molecola e le componenti di tali forze lungo l'asse  $x$ , la somma di tali componenti deve essere nulla, il che ci dà un'equazione del tutto analoga alla (1); supporremo come sopra che sia stata scavata una cavità nel dielettrico limitata da una sfera  $\sigma$  concentrica a  $s$ ; si avrà

(azione dei conduttori esterni e della porzione di dielettrico esterno a  $\sigma = -\frac{d\varphi}{dx} + \frac{4\pi f}{3\lambda}$ ) + (azione delle sfere di Mossotti interne a  $\sigma$  e diverse da  $s = 0$ ) + (azione di  $s = -\frac{4\pi f}{3\lambda\varepsilon}$ ) + (forze di induzione  $= -\frac{dF}{dt}$ ) + (forze elettromotrici esterne, di origine diversa  $= X$ ) = 0, cioè:

$$-\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X + \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda} - \frac{4}{3}\pi\frac{f}{\varepsilon\lambda} = 0$$

da cui

$$\frac{4}{3}\pi\frac{f}{\lambda}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X$$

e ponendo,

$$K = \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{1-\varepsilon}$$

si ha:

$$\frac{4\pi f}{K-\lambda} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} + X \quad (2)$$

$K$  è il *potere induttore specifico* del mezzo.

Proponiamo ora di valutare la corrente di spostamento che si produce in un dielettrico al variare del suo stato di polarizzazione. Abbiamo definito prima le componenti  $u, v, w$  della corrente. Questa definizione può anche essere espressa come segue:

$ud\tau$  è la proiezione sull'asse  $x$  della quantità di moto di tutte le molecole elettriche contenute nell'elemento di volume  $d\tau$ .

Consideriamo un elemento  $d\tau$  contenente una sfera di Mossotti. Quando questa sfera è polarizzata possiamo vederla come formata da due sfere, una di fluido positivo, l'altra di fluido negativo, le cui masse elettriche sono uguali e di segno opposto, che hanno lo stesso volume ed i cui centri non coincidono (vedi prima parte, n. 47). Siano  $+m$  e  $-m$  le masse di due sfere; siano  $x_1, y_1, z_1$  le coordinate del centro della sfera positiva;  $x_2 = x_1 - \xi, y_2 = y_1 - \eta, z_2 = z_1 - \zeta$  quelle del centro della sfera negativa.

Allora  $\xi, \eta, \zeta$  hanno lo stesso significato dell'inizio del paragrafo.

Si ha per la componente parallela a  $Ox$  della corrente dovuta allo spostamento relativo di due sfere

$$ud\tau = m\frac{dx_1}{dt} - m\frac{dx_2}{dt} = m\frac{d\xi}{dt}$$

ora,

$$\begin{cases} m\xi = fd\tau \\ m\eta = gd\tau \\ m\zeta = hd\tau \end{cases}$$

pertanto

$$u = \frac{df}{dt} \quad v = \frac{dg}{dt} \quad w = \frac{dh}{dt}$$

**281.** Il potenziale elettrostatico  $\varphi$  è dovuto all'elettricità distribuita nei conduttori e a quella che polarizza i dielettrici: questi si comportano come magneti.

Si ha quindi

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \int \frac{\sigma d\tau'}{dr} + \frac{1}{\lambda} \int \left( f' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx'} + g' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy'} + h' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz'} \right) d\tau'$$

chiamando  $\sigma$  la densità nel punto  $(x, y, z)$  del conduttore. In questa equazione il primo integrale rappresenta il potenziale dovuto all'elettricità libera dei conduttori, il secondo il potenziale dovuto all'elettricità polarizzata nei dielettrici.

Di solito l'elettricità libera è presente solo sulla superficie dei conduttori. Chiamiamo  $[\sigma]$  la densità *superficiale* di questa elettricità nel punto  $x, y, z$  di questa superficie,  $[\sigma']$  la densità superficiale nel punto  $x', y', z'$ . Se c'è elettricità non solo sulla superficie, ma anche all'interno

dei conduttori, chiamerò parimenti  $\sigma$  la densità di *volume* dell'elettricità nel punto  $x, y, z$  del conduttore.

Abbiamo allora:

$$\lambda\varphi = \int \frac{\sigma d\tau'}{r} + \int \frac{[\sigma'] d\omega'}{r} + \int \left( f' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx'} + g' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy'} + h' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz'} \right) d\tau'$$

il primo integrale dovendosi estendere a tutti gli elementi di volume  $d\tau'$  dei conduttori, il terzo a tutti gli elementi  $d\tau'$  dei dielettrici e il secondo a tutti gli elementi  $d\omega'$  della superficie che separa i conduttori dai dielettrici.

Il terzo integrale può essere trasformato mediante integrazione per parti e dà:

$$\int \left( f' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx'} + g' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dy'} + h' \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dz'} \right) d\tau' = \int (l'f' + m'g' + n'h') d\omega' - \int \left( \frac{df'}{dx'} + \frac{dg'}{dy'} + \frac{dh'}{dz'} \right) d\tau' \quad (3)$$

Nel secondo membro il primo integrale deve essere esteso a tutti gli elementi della superficie che delimita i dielettrici ed il secondo a tutti gli elementi di volume dei dielettrici.

Per abbreviare la scrittura nell'equazione (3), ho assunto che le proprietà del dielettrico varino in modo continuo tale che  $f, g, h$  siano funzioni continue; quindi, se si hanno dielettrici diversi, suppongo che siano separati l'uno dall'altro da uno *strato di passaggio* molto sottile. Considererò invece i dielettrici come separati dai conduttori da una superficie geometrica in modo tale che le proprietà del mezzo varino improvvisamente quando attraversiamo questa superficie.

Poniamo ora

$$\rho = \sigma$$

nei conduttori;

$$\rho = -\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dy} - \frac{dh}{dz}$$

nei dielettrici;

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mg + nh$$

sulla superficie di separazione dei conduttori e dei dielettrici.

Verrà allora

$$\lambda\varphi = \int \rho' \frac{d\tau'}{r} + \int \frac{[\rho'] d\omega'}{r}$$

In altre parole tutto accadrà come se avessimo dell'elettricità distribuita in tutto lo spazio con una densità  $\rho$  e dall'altra parte dell'elettricità distribuita sulla superficie dei conduttori con densità superficiale  $[\rho]$ .

È facile rendersi conto di questo risultato:

Se si considera un magnete, si sa che tutto avviene come se la densità magnetica al suo interno fosse  $-\frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy} - \frac{dC}{dz}$  e la densità superficiale sulla superficie del magnete fosse uguale a  $Al + Bm + Cn$ . Essendo i dielettrici paragonabili ai magneti, tutto avviene come se si avesse una densità elettrica interna  $-\frac{df}{dx} - \frac{dg}{dy} - \frac{dh}{dz}$  e alla superficie una densità uguale a  $lf + mg + nh$ .

Se si considera quindi la superficie di separazione di un conduttore e di un dielettrico, che sarà ad esempio esterno a tale superficie, avremo all'interno ad essa uno strato elettrico infinitamente sottile di densità  $[\sigma]$ , proveniente dall'elettricità che, libera di circolare nel conduttore, si è portata in superficie; e avremo invece, all'esterno di questa superficie, uno strato infinitamente sottile, di densità  $lf + mg + nh$ , proveniente dalla polarizzazione del dielettrico.

Alla fine tutto accadrà come se avessimo un unico strato di densità  $[\rho]$ .

È importante non confondere queste due densità superficiali  $[\rho]$  e  $[\sigma]$  la cui definizione è molto diversa.

Nel dielettrico, si ha

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = -\rho$$

e differenziando rispetto al tempo, tenendo conto delle relazioni  $u = \frac{df}{dt}, \dots$ , si ritrova l'equazione di continuità

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{d\rho}{dt}$$

**282.** C'è da fare un'osservazione. Una molecola elettrica situata all'interno di una sfera di Mossotti è sottoposta ad una forza elettrostatica la cui componente parallela a  $Ox$  è:

$$X = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{4\pi f}{K - \lambda} \quad (4)$$

Si può essere sorpresi nel vedere che la sua forza non è la derivata del potenziale, cambiato di segno. Infatti *il dielettrico non è un mezzo omogeneo*; il potenziale effettivo varia in modo irregolare; nella condizione statica, ad esempio, è costante all'interno di ciascuna delle sfere di Mossotti e variabile al di fuori. Un osservatore che attraversa il dielettrico in linea retta vedrà il potenziale variare lungo una curva come la  $MN'$  della figura; questa curva presenta delle sinuosità.

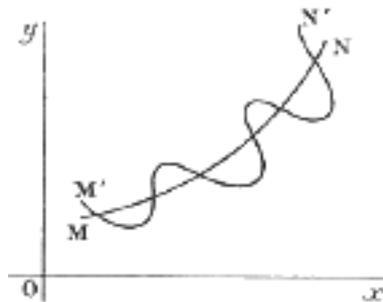


Fig. 47.

La funzione  $\varphi$  definita dalle equazioni del n. 276 è invece continua come tutte le sue derivate; solo a questa condizione può essere vantaggiosamente introdotta nei calcoli; questa funzione  $\varphi$ , che si potrebbe chiamare *potenziale medio*, non è quindi strettamente uguale al potenziale vero, ma la differenza è piccolissima e dello stesso ordine di grandezza della distanza che separa due sfere di Mossotti<sup>27</sup>.

Questo potenziale vero oscilla attorno ad un valore medio che è  $\varphi$ , le due curve che rappresentano il potenziale vero ( $M'N'$ ) e il potenziale medio ( $MN$ ) sono estremamente vicine, *ma le*

<sup>27</sup>Se si considera ad esempio un punto situato al di fuori di queste sfere il potenziale medio è uguale all'integrale

$$\int \left( f' \frac{d^1}{dx'} + g' \frac{d^1}{dy'} + h' \frac{d^1}{dz'} \right) d\tau'$$

e il potenziale effettivo è uguale alla somma

$$\sum \left( f' \frac{d^1}{dx'} + g' \frac{d^1}{dy'} + h' \frac{d^1}{dz'} \right) d\tau'$$

ottenuta scomponendo il volume del dielettrico in elementi  $\Delta\tau'$  contenenti ciascuno una ed una sola sfera di Mossotti e quindi finiti anche se estremamente piccoli.

Vediamo così con quale grado di approssimazione il "potenziale medio" rappresenta il "potenziale vero". Queste differenze non hanno alcuna importanza, poiché da un lato nulla ci impedisce di assumere sfere piccole a piacere, e dall'altro le ipotesi di Mossotti dovrebbero essere considerate solo come un modo conveniente di considerare le cose e probabilmente non hanno alcun collegamento con la realtà dei fatti. Ho ritenuto però necessario entrare in tutti questi dettagli per risolvere un'apparente contraddizione.

tangenti sono molto diverse, ed è per questo che la forza, che è la derivata del potenziale vero (a meno del segno), è molto diversa dalla derivata del potenziale medio.

### 283. Espressione dell'energia elettrostatica nel caso di dielettrici

Una forza elettromotrice  $(X, Y, Z)$  applicata ad una massa di elettricità  $m$  posta in un punto  $(x, y, z)$  produce lavoro nel tempo  $dt$ .

$$m \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

Per tutte le masse dell'elemento  $d\tau$ , il lavoro riferito all'unità di tempo è:

$$X \sum m \frac{dx}{dt} = Xu d\tau$$

e per l'intero volume, si ha il lavoro:

$$\int (Xu + Yv + Zw) d\tau$$

Ora si ha (4) n° 282

$$X = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{4\pi f(1-\varepsilon)}{3\lambda\varepsilon} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{4\pi f}{K-\lambda}$$

$$Y = -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{4\pi g}{K-\lambda}$$

$$Z = -\frac{d\varphi}{dz} - \frac{4\pi h}{K-\lambda}$$

Il lavoro cambiato di segno, è  $\frac{dU}{dt}$  (indicando con  $U$  l'energia elettrostatica); pertanto:

$$\frac{dU}{dt} = \int \left( u \frac{d\varphi}{dt} + v \frac{d\varphi}{dt} + w \frac{d\varphi}{dt} \right) d\tau + \frac{4\pi}{K-\lambda} \int (uf + vg + wh) d\tau$$

Il primo integrale è uguale a (integrando per parti nell'intero spazio)

$$\int \left( u \frac{d\varphi}{dt} + v \frac{d\varphi}{dt} + w \frac{d\varphi}{dt} \right) d\tau = - \int \varphi \left( \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} \right) d\tau$$

e tenendo conto dell'equazione di continuità

$$- \int \varphi \left( \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} \right) d\tau = \int \varphi \frac{d\rho}{dt} d\tau$$

Ma

$$\lambda \Delta \varphi = -4\pi \rho$$

L'integrale è quindi,

$$\begin{aligned} \int \varphi \frac{d\rho}{dt} d\tau &= -\frac{1}{4\pi} \int \lambda \varphi \frac{d\Delta \varphi}{dt} d\tau = -\frac{\lambda}{4\pi} \int \lambda \varphi \Delta \frac{d\varphi}{dt} d\tau = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dxdt} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2\varphi}{dydt} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2\varphi}{dzdt} \right) d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{8\pi} \frac{d}{dt} \int \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau$$

Il secondo integrale è, tenendo conto delle relazioni  $u = \frac{df}{dt} \dots$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{K-\lambda} \int (uf + vg + wh) d\tau &= \frac{4\pi}{K-\lambda} \int \left( f \frac{df}{dt} + g \frac{dg}{dt} + h \frac{dh}{dt} \right) d\tau = \\ &= \frac{2\pi}{K-\lambda} \frac{d}{dt} \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau \end{aligned}$$

Assumeremo che all'origine del tempo tutti i conduttori partano dallo stato neutro e non vi sia né elettricità libera né corrente.

Si ha quindi per  $t = 0$

$$U = 0$$

e per un periodo ulteriore qualsiasi

$$U = \frac{\lambda}{8\pi} \int \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau + \frac{2\pi}{K-\lambda} \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau$$

**284.** Questa è l'espressione generale dell'energia elettrostatica. Quando si tratta di fenomeni puramente elettrostatici l'espressione diventa più semplice; si ha infatti:

$$f = -\frac{d\varphi}{dx} \frac{K-\lambda}{4\pi}$$

e due altre equazioni analoghe; da cui

$$\frac{2\pi}{K-\lambda} f^2 = \frac{K-\lambda}{8\pi} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2$$

Si ha quindi

$$U = \int d\tau \left[ \frac{\lambda}{8\pi} \sum \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{K-\lambda}{8\pi} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right]$$

dove il simbolo  $\sum$  indica una permutazione circolare sulle lettere  $x, y, z$ .

O infine,

$$U = \int \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau \quad (5)$$

D'altra parte, abbiamo all'interno dei conduttori:

$$\varphi = cost \quad (6)$$

All'interno dei dielettrici, l'equazione di Poisson ci dà:

$$\lambda \Delta \varphi = -4\pi \rho = 4\pi \sum \frac{df}{dx}$$

con il simbolo  $\sum$  avente lo stesso significato di prima; da cui, sostituendo  $f$  con il suo valore del n° 284,

$$\lambda \sum \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = - \sum \frac{d}{dx} \left[ (K-\lambda) \frac{d\varphi}{dx} \right]$$

che si può ancora scrivere

$$\sum \frac{d}{dx} \left( K \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0 \quad (7)$$

Consideriamo ora un punto sulla superficie di separazione di conduttori e dielettrici. Porremo, secondo una notazione generalmente adottata

$$\frac{d\varphi}{dn} = l \frac{d\varphi}{dx} + m \frac{d\varphi}{dy} + n \frac{d\varphi}{dz} \quad (8)$$

Avremo quindi (ricordando che  $\varphi$  è costante all'interno dei conduttori) in un punto situato nel dielettrico ma infinitamente vicino alla superficie di separazione:

$$\lambda \frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\rho]$$

Abbiamo posto

$$[\rho] = [\sigma] + lf + mh + nh$$

abbiamo quindi assunto che  $l, m, n$  fossero i coseni direttori della normale *diretta verso il conduttore*; se assumiamo come nella formola (8) che  $l, m, n$  siano i coseni della normale *diretta verso il dielettrico*, si dovrà scrivere:

$$[\rho] = [\sigma] - (lf + mh + nh)$$

da cui

$$\lambda \frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma] + 4\pi(lf + mh + nh)$$

e sostituendo  $f, g, h$  con i loro valori

$$f = -\frac{d\varphi}{dx} \frac{K - \lambda}{4\pi}, \dots$$

viene

$$\lambda \frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma] - (K - \lambda) \left( l \frac{d\varphi}{dx} + m \frac{d\varphi}{dy} + n \frac{d\varphi}{dz} \right)$$

o

$$\lambda \frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma] - (K - \lambda) \frac{d\varphi}{dn}$$

o infine:

$$K \frac{d\varphi}{dn} = -4\pi[\sigma]$$

Osservo ancora che si ha:

$$\text{carica di un conduttore} = \int [\sigma] d\omega$$

l'integrazione essendo estesa a tutti gli elementi della superficie di questo conduttore.

Le equazioni (6), (7), (9) e (10) sono sufficienti per farci conoscere la funzione quando conosciamo la carica di ciascun conduttore.

L'equazione (5) ci dà quindi l'energia  $U$  e poiché sappiamo che il lavoro virtuale delle attrazioni elettrostatiche è uguale all'incremento virtuale di questa energia, possiamo dedurre il valore di queste attrazioni.

Quindi, se conosciamo la carica e la posizione di ciascun conduttore, le equazioni (5), (6), (7), (9) e (10) ci daranno le attrazioni elettrostatiche. Ma in queste equazioni la costante  $\lambda$  non compare; vediamo apparire solo il potere induttore  $K$ .

Le attrazioni elettrostatiche, per cariche e posizioni date dei conduttori, che costituiscono l'unico oggetto delle esperienze elettrostatiche, quindi non dipendono da  $\lambda$ . Queste esperienze non possono quindi farci conoscere  $\lambda$ , ma solo il potere induttore  $K$  che è funzione di  $\lambda$  e di  $\varepsilon$ .

Indicheremo con  $K_0$  il potere induttore del vuoto e con  $\varepsilon_0$  il valore di  $\varepsilon$  relativo al vuoto.

Nelle vecchie teorie si presuppone che il vuoto non contenga sfere di Mossotti, che non vi sia alcuna polarizzazione dielettrica, vale a dire che  $\varepsilon_0 = 0$ , quindi:

$$\lambda = K_0$$

e per un dielettrico qualunque:

$$\varepsilon = \frac{K - K_0}{K + 2K_0}$$

Ma nulla ci impone di assumere  $\varepsilon_0 = 0$ . È così che nella teoria del magnetismo indotto, dopo aver assunto che per il vuoto  $\chi = 0$ ,  $\mu = 1$  siamo stati portati, per spiegare il diamagnetismo, ad assumere che il  $\mu$  del vuoto è maggiore di 1, cioè a dire che il vuoto è debolmente magnetico (Cf. n° 274). Anche qui possiamo fare un'ipotesi simile.

Poiché gli esperimenti elettrostatici ci permettono di conoscere solo  $K$  e  $K_0$ , *i fenomeni elettrostatici possono essere spiegati qualunque sia il valore minore di  $K_0$  attribuito a  $\lambda$  purché si assuma contemporaneamente:*

$$\varepsilon_0 = \frac{K - \lambda}{K + 2\lambda_0}$$

e per un dielettrico qualunque<sup>28</sup>

$$\varepsilon = \frac{K - \lambda}{K + 2\lambda}$$

$K$  è espresso in funzione di  $\lambda$  e di  $\varepsilon$ , ma né  $\lambda$  né  $\varepsilon$  entrano separatamente nell'espressione dell'energia elettrostatica. Se si cambia  $\lambda$  contemporaneamente a  $\varepsilon$  lasciando  $K$  invariato, non cambierà nulla nell'espressione di ciò che possiamo conoscere sperimentalmente. L'esperienza quindi non ci farà conoscere  $\lambda$  se ci atteniamo ai fenomeni elettrostatici.

**285.** Nelle idee di Mossotti, generalmente accolte,  $\varepsilon = 0$ .

Allora

$$K_0 = \frac{\lambda(1 + 2\varepsilon)}{1 - \varepsilon} = \lambda$$

Due unità di elettricità poste all'unità di distanza, si respingono con una forza

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{K_0}$$

Ma si può spiegare il fenomeno anche ammettendo che  $\varepsilon_0$  non sia nullo, anche per l'aria e per il vuoto. Allora,

$$K_0 > \lambda \quad e \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{K_0}$$

La repulsione effettiva tra due unità di elettricità è maggiore di  $\frac{1}{K_0}$ , ma la repulsione osservata nel vuoto è sempre  $\frac{1}{K_0}$ : essa non è modificata. Essa è solo più piccola della repulsione reale a causa dell'azione di senso opposto dovuta alla presenza di sfere polarizzate. La teoria di Maxwell

<sup>28</sup>Queste formule presuppongono che, come Poisson e Mossotti, si attribuisca la forma sferica alle parti conduttrici del dielettrico. Questa ipotesi non gioca alcun ruolo essenziale nella teoria, serve solo a semplificare i calcoli. Se assumiamo che la forma delle parti conduttrici è arbitraria, arriveremmo ad un risultato analogo e troveremmo

$$K = \lambda\varphi(\varepsilon)$$

essendo  $\varphi(\varepsilon)$  una funzione che si comporta come  $\frac{1+2\varepsilon_0}{1-\varepsilon}$ ; voglio dire che essa cresce con  $\varepsilon$ , che essa è uguale a 1 per  $\varepsilon = 0$  e infinita per  $\varepsilon = 1$ .

consiste nel porre  $\lambda = 0$ . Affinché  $K$  sia finito, serve che  $\varepsilon$  sia uguale a 1. Cioè che le parti conduttrici occupino l'intero volume del dielettrico. Ciò equivale a rappresentare i dielettrici come celle conduttrici separate da divisori isolanti di spessore infinitamente piccolo rispetto alle dimensioni di tali celle<sup>29</sup>. (Cfr. prima parte, n. 61 seg.). La repulsione reale tra due molecole unite sarebbe infinitamente grande, essendo  $\lambda$  nullo, ma la repulsione osservata tra queste due molecole, immerse nel dielettrico, è finita.

I fenomeni elettrodinamici ordinari non dipendono più dal valore di  $\lambda$  e non ci possono far conoscere questo valore,  $\frac{dF}{dt}$  è nullo per correnti costanti. L'equazione (2), n° 280, si scrive quindi

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{d\varphi}{dx}$$

poiché le forze elettromotrici di origine diversa, da noi rappresentate con  $X$ , sono generalmente nulle.

Ricorriamo quindi alle equazioni del n. 280.

Nel caso di correnti variabili ordinarie,  $\frac{dF}{dt}$  è generalmente trascurabile, bisognerà ricorrere a correnti alternate molto veloci, come negli esperimenti di Hertz se si vuole  $\frac{dF}{dt}$  sia abbastanza grande da far sentire l'influenza del termine in  $\lambda$ .

La teoria di Maxwell è quindi in definitiva solo un caso limite piuttosto che un caso speciale della teoria di Helmholtz. Per passare dall'una all'altra è necessario assegnare a  $\lambda$  un valore infinitamente piccolo.

Vediamo cosa diventano in questo caso le varie quantità considerate:

1° Il potenziale elettrostatico  $\varphi$ , così come le densità  $\sigma$  e  $[\sigma]$ , che, secondo il n° 280, non dipendono dal valore attribuito a  $\lambda$ , rimangono finite;

2° Al contrario le densità chiamate  $\rho$  e  $[\rho]$  sono degli infinitesimi dello stesso ordine di  $\lambda$ .

Può sorprendere che il potenziale  $\varphi$  e le attrazioni elettrostatiche rimangano finiti sebbene le densità elettriche  $\rho$  e  $[\rho]$  siano infinitamente piccole; ma ti ricorderò:

1° Che abbiamo trovato:

$$\varphi = \int \frac{[\rho']d\omega'}{\lambda r} = \int \frac{\rho'd\tau'}{\lambda r}$$

da cui segue che  $\varphi$  è finito se  $\rho$ ,  $[\rho]$  e  $\lambda$  sono infinitesimi dello stesso ordine;

2° Che è finito anche il lavoro delle forze elettrostatiche che è uguale alla variazione della funzione  $U$  definita dall'equazione (5) del n. 284.

Si può spiegare la cosa anche in un altro modo.

Ricordiamo, come ho spiegato nella prima parte, che, secondo il modo di vedere che siamo stati indotti ad adottare, i dielettrici sono costituiti da celle conduttrici separate da pareti infinitamente sottili e che ciascuna di queste pareti isolanti rappresenta un condensatore di cui le due celle vicine sono le armature.

Queste due armature hanno cariche uguali e di segni opposto  $q$  e  $-q$ ; essendo la parete infinitamente sottile, l'azione di queste due cariche su un punto esterno è dello stesso ordine di grandezza dello spessore  $\delta$  della parete diviso per  $\lambda$  e moltiplicato per  $q$ ; se quindi, come supponiamo,  $\delta$  e  $\lambda$  sono dello stesso ordine, questa azione sarà dello stesso ordine di  $q$ .

Ci sono due osservazioni da fare riguardo al calcolo delle azioni elettrostatiche:

1° Abbiamo effettuato questo calcolo partendo dall'espressione di  $U$ . In elettrostatica viene spesso utilizzato un altro metodo applicabile a un conduttore libero posto in un dielettrico non polarizzabile ( $\varepsilon = 0$ ). Consideriamo le varie molecole elettriche distribuite sulla superficie dei conduttori e le forze a cui sono sottoposte e le componiamo secondo le leggi della statica. Questo metodo applicato a un conduttore posto in un dielettrico polarizzabile costituito secondo le

<sup>29</sup>Ciò non dovrebbe essere preso alla lettera. Sarebbe difficile ammettere che il vuoto abbia una struttura simile.

Questo va visto solo come un modo per esprimere il fatto che nel dielettrico l'elettricità non circola, non si muove, c'è solo polarizzazione.

idee di Mossotti darebbe risultati errati e se fosse applicato al caso di un dielettrico costituito secondo la teoria di Maxwell e le idee esposte in questo numero, troveremmo un'attrazione infinita. Infatti questo conduttore non potrebbe muoversi senza disturbare le sfere Mossotti o le celle conduttrici, il che produrrebbe un lavoro elettrostatico negativo e di conseguenza una resistenza di cui bisogna tener conto;

2° Non si dovrebbe più per calcolare  $U$  partire dalla formula:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau$$

che darebbe  $U = 0$  poiché  $\rho = 0$ .

La funzione infatti non è continua poiché varia repentinamente quando si passa da una cella all'altra. Se ritorniamo ai piccoli condensatori chiamati  $q$  e  $q'$  le cariche di cui ho parlato delle due armature,  $\varphi$  e  $\varphi'$  il loro potenziale;  $q + q'$  sarà dell'ordine di  $\lambda$ , ma questo non è un motivo perché valga anche per  $q\varphi + q'\varphi'$  poiché  $\varphi - \varphi'$  non è un infinitesimo dell'ordine di  $\lambda$ .

Si ha d'altronde

$$\int \rho d\tau = \sum (q + q')$$

$$\int \rho \varphi d\tau = \sum (q\varphi + q'\varphi')$$

le integrazioni essendo estese a qualsiasi volume e le sommatorie a tutti i piccoli condensatori contenuti in questo volume.

Possiamo quindi vedere come il primo integrale possa essere nullo senza che il secondo lo sia.

## 286. Velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche

Cerchiamo ora come si propagano le perturbazioni elettrodinamiche nelle varie teorie elettromagnetiche presenti. Se le velocità di propagazione che sono funzioni delle quantità  $\lambda, k, K$  sono accessibili all'esperimento, questo sarà un mezzo per determinare una di queste quantità.

Si hanno dieci equazioni alle derivate parziali che definiscono le dieci quantità  $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, F, G, H, \varphi$ .

Consideriamo un dielettrico di potere induttore  $K$ . Si ha (n° 280, eq. (2))

$$\frac{4\pi f}{K - \lambda} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt}$$

Differenziando rispetto a  $t$ , e tenendo conto delle relazioni  $u = \frac{df}{dt}$ , ecc, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi u}{K - \lambda} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2} \\ \frac{4\pi v}{K - \lambda} = -\frac{d^2\varphi}{dydt} - \frac{d^2G}{dt^2} \\ \frac{4\pi w}{K - \lambda} = -\frac{d^2\varphi}{dzdt} - \frac{d^2H}{dt^2} \end{array} \right.$$

d'altra parte si hanno le equazioni (15) del n. 268

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = -\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = -\lambda \frac{d^2\varphi}{dydt} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = -\lambda \frac{d^2\varphi}{dzdt} \end{array} \right.$$

le equazioni (19) del n° 275

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{array} \right.$$

e

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

Consideriamo ora una perturbazione elettromagnetica nel mezzo dielettrico. Supponiamo di avere un'onda piana perpendicolare a  $Ox$ : le quantità che compaiono nelle equazioni precedenti saranno quindi solo funzioni di  $x$  e  $t$ .

Queste equazioni diventano di conseguenza

$$\frac{4\pi u}{K - \lambda} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2} \quad (I)$$

$$\frac{4\pi v}{K - \lambda} = -\frac{d^2G}{dt^2} \quad (II)$$

$$\frac{4\pi w}{K - \lambda} = -\frac{d^2H}{dt^2} \quad (III)$$

$$4\pi u = \lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \quad (IV)$$

$$4\pi v = -\frac{d\gamma}{dx} \quad (V)$$

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dx} \quad (VI)$$

$$\mu\alpha = 0 \quad (VII)$$

$$\mu\beta = -\frac{dH}{dx} \quad (VIII)$$

$$\mu\gamma = \frac{dG}{dx} \quad (IX)$$

$$\frac{dF}{dx} = -k\lambda \frac{d\varphi}{dt} \quad (X)$$

1° Studiamo dapprima l'ONDA LONGITUDINALE. Supponiamo quindi che

$$G = H = v = w = \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Rimangono  $F$ ,  $\varphi$ ,  $u$  e devono soddisfare alle tre equazioni (I), (IV) e (X): le altre sono soddisfatte da se stesse.

Confrontiamo la (I) e la (IV); si ha

$$4\pi u = -(K - \lambda) \frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2} (K - \lambda) \quad (I)$$

$$4\pi u = -\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt} \quad (IV)$$

da cui

$$\frac{\lambda}{K - \lambda} \frac{d^2\varphi}{dxdt} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d^2F}{dt^2}$$

da cui ancora

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} \left( 1 + \frac{\lambda}{K - \lambda} \right) = -\frac{d^2\varphi}{dxdt} \frac{K}{K - \lambda}$$

d'altra parte differenziando la relazione (X) rispetto a  $x$ , si ha

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -k\lambda \frac{d^2\varphi}{dxdt}$$

da cui

$$-\frac{d^2\varphi}{dxdt} = \frac{1}{k\lambda} \frac{d^2F}{dx^2}$$

La relazione precedente in  $\frac{d^2F}{dt^2}$  diviene così

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2} \frac{K}{(K - \lambda) k\lambda}$$

La velocità di propagazione delle onde longitudinali è quindi,

$$V_1 = \sqrt{\frac{K}{(K - \lambda) k\lambda}}$$

2°. ONDE TRASVERSALI. - Si può soddisfare alle equazioni ponendo

$$F = H = u = w = \alpha = \beta = \varphi = 0$$

Rimangono  $G, \gamma, v$  e le tre equazioni (II), (V) e (IX).

Confrontiamo la (II) e la (V); si ha

$$4\pi v = -(K - \lambda) \frac{d^2G}{dt^2} \quad (II)$$

$$4\pi v = -\frac{d\gamma}{dx} \quad (V)$$

da cui

$$\frac{1}{K - \lambda} \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d^2G}{dt^2}$$

d'altra parte differenziando la (IX) rispetto a  $x$ , si ha,

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{d^2G}{dx^2}$$

Ne risulta che,

$$\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{1}{\mu(K - \lambda)} \frac{d^2G}{dx^2}$$

La velocità di propagazione è quindi

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\mu(K - \lambda)}}$$

**287.** Vi sono casi in cui l'onda longitudinale non si può propagare. Sono i casi in cui

$$k = 0 \quad \lambda = 0 \quad K = \lambda$$

La velocità di propagazione è quindi infinita. Questa è l'ipotesi di Maxwell; le vibrazioni sono quindi trasversali.

Per le onde trasversali, se  $\lambda = K$ , la velocità di propagazione è infinita. Questo è quanto avviene nella vecchia teoria di Mossotti, secondo la quale  $\lambda$  è uguale al valore  $K_0$  del potere induttore del vuoto;  $\mu_0 = 1$ . In questa teoria, nel vuoto (o nell'aria), non c'è propagazione di onde trasversali, né di onde longitudinali.

Nella teoria di Maxwell esistono solo vibrazioni trasversali e la loro velocità di propagazione  $V_2$  è uguale alla velocità  $v$  della luce. Supponiamo di essere collocati nel sistema elettromagnetico, l'esperienza ci insegna che  $K_0$  è l'inverso del quadrato della velocità della luce;  $\mu_0 = 1$ . Se si

assegna a  $\lambda$  il valore 0, si ha  $V_2 = v$ . Se si dà a  $\lambda$  un valore positivo diverso da 0, si ha per  $V_2$  una velocità maggiore di quella della luce. La teoria di Maxwell si deduce quindi dalla teoria di Helmholtz ponendo  $\lambda = 0$ .

**288.** Rappresentiamo le equazioni del n° 46 con questo valore di  $\lambda$ . Abbiamo,

$$\begin{cases} \frac{4\pi f}{K} = -\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dt} \\ \frac{4\pi g}{K} = -\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dG}{dt} \\ \frac{4\pi h}{K} = -\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dH}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = -\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = -\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases}$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0$$

Differenziamo le equazioni del secondo gruppo rispettivamente rispetto a  $x, y, z$ ; si ha

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

cioè  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . L'elettricità è incomprimibile; tutte le correnti sono chiuse.

$\rho$  non varia con il tempo; se  $\rho = 0$  all'origine, la densità effettiva dell'elettricità è sempre nulla.

Si vede insomma che se  $\lambda = 0$ , il  $k$  di Helmholtz non interviene nelle equazioni, Si passa quindi alla teoria di Maxwell ponendo  $\lambda = 0$  e lasciando  $k$  qualsiasi.

Helmholtz dice nella sua prefazione che si passa alla teoria di Maxwell ponendo  $k = 0$ . Questo non è corretto; si ottiene, ponendo  $k = 0$ , l'equazione  $J = 0$  (n° 26), ma per dedurre dalla formula che dà  $V_2$  la velocità delle onde trasversali come in Maxwell, si è costretti a introdurre ulteriori ipotesi. Questo è anche ciò che Helmholtz spiega in tutta l'opera, completando così l'affermazione della sua prefazione che tuttavia ha ingannato qualcuno<sup>30</sup>.

Al contrario, facendo  $\lambda = 0$ , è sufficiente. Non sorprende che non si debba dare a  $k$  un valore particolare per adattare la teoria di Maxwell a quella di Helmholtz: Maxwell considera solo correnti chiuse,  $k$  deve quindi sempre scomparire dalle equazioni.

Finora abbiamo solo mostrato in cosa consiste la teoria di Maxwell e come essa possa essere ricondotta a quella di Helmholtz. Resterà da indicare le ragioni che dovrebbero far sì che venga adottata preferendola a tutte le altre.

**289.** Torniamo alle onde trasversali: la corrente è diretta lungo  $Oy$  e la forza magnetica lungo  $Oz$ ; queste due perturbazioni, elettrica e magnetica, sono nel piano dell'onda, ma perpendicolari tra loro.

<sup>30</sup>Helmholtz dice infatti che per passare dalla sua teoria a quella di Maxwell bisogna fare

$$k = 0 \quad \varepsilon = \infty \quad \theta = \infty$$

che con le notazioni richiede di porre

$$k = 0 \quad \lambda = 0 \quad \chi = \infty$$

Non c'è motivo di fare  $k = 0$  o né  $\chi = \infty$ ; dal momento che si pone  $\lambda = 0$ , si ritrova la teoria di Maxwell qualunque siano  $k$  e  $\chi$ .

La luce, secondo Maxwell, è una perturbazione elettromagnetica; ma possiamo supporre che il piano di polarizzazione della luce sia perpendicolare alla vibrazione elettrica e contenga la vibrazione magnetica, oppure fare l'ipotesi opposta. La questione della direzione della vibrazione rispetto al piano di polarizzazione appare più accessibile all'esperienza nel caso dell'elettricità che nel caso della luce; e possiamo aspettarci dagli esperimenti elettromagnetici argomenti a favore di una delle due ipotesi. Per Maxwell la vibrazione della luce è parallela alla forza magnetica; e questa è nel piano di polarizzazione, secondo l'ipotesi di Neumann e contrariamente a quella di Fresnel; la corrente è perpendicolare al piano di polarizzazione.

Ancora una osservazione sulla velocità di propagazione delle onde longitudinali. Poiché  $\lambda$  è diverso da zero, si potrebbero eliminare queste onde ponendo  $k = 0$ ; ma si potrebbe ottenere lo stesso risultato rendendo  $k$  negativo. Si avrebbero allora raggi evanescenti e si ricadrebbe nelle idee di Cauchy<sup>31</sup>, ma in questo caso l'equilibrio è instabile come abbiamo dimostrato (n. 34).

Ho anche spiegato nella Teoria matematica della luce che con le idee di Cauchy l'etere sarebbe in equilibrio instabile.

---

<sup>31</sup>POINCARÉ, *Théorie mathématique de la lumière*, p. 55, n° 47. G. CARRÉ et C. NAUD, éditeurs.

## **Parte III.**

# **Nuove teorie elettrodinamiche - Teoria di Hertz e di Lorentz**



# Cap. I - Teoria di Hertz - Elettrodinamica dei corpi a riposo

290. Prima di entrare nello studio dettagliato di questa teoria, cominciamo coll'indicare in poche righe le idee che Hertz ebbe su punto di partenza delle altre teorie elettrodinamiche proposte prima di lui.

Egli rileva innanzitutto che passando dall'idea di semplice azione a distanza all'azione attraverso un mezzo, si possono assumere diversi punti di vista<sup>32</sup>:

1° *Azione a distanza.* — Perché tale azione possa essere esercitata è necessario che i due corpi tra i quali essa viene esercitata esistano contemporaneamente; se ce n'è uno solo, questa azione elettrica non può esistere: questo è il punto di vista astronomico dell'attrazione reciproca.

2° *Punto di vista dalla teoria del potenziale.* — Si suppone che la forza elettrica esista anche con un solo corpo elettrizzato, prima che un altro corpo elettrizzato venga introdotto nel campo.

3° *Polarizzazione del dielettrico.* — Si suppone che i dielettrici siano costituiti da celle che si elettrizzano per influenza. Se si considera un condensatore, le forze esercitate tra le armature sarebbero allora dovute non solo alle cariche delle due armature, ma anche alle cariche delle celle. Questo è il punto di partenza della teoria di Poisson.

Se si attribuisce il ruolo principale alle celle, le forze a distanza giocano allora solo un ruolo minimo; tuttavia non si possono trascurare perché allo stesso tempo non si sopprime l'azione esercitata sulle celle: questa è l'idea di Helmholtz.

4° *Eliminazione di qualsiasi azione a distanza.* — Il campo consiste quindi in una certa polarizzazione del dielettrico: questa è l'idea di Maxwell. Tuttavia, il testo classico di Maxwell non si spiega completamente partendo da questa ipotesi. Hertz attribuisce questa mancanza di chiarezza a due cause:

a) La parola "elettricità" non ha un significato preciso nei suoi ragionamenti: la usa per designare l'elettricità nel senso comune, nel senso di fluido incompressibile, ecc.

b) L'opera di Maxwell non forma un unico insieme di idee: egli fornisce più teorie relative allo stesso argomento, poi le abbandona successivamente, così che vi si trova piuttosto una miscela di teorie che un'unica teoria.

In breve, Hertz ammette soltanto le equazioni stabilite da Maxwell, lasciando da parte il testo della sua opera classica perché oscuro, e tenta, preponendo le sue equazioni finali, di formulare una teoria che vi conduca.

È questa teoria di Hertz che ci proponiamo di esporre e discutere in dettaglio.

L'intera teoria di Hertz è contenuta in due famose memorie da lui pubblicate nel 1890 e che si intitolano: *Sulle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica dei corpi in riposo*<sup>33</sup> e l'altra *Sulle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica dei corpi in movimento*<sup>34</sup>. Ci sarebbero forse da fare delle riserve su questa distinzione poco giustificata, perché essendo le azioni elettriche misurate

<sup>32</sup>HERTZ. *Untersuchungen über Ausbreitung der elektrischen Kraft*, p. 23 (Leipzig, Barth, 1892). Si veda anche *La Lumière électrique* del 21 maggio 1892.

<sup>33</sup>HERTZ. *Nachrichten von der Koenigl. Gesellschaft*, marzo 1890, et *La Lumière électrique* del 19 luglio 1890 et numero seguente.

<sup>34</sup>HERTZ. *Wiedeman's Annalen*, t. XLI, p. 369; o *La Lumière électrique* del 6 dicembre 1890 et numero successivo.

per mezzo di piccoli corpi che si mettono in movimento, questi piccoli corpi in movimento modificano un po' il campo; ma possiamo supporre che lo modifichino poco.

Divideremo quindi lo studio della teoria di Hertz in due parti: l'elettrodinamica dei corpi a riposo e l'elettrodinamica dei corpi in movimento, e utilizzeremo le notazioni di Maxwell che ritroveremo anche nella teoria di Lorentz.

## Elettrodinamica dei corpi a riposo

### 291. Prima legge fondamentale

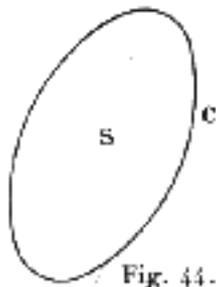
Consideriamo una qualsiasi superficie  $S$ , limitata da una certa curva chiusa  $C$ . Sappiamo che se il campo varia e se il contorno della superficie è costituito da un filo, in questo filo nasce allora una corrente di induzione e la forza elettromotrice d'induzione è rappresentata dall'integrale di linea,

$$\int (Pdx + Qdy + Rdz)$$

che scriviamo più semplicemente

$$\int \sum Pdx$$

dove il simbolo  $\sum$  si estende alle componenti del vettore  $(P, Q, R)$  che rappresenta la forza elettrica, e alle coordinate  $x, y, z$ .



L'esperienza c'insegna che questa forza elettromotrice che si genera nelle circostanze sopra indicate, è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica che attraversa la superficie  $S$  delimitata dal circuito in questione.

Si ha pertanto

$$\int \sum Pdx = \frac{d}{dt} \int \mu (l\alpha + m\beta + n\gamma) d\omega \quad (1)$$

estendendosi l'integrale del primo membro a tutta la curva  $C$  che delimita la superficie  $S$  e l'integrale del secondo membro a tutta la superficie  $S$ .

$(l, m, n)$  sono i coseni direttori dell'elemento  $d\omega$ .

### 292. Equazioni fondamentali di Hertz e di Maxwell

Trasformiamo il primo membro della relazione (1) con il teorema di Stokes; si ha

$$\int \sum Pdx = \int \sum l d\omega \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right)$$

l'integrale del secondo membro si estende all'intera superficie  $S$ .

La relazione (1) diviene quindi,

$$\int \sum l d\omega \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) = \frac{d}{dt} \int \sum \mu d\omega l \alpha = \int \sum l d\omega \frac{d\mu\alpha}{dt}$$

Da cui, identificando i coefficienti di  $l d\omega$ ,  $m d\omega$ ,  $n d\omega$ ,

$$\begin{cases} \frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \\ \frac{d\mu\beta}{dt} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \\ \frac{d\mu\gamma}{dt} = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \end{cases} \quad (1)$$

Queste sono le *prime equazioni fondamentali di Hertz*.

Se invece di considerare il flusso di induzione magnetica secondo Hertz, consideriamo il flusso di induzione magnetica secondo Maxwell che designa con  $a, b, c$  le componenti dell'induzione magnetica, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \\ \frac{db}{dt} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \\ \frac{dc}{dt} = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \end{cases} \quad (2)$$

Introduciamo ora il potenziale vettore; poniamo con Maxwell

$$\begin{cases} P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (3)$$

$F, G, H$  sono le componenti del *potenziale vettore* e  $\psi$  il potenziale elettrostatico,  $\frac{dF}{dt}$ ,  $\frac{dG}{dt}$ ,  $\frac{dH}{dt}$  rappresentano le componenti della forza elettromotrice di induzione di origine magnetica e  $\frac{d\psi}{dx}$ ,  $\frac{d\psi}{dy}$ ,  $\frac{d\psi}{dz}$  le componenti della forza elettromotrice di induzione di origine elettrostatica.

Sostituiamo nella (2),  $P, Q, R$  con i loro valori della (3); si ha

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{d^2 H}{dy dt} - \frac{d^2 G}{dz dt} \\ \frac{db}{dt} = \frac{d^2 F}{dz dt} - \frac{d^2 H}{dx dt} \\ \frac{dc}{dt} = \frac{d^2 G}{dx dt} - \frac{d^2 F}{dy dt} \end{cases}$$

da cui, integrando

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} + cost \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} + cost \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} + cost \end{cases}$$

Ma si può supporre nulla la costante di integrazione; infatti, abbiamo la relazione (n° 102)

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \quad (Maxwell)$$

e, d'altra parte, possiamo definire il potenziale vettore solo attraverso le sue derivate; è quindi determinato solo fino ad una costante. Resta quindi,

$$\begin{cases} a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases} \quad (4)$$

### 293. Corrente totale

Ricordiamo velocemente le idee di Maxwell sulla natura della corrente elettrica, per confrontarle con quelle di Hertz.

Maxwell indica con le lettere  $u, v, w$  le tre componenti della *corrente totale*, cioè la corrente di conduzione più la corrente di spostamento. Ma cosa si intende per spostamento elettrico? — Consideriamo un dielettrico posto in un campo elettrico; esso, a causa dell'azione del campo, si trova in uno stato di equilibrio vincolato, simile allo stato in cui si trova una molla tesa. Maxwell rappresenta questo stato di equilibrio con un vettore che chiama spostamento elettrico; rappresenta i suoi componenti con  $f, g, h$ ; designa inoltre le componenti della corrente di conduzione con  $p, q, r$ . Se il campo elettrico in cui si trova il dielettrico è variabile, anche lo spostamento elettrico sarà naturalmente variabile e questa variazione nello spostamento elettrico determina un fenomeno che Maxwell chiama *corrente di spostamento*. Designa i suoi componenti tramite

$$\frac{df}{dt} \quad \frac{dg}{dt} \quad \frac{dh}{dt}$$

che sono, come si vede, le derivate rispetto al tempo delle componenti dello spostamento elettrico.

Questa corrente di Maxwell produrrebbe, secondo lui, gli stessi effetti elettrodinamici delle correnti ordinarie; si tratta di un'ipotesi pienamente giustificata dagli esperimenti di Hertz.

Così quindi, secondo Maxwell, la corrente totale è rappresentata da

$$\begin{cases} u = p + \frac{df}{dx} \\ v = q + \frac{dg}{dy} \\ w = r + \frac{dh}{dz} \end{cases} \quad (5)$$

**294.** Vediamo ora quali sono le leggi che governano le correnti di conduzione e di spostamento.

Le correnti di conduzione sono regolate dalla legge di Ohm,

$$p = \lambda P \quad q = \lambda Q \quad r = \lambda R$$

essendo  $\lambda$  un coefficiente che dipende dalla conducibilità del mezzo. Tuttavia, questa legge presuppone che nel mezzo conduttore considerato, la corrente debba solo vincere quella che viene chiamata resistenza caratteristica del mezzo che attraversa; ma se in questo mezzo esistessero anche forze elettromotrici di origine chimica o termica, effetti Peltier, ecc., allora sarebbe necessario rappresentare queste forze nella nostra formula con un termine complementare; chiamiamo  $P_0, Q_0, R_0$  questi termini complementari; verrebbe quindi in questo caso,

$$p = \lambda(P - P_0) \quad q = \lambda(Q - Q_0) \quad r = \lambda(R - R_0)$$

Quanto allo spostamento elettrico è proporzionale a  $P, Q, R$ ; Maxwell rappresenta le sue componenti con

$$f = \frac{K}{4\pi}P \quad g = \frac{K}{4\pi}Q \quad h = \frac{K}{4\pi}R$$

$K$  è ciò che viene chiamato il potenza induttore specifico del dielettrico. Nel vuoto, questo coefficiente è uguale all'inverso del quadrato della velocità della luce.

Maxwell dimostra ulteriormente la seguente relazione (n. 87),

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (6)$$

Questa relazione significa che se prendiamo in considerazione le correnti di conduzione e le correnti di spostamento, vi sono solo *correnti chiuse*.

Hertz, nella sua teoria, introduce al posto del vettore di Maxwell ( $f, g, h$ ) un altro vettore che chiama *induzione elettrica* e le cui componenti rappresenta con

$$KP \quad KQ \quad KR$$

Si vede che questo nuovo vettore di Hertz è uguale al vettore ( $f, g, h$ ) di Maxwell a meno di  $4\pi$ .

## 295. Seconda legge fondamentale

Ritorniamo alla superficie  $S$  precedentemente considerata, limitata dalla curva  $C$  e consideriamo una massa magnetica che descrive questa curva; questa massa magnetica è sottoposta ad una forza da parte del campo esterno; il lavoro di questa forza è rappresentato dall'integrale di linea,

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

con l'integrale esteso al contorno  $C$ .

L'esperienza c'insegna che questo integrale è uguale al prodotto, cambiato segno, del fattore costante  $4\pi$  per la quantità di elettricità che attraversa la superficie  $S$ ; si ha quindi,

$$\int \sum \alpha dx = -4\pi \int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) d\omega \quad (7)$$

**296.** Trasformiamo il primo Integrale con il teorema di Stokes, come abbiamo fatto in precedenza per l'integrale di linea della forza elettrica, la relazione (7) diventa allora,

$$\int \sum l d\omega \left( \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \right) = -4\pi \int \sum l u d\omega \quad (8)$$

da cui, identificando i coefficienti di  $l d\omega$ ,  $m d\omega$ ,  $n d\omega$

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (9)$$

relazioni di Maxwell.

Ma è importante notare che l'esperimento si è sempre concentrato solo sulle correnti chiuse; la sua estensione al caso di correnti non chiuse (ad esempio la scarica di un condensatore) è stata fatta da Maxwell, come abbiamo già detto sopra, a condizione che si prenda per la corrente totale il valore

$$n = p + \frac{df}{dt}$$

**297.** Sostituiamo ora nella (9)  $u, v, w$  con i loro valori della (5), si ha

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p + 4\pi \frac{df}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q + 4\pi \frac{dg}{dt} \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r + 4\pi \frac{dh}{dt} \end{cases} \quad (10)$$

Ora,

$$f = \frac{KP}{4\pi}, \dots$$

da cui

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{dKP}{dt}, \dots$$

le relazioni (10) diventano pertanto

$$\begin{cases} \frac{dKP}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - 4\pi p \\ \frac{dKQ}{dt} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q \\ \frac{dKR}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r \end{cases} \quad (11)$$

Questo è *il secondo delle equazioni fondamentali di Hertz.*

**293.** La relazione (7) si mettere in un'altra forma. Abbiamo

$$\int \sum \alpha dx = \int \sum l d\omega \left( \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \right) = -4\pi \int \sum l u d\omega$$

Dalla (11)

$$\int \sum l d\omega \left( \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \right) = -\frac{d}{dt} \int \sum l K P d\omega - 4\pi \int \sum l p d\omega$$

pertanto

$$-\int \sum \alpha dx = 4\pi \int \sum l u d\omega = \frac{d}{dt} \int \sum l K P d\omega + 4\pi \int \sum l p d\omega$$

Si noti che se la nostra superficie  $S$  è posta in un dielettrico, la corrente di conduzione è zero e la relazione (12) diventa,

$$\int \sum \alpha dx = \frac{d}{dt} \int \sum l K P d\omega$$

### 299. Definizione dell'elettricità e del magnetismo secondo Hertz

Ecco come Hertz definisce le quantità di elettricità e magnetismo che si trovano all'interno di un volume  $T$  limitato da una superficie  $S$ .

Hertz distingue dapprima il magnetismo libero e magnetismo vero, poi l'elettricità libera e l'elettricità vera.

La quantità di *magnetismo libero* all'interno del volume  $T$  è, per definizione, il flusso di forza magnetica totale attraverso la superficie  $S$  che limita il volume  $T$ , diviso per  $4\pi$ .

Il *magnetismo reale*, è definito allo stesso modo, solo che invece di considerare il flusso di forza magnetica si considera il flusso di induzione magnetica. Si può quindi scrivere simbolicamente

$$\begin{cases} \text{magnetismo libero} = & \frac{\text{flusso di forza magnetica}}{4\pi} \\ \text{magnetismo vero} = & \frac{\text{flusso di induzione magnetica}}{4\pi} \end{cases}$$

L'elettricità libera è il flusso di forza elettrica divisa per  $4\pi$ ; solo per come prenderò le unità elettromagnetiche, dobbiamo introdurre anche il fattore  $K_0$  (valore di  $K$  nel vuoto).

La *elettricità vera* è il flusso di induzione elettrica diviso per  $4\pi$ .

Quindi si ha ancora,

$$\begin{cases} \text{elettricità libera} = & \frac{\text{flusso di forza elettrica}}{4\pi} >< K_0 \\ \text{elettricità vera} = & \frac{\text{flusso di induzione elettrica}}{4\pi} \end{cases}$$

Vediamo quindi che, per Hertz, ciò che chiamiamo elettricità e magnetismo non è un fluido, non è qualcosa di materiale, ma piuttosto un'espressione puramente analitica: un integrale; ciò che realmente esiste è la forza elettrica e la forza magnetica. Hertz suppone che il campo elettrico e il campo magnetico siano ben determinati quando si dà in ogni punto il valore del vettore chiamato forza elettrica o forza magnetica<sup>35</sup>.

**300.** Traduciamo *analiticamente* le definizioni precedenti. Cominciamo con il magnetismo libero.

*Magnetismo libero.* — Consideriamo un elemento di volume  $d\tau$ , limitato da una superficie  $S$ . Il flusso di forza magnetica attraverso  $S$  vale

$$\left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) d\tau$$

<sup>35</sup>Hertz indica due casi in cui la conoscenza dei due vettori  $(P, Q, R)$ ;  $(\alpha, \beta, \gamma)$  non basta per determinare tutte le proprietà dei vettori del campo magnetico; è il caso del *magnetismo permanente* e il caso della *dispersione*. (Si veda POINCARÉ, *Oscillations électriques*, p. 7. G. Carré, editore).

Indichiamo con  $M$  la densità del magnetismo libero; abbiamo per tale densità, per definizione

$$4\pi M = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \sum \frac{d\alpha}{dx} \quad (13)$$

Secondo Maxwell,

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

e

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A \\ b = \beta + 4\pi B \\ c = \gamma + 4\pi C \end{cases}$$

di conseguenza

$$\sum \frac{da}{dx} = \sum \frac{d\alpha}{dx} + 4\pi \sum \frac{dA}{dx} = 0$$

Pertanto,

$$M = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{d\alpha}{dx} = - \sum \frac{dA}{dx} \quad (14)$$

è la densità del magnetismo *libero*.

*Magnetismo vero*. Si ha, chiamando  $M$ , la densità del magnetismo vero

$$4\pi M_1 = \sum \frac{d\mu\alpha}{dx} \quad (15)$$

se poniamo,

$$\begin{aligned} a &= \mu\alpha + 4\pi A_0 \\ b &= \mu\beta + 4\pi B_0 \\ c &= \mu\gamma + 4\pi C_0 \end{aligned}$$

di modo che  $A_0, B_0, C_0$  siano le componenti della magnetizzazione *permanente*, si avrà

$$\sum \frac{da}{dx} = 0 = \sum \frac{d\mu\alpha}{dx} + 4\pi \sum \frac{dA_0}{dx}$$

di conseguenza

$$M_1 = - \sum \frac{dA_0}{dx} \quad (16)$$

La densità del magnetismo vero ha quindi la stessa espressione del magnetismo libero, tranne che le componenti della magnetizzazione totale sono sostituite dalle componenti della magnetizzazione permanente.

Il magnetismo libero è quindi il magnetismo totale, sia permanente che indotto; il magnetismo vero è il magnetismo permanente.

*Elettricità libera*. È quella che viene trasportata per conduzione o convezione sulla superficie dei conduttori; si ha, designando la densità con  $\rho$ ,

$$4\pi\rho = \sum \frac{dKP}{dx}$$

ora

$$\frac{KP}{4\pi} = f \dots\dots$$

pertanto

$$\rho = \sum \frac{df}{dx} \quad (17)$$

relazione di Maxwell.

*Elettricità libera.* Chiamando  $\rho_1$  la densità dell'elettricità libera, si ha

$$4\pi\rho_1 = \sum \frac{dK_0P}{dx}$$

da cui

$$\rho_1 = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{dK_0P}{dx} \quad (18)$$

Che differenza c'è dal punto di vista fisico tra queste due quantità di elettricità? Per comprenderla consideriamo un conduttore elettrizzato e un dielettrico separato dal conduttore da una lamina d'aria. C'è elettricità vera sulla superficie del conduttore; ma non ce n'è sulla superficie del dielettrico. Per quanto riguarda l'elettricità libera, esiste sulla superficie del conduttore e ha la stessa densità dell'elettricità vera, ma esiste anche elettricità libera sulla superficie del dielettrico. È dovuta alle cariche "apparenti" prodotte dalla polarizzazione del dielettrico.

Se ora il conduttore è in contatto con il dielettrico che, per esempio, lo ricoprirà completamente, ci sarà elettricità vera sulla superficie del conduttore, ma non ve ne sarà sulla superficie esterna del dielettrico; ci sarà elettricità libera sulla superficie esterna del dielettrico; ve ne sarà anche sulla superficie di separazione del conduttore e del dielettrico, ma la densità dell'elettricità libera e quella dell'elettricità vera su questa superficie non saranno le stesse.

### 301. Osservazione

Supponiamo di avere una superficie  $S$  chiusa e posta nel vuoto; supponiamo che all'interno di essa si possano trovare corpi conduttori, dielettrici o corpi magnetici. *In tutti i punti della superficie  $S$  si ha*

$$\mu = 1 \quad K = K_0$$

quindi su questa superficie vi è uguaglianza tra la forza magnetica e l'induzione magnetica; quanto alla forza e all'induzione elettrica, esse sono uguali circa al fattore  $K_0$ . I flussi corrispondenti saranno pertanto uguali a due a due: ne consegue che la quantità totale di elettricità vera è uguale alla quantità totale di elettricità libera e che la quantità totale di magnetismo libero è pari alla quantità totale di magnetismo vero. Solo all'interno della superficie si potrà avere una distribuzione diversa.

## Verifica del principio della conservazione del magnetismo e del principio della conservazione dell'elettricità.

**302.** Partiamo dal principio di conservazione del magnetismo e facciamo questa verifica partendo dal magnetismo vero.

Consideriamo una superficie chiusa  $S$ . Si tratta di dimostrare che il flusso magnetico attraverso questa superficie è costante.

Stacciamo da  $S$  un elemento superficiale  $d\omega$ . La restante superficie  $S'$  sarà così aperta. Il flusso di induzione attraverso la superficie totale  $S$  differisce infinitamente poco dal flusso di induzione attraverso  $S'$ . Si tratta quindi di dimostrare che il flusso attraverso  $S'$  è costante e che di conseguenza la sua derivata è nulla.



Ora abbiamo

$$\int \sum P dx = \frac{d}{dt} \int \sum \mu l \alpha d\omega$$

il primo integrale essendo esteso alla curva C delimitante l'elemento di superficie  $d\omega$  e il secondo alla superficie S'; questa curva è infinitamente piccola data la piccolezza di  $d\omega$ ; l'integrale di linea in questione si può quindi considerare zero e quindi rimane,

$$\frac{d}{dt} \int \sum \mu l \alpha d\omega = 0$$

e di conseguenza

$$\int \sum \mu l \alpha d\omega = \text{cost}$$

**303.** Per l'elettricità, si determinerà allo stessa maniera

$$\sum \alpha dx = 0$$

essendo l'integrale esteso alla curva C.

Tenendo conto di (12)

$$4\pi \sum l p d\omega + \frac{d}{dt} \int \sum l K P d\omega = 0$$

essendo gli integrali estesi alla superficie S' o alla superficie chiusa S che ne differisce infinitamente poco.

Ora, il primo integrale rappresenta la quantità di elettricità che lascia la superficie S per conduzione; il secondo integrale rappresenta il flusso di induzione elettrica attraverso la superficie S: questo è infatti il principio di *conservazione dell'elettricità*.

## Verifica del principio della conservazione dell'energia

**304.** Le equazioni di Hertz sono conformi al principio di conservazione dell'energia? Per verificarlo, vediamo di cosa è fatta questa energia. Hertz ammette che l'energia totale è composta dall'energia elettrica e dall'energia magnetica. Secondo Maxwell l'energia elettrica ha l'espressione

$$\int \frac{2\pi d\tau}{K} (f^2 + g^2 + h^2)$$

che scriveremo sintetizzando

$$\int \frac{2\pi d\tau}{K} \sum f^2 \quad (19)$$

essendo l'integrale esteso all'intero spazio.

Secondo Hertz l'energia elettrica vale

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} \sum K P^2 \quad (20)$$

Queste due espressioni (19) e (20) sono equivalenti; è sufficiente, infatti, ricordare che il vettore  $(KP, KQ, KR)$  di Hertz è uguale al vettore  $(f, g, h)$  di Maxwell al fattore  $4\pi$ .

Ma per l'energia magnetica non è più la stessa cosa. In questo caso non solo non c'è più accordo tra la formula data da Maxwell e quella data da Hertz, ma anche i volumi I e II del *Trattato classico* di Maxwell non concordano tra loro su questo punto.

Così Maxwell nel volume I del suo trattato, quando tratta dei magneti senza parlare delle correnti, dà l'espressione dell'energia elettromagnetica

$$- \int (A\alpha + B\beta + C\gamma) \frac{d\tau}{2} = - \int \frac{d\tau}{2} \sum A\alpha \quad (21)$$

l'integrazione essendo estesa a tutti gli elementi di volume  $d\tau$  dello spazio.

Quando si tratta delle correnti dà la seguente espressione,

$$\int (a\alpha + b\beta + c\gamma) \frac{d\tau}{8\pi} = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum a\alpha \quad (22)$$

Tuttavia è facile vedere che queste due espressioni di Maxwell non sono compatibili tra loro. Infatti, se non ci sono correnti ma solo magneti, la seconda espressione di Maxwell è nulla. Mettiamoci in questo caso. Si ha quindi,

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} \sum a\alpha = 0$$

Ora,

$$a = \alpha + 4\pi A, \dots$$

pertanto

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} \sum a\alpha = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 + 4\pi \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum A\alpha = 0$$

da cui

$$- \int \frac{d\tau}{2} \sum A\alpha = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 \quad (23)$$

Ora il primo membro di questa relazione rappresenta la prima espressione dell'energia elettromagnetica di Maxwell. Si vede quindi che queste due espressioni di Maxwell sono del tutto inammissibili.

Hertz dà come espressione dell'energia magnetica la formula seguente,

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \mu\alpha^2 \quad (24)$$

Si nota facilmente che questa espressione è identica a quella di Maxwell (22) quando *non esiste magnetismo permanente* ( $A_0 = B_0 = C_0 = 0$ ).

Se c'è solo magnetismo permanente e nessun magnetismo indotto ( $\mu = 1$ ), l'espressione di Hertz si riduce a

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2$$

identica alla (21) di Maxwell (dalla relazione (23) introdotta).

**305.** Adottiamo l'espressione di Hertz. Hertz dà come espressione dell'energia totale sia elettrica che magnetica la seguente,

$$J = \int \frac{d\tau}{8\pi} \left[ \sum KP^2 + \sum \mu\alpha^2 \right] \quad (25)$$

da cui, differenziando rispetto a  $t$ ,

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[ \sum P \frac{dKP}{dt} + \sum \alpha \frac{d\mu\alpha}{dt} \right]$$

Sostituiamo in questa relazione  $\frac{dKP}{dt}$  e  $\frac{d\mu\alpha}{dt}$  con i loro valori ricavati dalle equazioni (I) e (II) di Hertz, si ha

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum \left[ P \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + \alpha \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) \right] - \int \sum Ppd\tau \quad (26)$$

Dico che il primo integrale del secondo membro è nullo. Infatti, osserviamo che questo integrale si può scrivere,

$$\int \frac{d\tau}{4\pi} \sum \frac{d}{dx} (Q\gamma - R\beta) \quad (27)$$

essendo l'integrazione estesa all'intero spazio.

D'altra parte sappiamo che, essendo  $U$  una funzione qualunque, si ha

$$\int \frac{dU}{dx} d\tau = 0$$

poiché tutte le funzioni si annullano all'infinito e i nostri integrali sono estesi all'intero spazio. Si ha quindi,

$$\int \frac{dU}{dx} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dx} dx = 0$$

ne risulta che l'integrale (27) e di conseguenza il primo integrale del secondo membro della (26) è nullo.

La relazione (26) diviene pertanto

$$\frac{dJ}{dt} = - \int \sum Ppd\tau \quad (28)$$

Qual è il significato di questa equazione? Prendiamo l'asse  $x$  parallelo alla direzione della corrente nell'elemento  $d\tau$  e prendiamo come elemento di volume un cilindretto di sezione  $d\sigma$  e lunghezza  $dS$ .

Si ha,

$$d\tau = d\sigma dS$$

la relazione (28) si può quindi scrivere

$$\frac{dJ}{dt} = - \int \sum PdSpd\sigma \quad (29)$$

Ora  $PdS$  esprime la forza elettromotrice; designiamola con  $E$ ; l'altro fattore  $pd\sigma$  esprime l'intensità della corrente; designiamo questa intensità con  $i$ ; la relazione (29) diventa quindi infine,

$$\frac{dJ}{dt} = - \int Ei$$

Ora  $Ei$  rappresenta il calore di Joule; il principio di conservazione dell'energia è quindi verificato dalle equazioni di Hertz. *L'espressione per l'energia magnetica di Hertz è quindi la sola accettabile.*



# Cap. II - Elettrodinamica dei corpi in movimento

Finora ci siamo occupati solo di corpi a riposo: i nostri circuiti non si spostavano. Consideriamo ora il caso di circuiti in movimento. Lo studio dei fenomeni che si verificano in questo caso costituisce l'elettrodinamica dei corpi in movimento.

## 306. Derivate rispetto al tempo

Indichiamo le componenti della velocità della materia con  $\xi, \eta, \zeta$  e sia  $U$  il valore di una funzione in un punto  $M(x, y, z)$ ; cerchiamo la derivata rispetto al tempo di questa funzione.

Si possono presentare due casi:

1° Il punto  $M(x, y, z)$  è fisso;

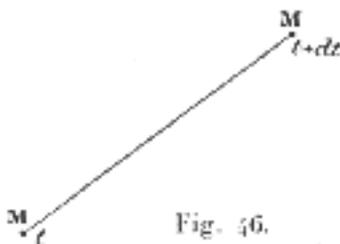
2° Il punto  $M(x, y, z)$  è trasportato nel moto dalla materia.

Si avranno di conseguenza due tipi di derivate rispetto al tempo:

1° La derivata della funzione  $U$  supponendo  $M(x, y, z)$  fisso;

2° La derivata della funzione  $U$  supponendo che  $M(x, y, z)$  è trasportata nel moto della materia.

Nel primo caso, il valore di  $U$  al tempo  $t + dt$  sarà  $U + \frac{dU}{dt} dt$  e, nel secondo caso, sarà  $U + \frac{\partial U}{\partial t} dt$ , indicando con  $\frac{\partial}{\partial t}$  le derivate di una funzione rispetto al tempo quando il punto  $(x, y, z)$  si muove con la materia; - useremo questa convenzione tutte le volte che si dovranno considerare derivate rispetto al tempo.



Calcoliamo ora questa derivata  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Consideriamo pertanto un punto  $M(x, y, z)$ , successivamente al tempo  $t$  e a  $t + dt$ . Le coordinate di questo punto, trasportato nel moto della materia, avranno degli incrementi

$$dx = \xi dt \quad dy = \eta dt \quad dz = \zeta dt$$

e la derivata diventa

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi \frac{dU}{dx} + \eta \frac{dU}{dy} + \zeta \frac{dU}{dz} \quad (1)$$

## 307. Induzione in un circuito in movimento

Consideriamo un vettore qualsiasi  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , una superficie  $S$  delimitata da una curva  $C$  e l'espressione

$$\Phi = \int \sum l \alpha d\omega \quad (2)$$

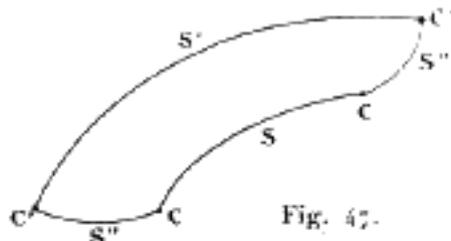
Proponiamoci di valutare la derivata di questa espressione rispetto al tempo.

Per stabilire le idee, supponiamo che il vettore considerato sia la forza magnetica  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ; l'espressione (2) rappresenterà allora il cosiddetto flusso di forza magnetica attraverso la superficie considerata.

Ci sono due modi di considerare la questione.

1° Possiamo supporre che la superficie  $S$  rimanga fissa, ed in questo caso la derivata in questione si scrive  $\frac{d\Phi}{dt}$  (con  $d$ ) secondo la nostra convenzione.

2° Possiamo assumere che, invece, la superficie  $S$ , invece di restare fissa, si muove, spinta nel movimento della materia, e arriva a  $S'$ : in questo caso è la derivata  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  che deve essere considerata.



Mi propongo di valutare questa seconda derivata  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ . Quando  $t$  aumenta e  $dt$  e contemporaneamente la superficie  $S$  è trasportata nel moto della materia e si trova in  $S'$ ,  $\Phi$  subisce allora un incremento rappresentato da

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} dt$$

Questo incremento può essere scomposto in tre parti distinte. Sia  $S''$  una superficie anulare che può essere fatta passare attraverso i circuiti  $CC'$ ,  $C'C'$  che delimitano le superfici  $S$ ,  $S'$ . Le tre parti dell'incremento sono:

1° L'incremento subito nel tempo  $dt$  dal flusso che attraversa la superficie  $S$ . Tale incremento vale

$$\frac{d\Phi}{dt} dt$$

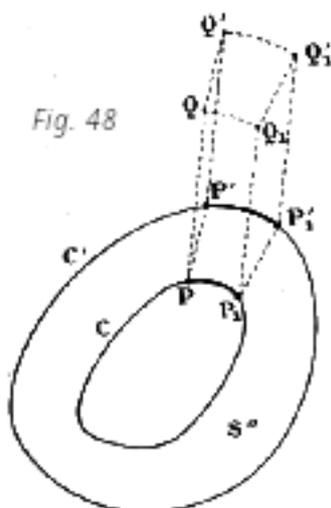
2° Il flusso che attraversa la superficie anulare  $S''$ . Indicherò con  $\delta_1\Phi$  questo incremento;

3° La differenza tra il flusso che attraversa  $S+S''$  e quello che attraversa  $S'$ .

Chiamerò  $\delta_2\Phi$  questa differenza.

Si ha quindi,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} dt = \frac{d\Phi}{dt} dt + \delta_1\Phi + \delta_2\Phi \quad (3)$$



Valutiamo ogni termine del secondo membro separatamente.

Dapprima, per  $\frac{d\Phi}{dt}$ , si ha, differenziando  $\Phi$  rispetto a  $t$ ,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \sum l d\omega \frac{d\alpha}{dt} \quad (4)$$

Calcoliamo ora  $\delta_1\Phi$ .

Sia CC la curva che delimita la superficie S; allo scadere del tempo  $dt$  questa curva arriva a C'C' e se consideriamo due punti PP, delimitanti un arco  $PP_1$  sulla corda C, allo scadere del tempo  $dt$  questo arco sarà in  $P'P'_1$ .

Consideriamo il piccolo quadrilatero  $PP_1P'_1P'$  formato dai due archi  $PP_1$  e  $P'P'_1$  e dalle due piccole rette  $PP'$ ,  $P_1P'_1$ . Questo piccolo quadrilatero è assimilabile a un parallelogramma. Chiamiamo  $d\omega$  la sua area e valutiamo il flusso di forza magnetica attraverso di essa. A questo scopo prendiamo per i vertici del piccolo parallelogramma delle rette PQ,  $P_1Q_1$ ,  $P'Q'$ ,  $P'_1Q'_1$  rappresentanti la forza magnetica in modulo e direzione, e consideriamo il piccolo parallelepipedo così formato. Dico che il volume di questo parallelepipedo rappresenta il flusso desiderato. Infatti

$$vol^e \text{ parall}^o = d\omega \times \text{altezza}$$

e l'altezza è la componente normale della forza magnetica per costruzione.

Il calcolo del flusso cercato si riporta quindi al calcolo del volume del parallelepipedo  $PP_1P'P'_1Q_1Q'_1$ .

Valutiamo questo volume. Osserviamo a tale scopo che  $PP'$  è il cammino percorso nel tempo  $dt$  dal punto P; le tre componenti di questo piccolo cammino sono, indicando con  $\xi, \eta, \zeta$  le componenti della velocità del punto P (che è la stessa della velocità della materia),  $\xi dt, \eta dt, \zeta dt$ .

Il volume del parallelepipedo è quindi

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi dt & \eta dt & \zeta dt \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Per avere il flusso totale bisogna integrare questa espressione, si ha allora

$$\frac{\delta_1\Phi}{dt} = \int \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante presente al secondo membro; indicando con  $X, Y, Z$  le sue misure, viene

$$\begin{aligned} X &= \gamma\eta - \beta\zeta \\ Y &= \alpha\zeta - \gamma\xi \\ Z &= \beta\xi - \alpha\eta \end{aligned}$$

pertanto

$$\frac{\delta_1\Phi}{dt} = \int \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \int \sum X dx$$

dove l'ultimo integrale è esteso al contorno C.

Trasformiamo quest'ultimo integrale con il teorema di Stokes, si ha

$$\frac{\delta_1\Phi}{dt} = \int \sum l d\omega \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) \quad (5)$$

Calcoliamo  $\delta_2\Phi$ .

Abbiamo designato con questo simbolo la differenza dei flussi che attraversano  $S + S''$  e  $S'$ . Notiamo innanzitutto che queste superfici sono limitate dalla stessa curva  $C$ .

Per avere  $\delta_2 \Phi$  consideriamo un elemento di superficie  $d\omega$  di  $S$  e per i diversi punti di questo elemento tracciamo linee di forza; determineremo così dei tubi di forza che taglieranno su  $S'$  un elemento  $d\omega'$ . Qual è il flusso totale che passa attraverso il cilindretto così formato? Se designiamo con  $d\tau$  il volume di questo cilindro infinitamente sottile, questo il flusso vale

$$\left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) d\tau \quad (6)$$

e deriva dall'eccesso del flusso che passa attraverso  $d\omega$  su quello che passa attraverso  $d\omega'$  e dal flusso che attraversa le pareti laterali del cilindro.

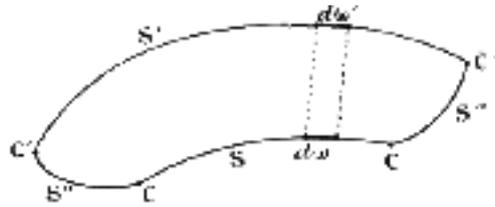


Fig. 49.

Ma notiamo che quest'ultimo è nullo: nessun flusso attraversa le pareti di un tubo di forza. Il flusso totale (6) è quindi la differenza tra il flusso che attraversa  $d\omega'$  e quello che passa per  $d\omega$ : è proprio questa la quantità che volevamo calcolare.

Ma dobbiamo ancora valutare  $d\tau$ . Ma abbiamo nella figura

$$d\tau = H \times d\omega$$

essendo  $H$  l'altezza del piccolo cilindro le cui basi sono  $d\omega$  e  $d\omega'$ , cioè  $AB$  sulla normale a  $S$ .

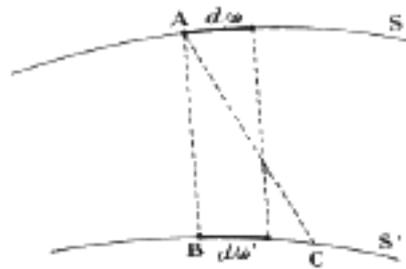


Fig. 50.

Notiamo che il punto  $A$  sulla superficie  $S$ , al tempo  $t$ , appartiene alla superficie  $S'$  al tempo  $t + dt$ : viene in  $C$ , vicino a  $B$ . D'altra parte, si ha

$$\text{proiez. } AB = \text{proiez. } AC + \text{proiez. } CB$$

e siccome  $CB$  è un arco posto su  $S'$ , la proiezione di  $CB$  è un infinitesimo di ordine superiore.

Rimane quindi da valutare la proiezione  $AC$ .

Le tre proiezioni  $AC$  sugli assi sono

$$\xi dt \quad \eta dt \quad \zeta dt$$

di conseguenza

$$\text{proiez. } AB = (l\xi + m\eta + n\zeta) dt$$

Questa è l'altezza del cilindro (assumendo che le due superfici  $S, S'$  siano infinitamente vicine tra loro).

Il valore del volume  $d\tau$  è allora

$$d\tau = (l\xi + m\eta + n\zeta) dt d\omega = d\omega$$

e la (6) diviene

$$\delta_2\Phi = dt d\omega \sum l\xi \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right)$$

o ancora

$$= dt d\omega \sum l\xi \sum \frac{d\alpha}{dx}$$

Integrando questa espressione viene

$$\frac{\delta_2\Phi}{dt} = \int d\omega \sum l\xi \sum \frac{d\alpha}{dx} \quad (7)$$

La relazione (3) si può ora scrivere

$$\frac{\delta\Phi}{dt} = \int \sum l d\omega \frac{d\alpha}{dx} + \sum l d\omega \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + \int \sum l d\omega \xi \frac{d\alpha}{dx}$$

o ancora

$$\frac{\delta\Phi}{dt} = \int \sum l d\omega \left[ \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dY}{dz} + \frac{dZ}{dy} + \xi \sum \frac{d\alpha}{dx} \right] \quad (8)$$

e sostituendo  $X, Y, Z$  con i loro valori

$$\frac{\delta\Phi}{dt} = \int \sum l d\omega \left[ \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d}{dz} (\alpha\zeta - \gamma\xi) - \frac{d}{dy} (\beta\xi - \alpha\eta) + \xi \sum \frac{d\alpha}{dx} \right]$$

Poniamo per semplificare

$$\begin{cases} [\alpha] = \frac{d}{dy} (\beta\xi - \alpha\eta) - \frac{d}{dz} (\alpha\zeta - \gamma\xi) - \xi \sum \frac{d\alpha}{dx} \\ [\beta] = \frac{d}{dz} (\gamma\eta - \beta\zeta) - \frac{d}{dx} (\beta\xi - \alpha\eta) - \eta \sum \frac{d\alpha}{dx} \\ [\gamma] = \frac{d}{dx} (\alpha\zeta - \gamma\xi) - \frac{d}{dy} (\gamma\eta - \beta\zeta) - \zeta \sum \frac{d\alpha}{dx} \end{cases} \quad (9)$$

la relazione in  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  diviene

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int \sum l d\omega \left( \frac{d\alpha}{dt} - [\alpha] \right) \quad (10)$$

Questa è la formula che volevamo stabilire.

Le considerazioni precedenti si applicano a un qualsiasi vettore: dovremo solo sostituire nella (10) il vettore  $(\alpha, \beta, \gamma)$  con un vettore qualsiasi; si avranno così espressioni analoghe a  $[\alpha], [\beta], [\gamma]$  che dedurremo dalle relazioni (9) sostituendo al vettore  $\alpha$  il vettore considerato.

### 308. Teorema

Ci proponiamo di dimostrare ancora il teorema seguente che ci sarà utile in seguito.

Prendiamo un vettore qualunque -  $(\alpha, \beta, \gamma)$  per precisare le idee - e consideriamo il valore assoluto di questo vettore, valore che indicherò con  $N$  di modo che

$$N^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

dico che

$$N \frac{\partial N}{\partial t} = \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \sum \alpha [\alpha]$$

Per dimostrare questa relazione, consideriamo un qualsiasi elemento di superficie  $d\omega$  ed esprimiamo il flusso che attraversa tale elemento.

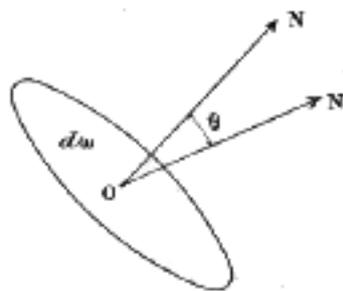


Fig. 51.

Sia  $N'$  la normale a questo elemento e indichiamo con  $\theta$  l'angolo che il vettore  $(\alpha, \beta, \gamma)$  forma con questa normale.

Il flusso in questione vale allora

$$\Phi = N \cos \theta d\omega$$

Calcoliamo  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Supponiamo per questo che si tratti di un corpo solido; in questo caso se  $\xi, \eta, \zeta$  sono le componenti della velocità della materia, esse soddisferanno una certa relazione la quale esprimerà che il corpo solido si muove senza deformarsi, vale a dire che si avrà,

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} = 0$$

Formiamo  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Viene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} \cos \theta d\omega - N \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Supponiamo che all'istante  $t$  il vettore  $N$  sia perpendicolare a  $d\omega$ ; si ha allora

$$\theta = 0 \quad \cos \theta = 1 \quad \sin \theta = 0$$

e la relazione precedente diviene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} d\omega$$

Questa nuova espressione di  $\partial \Phi$  deve essere uguale a quella trovata in precedenza (10). Identificando queste due espressioni viene

$$\frac{\partial N}{\partial t} d\omega = d\omega \sum l \left( \frac{d\alpha}{dt} - [\alpha] \right)$$

moltiplicando questa relazione per  $N$  e osservando che

$$lN = \alpha \quad mN = \beta \quad nN = \gamma$$

si ha infine

$$N \frac{\partial N}{\partial t} = \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \sum \alpha [\alpha] \quad (11)$$

questa è la relazione annunciata. Ma non dimentichiamo che *questa dimostrazione presuppone che l'elemento di superficie  $d\omega$  appartenga ad un corpo solido.*

### 309. Equazioni fondamentali di Hertz

Stabilite queste premesse, vediamo come fa Hertz a trovare le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica dei corpi in movimento.

Per fare ciò, ricordiamo le leggi fondamentali che abbiamo trovato per i corpi a riposo.

Consideriamo una superficie  $S$  limitata da una curva  $C$ .

*Prima legge.* L'integrale di linea della forza elettrica, esteso alla curva  $C$ , è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica che attraversa la superficie  $S$  delimitata dal contorno  $C$ , cioè

$$\int \sum P dx = \frac{d}{dt} \int \sum l_{\mu\alpha} d\omega$$

Come va interpretata questa legge per i corpi in movimento? Si deve supporre che la superficie  $S$  sia fissa o guidata nel movimento della materia? Questa questione è risolta dall'esperienza, la quale dimostra infatti che si deve la superficie  $S$  trascinata nel movimento della materia.

È così che un circuito in movimento in un campo invariabile è sede di correnti di induzione. Non insisterò su questi fatti sperimentali, ammetterò solo la conclusione. È quindi la derivata  $\frac{\partial}{\partial t}$  che si deve considerare per i corpi in movimento.

**Prima legge fondamentale.** — Da quanto precede consegue che:

*L'integrale di linea della forza elettrica, esteso al contorno  $C$ , è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica che attraversa la superficie  $S$  delimitata dal contorno  $C$ , assumendo tale superficie come trascinata nel movimento della materia.*

L'espressione analitica di questa legge è la seguente,

$$\int \sum P dx = \frac{\partial}{\partial t} \int \sum l_{\mu\alpha} d\omega \quad (12)$$

Trasformiamo questa espressione. Il teorema di Stokes ci dà per il primo integrale,

$$\int \sum l_{\mu} \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right)$$

Per quanto riguarda il secondo membro, trasformiamolo applicando il teorema che abbiamo dimostrato sopra (formula 10) e che si applica a un vettore qualsiasi.

Abbiamo per il vettore  $(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \sum l d\omega \left( \frac{d\alpha}{dt} - [\alpha] \right)$$

per il vettore  $(\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma)$  che ora ci interessa, avremo quindi,

$$\int \sum l d\omega \left( \frac{d\mu\alpha}{dt} - [\mu\alpha] \right)$$

La relazione (12) si può allora scrivere,

$$\int \sum l_{\mu} \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) = \int \sum l d\omega \left( \frac{d\mu\alpha}{dt} - [\mu\alpha] \right)$$

e identificando i coefficienti di  $ld\omega, md\omega, nd\omega$  dei due membri di questa relazione, viene

$$\begin{cases} \frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\mu\alpha] \\ \frac{d\mu\beta}{dt} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} + [\mu\beta] \\ \frac{d\mu\gamma}{dt} = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} + [\mu\gamma] \end{cases} \quad (I)$$

queste sono le equazioni fondamentali di Hertz per i corpi in movimento.

Ricordiamo che  $[\mu\alpha]$ ,  $[\mu\beta]$ ,  $[\mu\gamma]$  valgono

$$\begin{cases} [\mu\alpha] = \frac{d}{dy}\mu(\beta\xi - \alpha\eta) - \frac{d}{dz}\mu(\alpha\zeta - \gamma\xi) - \xi \sum \frac{d\mu\alpha}{dx} \\ [\mu\beta] = \frac{d}{dz}\mu(\gamma\eta - \beta\zeta) - \frac{d}{dx}\mu(\beta\xi - \alpha\eta) - \eta \sum \frac{d\mu\alpha}{dx} \\ [\mu\gamma] = \frac{d}{dx}\mu(\alpha\zeta - \gamma\xi) - \frac{d}{dy}\mu(\gamma\eta - \beta\zeta) - \zeta \sum \frac{d\mu\alpha}{dx} \end{cases}$$

**310.** Maxwell ragiona allo stesso modo, solo invece di considerare il vettore  $(\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma)$ , considera il vettore  $(a, b, c)$  che rappresenta l'induzione magnetica secondo lui; ottiene così,

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\alpha] \\ \frac{db}{dt} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} + [b] \\ \frac{dc}{dt} = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} + [c] \end{cases} \quad (13)$$

con  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  che valgono

$$\begin{cases} [a] = \frac{d}{dy}(b\xi - a\eta) - \frac{d}{dz}(a\zeta - c\xi) \\ [b] = \frac{d}{dz}(c\eta - b\zeta) - \frac{d}{dx}(b\xi - a\eta) \\ [c] = \frac{d}{dx}(a\zeta - c\xi) - \frac{d}{dy}(c\eta - b\zeta) \end{cases}$$

poiché i termini  $\xi \sum \frac{da}{dx}$ ,  $\eta \sum \frac{db}{dx}$ ,  $\zeta \sum \frac{dc}{dx}$  sono nulli se si considera la relazione di Maxwell

$$\sum \frac{da}{dx} = 0$$

In queste equazioni (13) di Maxwell, i primi due termini dei secondi membri esprimono l'induzione magnetica dovuta alla variazione del campo e il terzo termine  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  esprime l'induzione magnetica dovuta al movimento del circuito.

**311.** Esiste identità tra le equazioni (I) di Hertz e le equazioni (13) di Maxwell? Osserviamo che se i due sistemi di equazioni appaiono avere una certa analogia quanto alla loro forma, non è più così per i vettori che vi appaiono: il vettore di Hertz ha per componenti  $(\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma)$ , mentre quelli di Maxwell ha per componenti

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A \\ b &= \beta + 4\pi B \\ c &= \gamma + 4\pi C \end{aligned}$$

Perché vi è identità tra questi due vettori, serve che

$$a = \mu\alpha \quad b = \mu\beta \quad c = \mu\gamma$$

cioè che esiste identità tra questi due vettori solo nei corpi *privi di magnetismo permanente*; avendo quindi solo *magnetismo indotto*.

Tuttavia, in determinate condizioni, le equazioni (I) e (13) possono essere ridotte l'una all'altra.

Poniamo infatti,

$$\begin{aligned} a &= \mu\alpha + 4\pi A_0 \\ b &= \mu\beta + 4\pi B_0 \\ c &= \mu\gamma + 4\pi C_0 \end{aligned}$$

essendo  $A_0, B_0, C_0$  le componenti della magnetizzazione permanente. Si ricava da queste equazioni

$$\begin{cases} [a] = [\mu\alpha] + 4\pi[A_0] \\ [b] = [\mu\beta] + 4\pi[B_0] \\ [c] = [\mu\gamma] + 4\pi[C_0] \end{cases} \quad (14)$$

poiché  $\alpha, \beta, \gamma$  entrano linearmente in  $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ .

Ciò posto, sottraiamo membro a membro le relazioni (13) dalle (I); si ha

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} - \frac{da}{dt} = [\mu\alpha] - [a] \quad (15)$$

e altre due equazioni simmetriche di queste che non scrivo.

Queste equazioni devono essere soddisfatte perché ci sia identità tra queste equazioni di Hertz e quelle di Maxwell.

Ricaviamo  $[\mu\alpha] - [a]$  dalle relazioni (14) e sostituiamo il suo valore nelle (15), si ha

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} - \frac{da}{dt} = -4\pi[A_0]$$

sostituendo  $a$  con il suo valore

$$a = \mu\alpha + 4\pi[A_0]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_0}{dt} = [A_0] \\ \frac{dB_0}{dt} = [B_0] \\ \frac{dC_0}{dt} = [C_0] \end{array} \right. \quad (16)$$

le ultime due di queste equazioni essendo ottenute come la prima.

Ci sarà quindi identità tra le equazioni di Hertz e quelle di Maxwell se valgono le equazioni (16).

Supponiamo ora che i magneti permanenti siano corpi solidi che, spostandosi, trasportano la loro magnetizzazione permanente. Dico che, in quest'ultimo caso, le relazioni (16) sono legittime. Consideriamo infatti, in un solido magnetizzato che porta con sé la sua magnetizzazione permanente, una qualsiasi superficie e valutiamo il flusso ( $\Phi$ ) che attraversa tale superficie e che corrisponde al vettore  $(A_0, B_0, C_0)$ . La magnetizzazione permanente essendo guidata nel suo insieme, si ha allora

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Noi abbiamo, per il vettore  $(A_0, B_0, C_0)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int \sum l d\omega \left( \frac{dA_0}{dt} - [A_0] \right)$$

pertanto

$$\int \sum l d\omega \left( \frac{dA_0}{dt} - [A_0] \right) = 0$$

e di conseguenza,

$$\begin{array}{l} \frac{dA_0}{dt} = [A_0] \\ \frac{dB_0}{dt} = [B_0] \\ \frac{dC_0}{dt} = [C_0] \end{array}$$

come si voleva dimostrare.

Queste sono infatti le relazioni (16) che otteniamo. Esiste quindi identità tra le relazioni (I) di Hertz e le relazioni (13) di Maxwell, a condizione che la magnetizzazione sia permanente e che non venga modificata dal movimento del magnete. Questi rapporti cesserebbero di essere equivalenti se i corpi magnetizzati non conservassero la loro magnetizzazione permanente, se ad esempio fossero smagnetizzati dal calore. Se i corpi magnetici non sono corpi solidi, ma si muovono deformandosi, non ci sarà equivalenza nemmeno tra i due sistemi di equazioni, a meno di fare ipotesi particolari sull'influenza di queste deformazioni sulla magnetizzazione.

Diamo un esempio di un caso in cui i due sistemi di equazioni portano a conclusioni contraddittorie. Consideriamo un toroide d'acciaio magnetizzato uniformemente; non ha alcuna azione su un pezzo di ferro posto all'esterno, ma la sua magnetizzazione non è nulla: possiamo infatti farla apparire tagliando il toroide in due parti che si comporteranno come due calamite; d'altra parte, non c'è vero magnetismo all'interno del toro.

Modifichiamo ora la sua magnetizzazione riscaldandolo dopo averlo circondato con un filo conduttore avvolto ad elica. Cosa succederà? Le relazioni di Maxwell annunciano una corrente di induzione nel filo; secondo le relazioni di Hertz nel filo non devono esserci correnti di induzione. Otteniamo quindi conclusioni contraddittorie. Forse nessuna delle due formule è applicabile ad un caso del genere.

### 312. Seconda legge fondamentale

Abbiamo trovato per i corpi a riposo la seguente relazione

$$-\int \sum \alpha dx = 4\pi \int \sum lpd\omega + \frac{d}{dt} \int \sum lKPd\omega \quad (17)$$

ovvero il primo membro rappresenta la linea integrale della forza magnetica, il primo termine del secondo membro esprime la quantità di elettricità che attraversa la superficie S per conduzione e l'ultimo termine del secondo membro rappresenta il flusso di induzione elettrica che attraversa questa stessa superficie.

Questa relazione è ancora valida per i corpi in movimento? In altre parole, dovremmo supporre che la superficie S sia fissa o guidata nel movimento della materia?

Per analogia con il caso precedente, dove abbiamo considerato il flusso di induzione magnetica, Hertz ammette che si deve considerare la superficie S come trascinata nel movimento della materia.

Toccherà quindi alle verifiche sperimentali confermare o smentire questa ipotesi di Hertz. Vedremo più avanti che molti esperimenti confermano le conseguenze che traiamo dalle formule di Hertz costruite su questa ipotesi.

La relazione (17) diventa quindi per i corpi in movimento,

$$-\int \sum \alpha dx = 4\pi \int \sum lpd\omega + \frac{\partial}{\partial t} \int \sum lKPd\omega \quad (18)$$

e costituisce la seconda legge fondamentale dell'elettrodinamica dei corpi in movimento.

### 313. Corrente totale di Hertz

Trasformiamo questa relazione (18). Il primo membro diviene applicando il teorema di Stokes

$$-\int \sum \alpha dx = \int \sum ld\omega \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right)$$

D'altra parte, l'ultimo termine del secondo membro vale, per il teorema precedentemente dimostrato

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \sum lKPd\omega = \int \sum ld\omega \left( \frac{dKP}{dt} - [KP] \right)$$

La relazione (18) diviene quindi

$$\int \sum ld\omega \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) = 4\pi \int \sum lpd\omega + \int \sum ld\omega \left( \frac{dKP}{dt} - [KP] \right)$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p + \frac{dKP}{dt} - [KP] \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q + \frac{dKQ}{dt} - [KQ] \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r + \frac{dKR}{dt} - [KR] \end{cases} \quad (19)$$

Poniamo ora

$$\begin{cases} 4\pi p + \frac{dKP}{dt} - [KP] = 4\pi u \\ 4\pi q + \frac{dKQ}{dt} - [KQ] = 4\pi v \\ 4\pi r + \frac{dKR}{dt} - [KR] = 4\pi w \end{cases} \quad (20)$$

$u, v, w$  sono le componenti della corrente totale (corrente capace di manifestarsi come campo). Le relazioni (19) diventano così,

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w \end{cases}$$

Queste equazioni sono analoghe alle equazioni di Maxwell (19), per i corpi a riposo (n. 57), tranne che  $u, v, w$  hanno valori diversi da quelli appartenenti alle stesse lettere delle equazioni (19).

Vediamo come differiscono questi valori.

Dalle equazioni (20) si ricava

$$\begin{cases} u = p + \frac{1}{4\pi} \frac{dKP}{dt} - \frac{1}{4\pi} [KP] \\ v = q + \frac{1}{4\pi} \frac{dKQ}{dt} - \frac{1}{4\pi} [KQ] \\ w = r + \frac{1}{4\pi} \frac{dKR}{dt} - \frac{1}{4\pi} [KR] \end{cases}$$

o

$$\frac{KP}{4\pi} = f \dots$$

si ha quindi

$$\begin{cases} u = p + \frac{df}{dt} - [f] \\ v = q + \frac{dg}{dt} - [g] \\ w = r + \frac{dh}{dt} - [h] \end{cases} \quad (21)$$

dove  $[f], [g], [h]$  valgono

$$\begin{cases} [f] = \frac{d}{dy} (g\xi - f\eta) - \frac{d}{dz} (f\zeta - h\xi) - \xi \sum \frac{df}{dx} \\ [g] = \frac{d}{dz} (h\eta - g\zeta) - \frac{d}{dx} (g\xi - f\eta) - \eta \sum \frac{df}{dx} \\ [h] = \frac{d}{dx} (f\zeta - h\xi) - \frac{d}{dy} (h\eta - g\zeta) - \zeta \sum \frac{df}{dx} \end{cases}$$

Confrontiamo le relazioni (21) con le (5) di Maxwell (n. 293), si vede che nel caso presente si hanno termini complementari che non compaiono nelle analoghe relazioni di Maxwell. Questi sono i termini  $[f], [g], [h]$ .

**314.** Quale è il significato di questi termini? Per vederlo, esplicitiamo dapprima tali termini, ponendo

$$\begin{cases} X = h\eta - g\zeta \\ Y = f\zeta - h\xi \\ Z = g\xi - f\eta \end{cases}$$

d'altra parte abbiamo

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

dove  $\rho$  è la densità dell'elettricità.

Le relazioni (21) diventano allora

$$\begin{cases} u = p + \frac{df}{dt} + \rho\xi + \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) \\ v = q + \frac{dg}{dt} + \rho\eta + \left( \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) \\ w = r + \frac{dh}{dt} + \rho\zeta + \left( \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) \end{cases} \quad (22)$$

Queste relazioni ci indicano che la corrente totale si compone di quattro parti:

1° La corrente di conduzione  $(p, q, r)$

2° La corrente di spostamento  $\left( \frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt} \right)$

3° La corrente di convezione  $(\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta)$

4° La corrente di convezione  $\left[ \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}, \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right]$

Indichiamo brevemente come l'esperimento è riuscito a rilevare l'esistenza delle ultime due correnti.

Rowland<sup>36</sup> ha riconosciuto che il trasporto meccanico di una carica elettrostatica è equivalente ad una corrente diretta nella direzione del movimento: Utilizzando un disco isolante elettrificato, e facendolo ruotare con grande velocità osservò la creazione di un campo magnetico.

Supponiamo ora che un dielettrico si sposti in un campo elettrico costante ma non uniforme; supponiamo, ad esempio, un disco di ebanite mobile attorno ad un asse verticale e un sistema di quattro settori metallici che ricoprono completamente il disco; elettrizzando i settori in diagonale, come mostrato in figura, si ottengono due campi di verso contrario: quello di sinistra è diretto dall'alto verso il basso e quello di destra è diretto dal basso verso l'alto. Il campo in un punto qualunque dello spazio sarà invariabile, ma il disco mosso rotante attraverserà successivamente regioni dove il campo avrà valori uguali e segni opposti: la polarizzazione del dielettrico subirà rapide variazioni e il risultato sarà una corrente che può essere dimostrata da un galvanometro. Questa è la corrente evidenziata da Röntgen<sup>37</sup>.

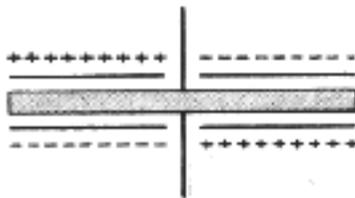


Fig. 5a.

Tuttavia, le condizioni sperimentali sono molto complesse e gli esperimenti eccessivamente delicati e per di più puramente qualitativi, tanto che i risultati ottenuti da Röntgen non possono né confermare né confutare l'accuratezza dell'espressione analitica di questa corrente.

**315.** Interpretiamo questi risultati. — Consideriamo un dielettrico e adottiamo per il momento le idee di Mossotti sui dielettrici [sfere conduttrici piccolissime, disseminate in una sostanza non conduttiva e dotata delle stesse proprietà dell'aria, che si elettrizzano per influenza e che producono così dielettrico di polarizzazione]. Poniamo questo dielettrico in un campo elettrico: si possono presentare due casi.

<sup>36</sup>Gli esperimenti di Rowland furono conosciuti per la prima volta attraverso un rapporto di Helmholtz (Pogg. Ann., vol. CLVIII, p. 487) e successivamente pubblicate sull'*American Journal*, 1878. Vedi anche *Journal de Physique*, 1a serie, t. VI, pag. 29 e ss. VIII, pag. 214. — ROWLAND e HUTCHINSON. *Phil. Mag.*, 5a serie, t. XXVII, pag. 445 e *Journal of Physics*, 2a serie, vol. VII, pag. 530, 1889.

<sup>37</sup>RÖNTGEN. *Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*: 26 febbraio 1885, e *Philosophical Magazine*, maggio 1885.

1° *Il campo è variabile con il tempo.* in questo caso si osserverà una corrente nelle piccole sfere conduttrici: la corrente avrà per componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K-K_0}{K} \frac{df}{dt} \\ \frac{K-K_0}{K} \frac{dg}{dt} \\ \frac{K-K_0}{K} \frac{dh}{dt} \end{array} \right.$$

è la corrente di spostamento di Maxwell a meno del fattore  $\frac{K-K_0}{K}$ .

Ricordiamo che  $K$  indica il potere induttore specifico del dielettrico e  $K_0$  il potere induttore specifico dell'aria. Si noti che se il dielettrico fosse l'aria,  $K$  diventerebbe uguale a  $K_0$  e in questo caso la corrente di spostamento scomparirebbe.

2° Supponiamo ora il dielettrico mobile ed il campo non uniforme, ma non variabile nel tempo. Le sfere Mossotti saranno allora sede di una corrente della forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K-K_0}{K} \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) \\ \frac{K-K_0}{K} \left( \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) \\ \frac{K-K_0}{K} \left( \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) \end{array} \right.$$

è la corrente di Röntgen a meno del fattore  $\frac{K-K_0}{k}$ .

Questa corrente è quindi dovuta ad un cambio di orientazione del dielettrico anche senza variazione del campo elettrico. Così un osservatore invariabilmente legato al dielettrico vedrà variare lo stato di polarizzazione del dielettrico e si produrranno correnti di spostamento riferibili ad esso.

Passiamo ora alle idee di Maxwell sui dielettrici.

Secondo Maxwell tutti i dielettrici sono costituiti allo stesso modo: piccole sfere conduttrici separate da interstizi riempiti da un isolante il cui potere induttore specifico è estremamente piccolo; l'aria, il vuoto, sono costituiti allo stesso modo secondo Maxwell: questa è la differenza tra le idee di Mossotti e le idee di Maxwell sui dielettrici. Il ruolo di dielettrico è qui svolto dagli interstizi, o, per essere più precisi, dal materiale che li riempie e che ha un potere induttore specifico estremamente piccolo. Ponendo quindi  $K_0 = 0$  nelle relazioni precedenti si devono trovare le espressioni delle stesse correnti secondo Maxwell e Hertz. Troviamo, infatti, come componenti della corrente di spostamento

$$\frac{df}{dt} \quad \frac{dg}{dt} \quad \frac{dh}{dt}$$

e come componenti della corrente di Röntgen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \\ \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \\ \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \end{array} \right.$$

È infatti l'espressione della corrente di Röntgen che appare nei secondi membri delle relazioni (12). Avremmo quindi la possibilità di decidere sulla legittimità dell'ipotesi di Maxwell o di quella di Mossotti sui dielettrici. Purtroppo gli esperimenti che Röntgen ha istituito per dimostrare l'esistenza di questa corrente sono insufficienti e per di più puramente qualitativi, come abbiamo già sottolineato: non possono fissarci sull'esatto valore di questa corrente.

Qualunque sia si arriva alla seguente conclusione: la corrente totale è composta da quattro parti,

- 1° *La corrente di conduzione,*
- 2° *La corrente di spostamento,*
- 3° *La corrente di Rowland,*
- 4° *La corrente di Roentgen.*

## Verifica dei principi della conservazione dell'elettricità e della conservazione del magnetismo

**316.** Mostriamo che la teoria di Hertz per l'elettrodinamica dei corpi in movimento è conforme ai principi di conservazione dell'elettricità e del magnetismo. Cominciamo con il principio di conservazione del magnetismo.

*Principio di conservazione del magnetismo.* - Consideriamo una superficie S e supponiamo che sia quasi completamente chiusa e trascinata nel movimento della materia.

Abbiamo la relazione

$$\int \sum P dx = \frac{\partial}{\partial t} \int \sum l \mu \alpha d\omega \quad (1)$$

l'integrale del primo membro essendo esteso alla curva che delimita la superficie S. Nel caso particolare in cui ci siamo posti, questo integrale di linea è molto piccolo, e al limite, quando la superficie S è completamente chiusa è nullo. La relazione (1) diventa quindi in quest'ultimo caso

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \sum l \mu \alpha d\omega = 0$$

ciò significa che

$$\int \sum l \mu \alpha d\omega = \text{cost}$$

Ora questo integrale rappresenta il flusso di induzione magnetica che attraversa la superficie S, e che è, approssimato al fattore costante più vicino, la quantità di vero magnetismo all'interno della superficie in questione (secondo la definizione stessa di vero magnetismo); Questo è proprio il principio della conservazione del magnetismo.

*Principio di conservazione dell'elettricità.* - Abbiamo trovato

$$- \int \sum \alpha dx = 4\pi \int \sum l p d\omega + \frac{\partial}{\partial t} \int \sum l K P d\omega$$

dove l'integrale di linea al primo membro si estende al contorno che delimita la superficie S.

Se questa superficie è chiusa, questo integrale è nullo e rimane

$$\int \sum l p d\omega + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \int \sum l K P d\omega = 0 \quad (2)$$

o  $\frac{1}{4\pi} \int \sum l K P d\omega$  esprime la quantità di elettricità vera (per definizione). Dalla relazione (2) risulta quindi che la variazione della quantità di elettricità vera che si trova all'interno della superficie chiusa trascinata nel movimento della materia è uguale alla quantità di elettricità che attraversa per conduzione la superficie S: questo è il principio di conservazione di elettricità.

### 317. Prima osservazione

Si noti che le equazioni di Hertz non cessano di essere coerenti con il principio di conservazione dell'elettricità se rimuoviamo i termini corrispondenti alla corrente di Roentgen. Per dimostrarlo mi basta mostrare che la quantità di elettricità che attraversa la superficie S sotto forma di correnti Roentgen è nulla. Ora questa quantità di elettricità ha l'espressione

$$\int d\omega \sum l \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right)$$

Dico che questo integrale è nullo. Per vederlo mi basta dimostrare che

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left( \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) = 0$$

Ora, quest'ultima relazione è un'identità ben nota.

Così, quindi,

*Il principio di conservazione dell'elettricità si verifica sia con le equazioni di Hertz propriamente dette, sia con queste equazioni modificate mediante la soppressione dei termini corrispondenti alla corrente di Roentgen.*

### 318. Seconda osservazione

Dico ora che,

*Le equazioni di Hertz mantengono la stessa forma, sia che si adottino assi fissi sia che si adottino assi mobili; In altre parole,*

*Le equazioni di Hertz mantengono la stessa forma nel moto relativo e nel moto assoluto.*

Infatti, le due leggi fondamentali da cui si deducono queste equazioni si possono enunciare così: un integrale semplice preso lungo una certa curva deve essere uguale alla derivata rispetto al tempo di un integrale doppio esteso ad una superficie limitata da questa curva, *essendo questa curva e questa superficie trasportate nel movimento della materia.* È ovvio che tale affermazione è indipendente dalla scelta degli assi e che rimane la stessa, siano essi fissi o mobili. Le equazioni che si deducono devono quindi essere le stesse in entrambi i casi.

Prendiamo in particolare la prima equazione fondamentale di Hertz,

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\mu\alpha]$$

poniamoci nel caso più semplice: supponiamo che tutta la materia sia trasportata in un moto di traslazione. Ciò richiede di supporre che  $\xi, \eta, \zeta$  sono costanti.

Consideriamo ora un sistema di assi mobili trascinati in questo movimento. Dico che incontreremo le stesse equazioni del caso di un corpo a riposo.

Infatti,  $[\alpha]$ , il cui valore è

$$[\alpha] = \frac{d}{dy} (\beta\xi - \alpha\eta) - \frac{d}{dz} (\alpha\zeta - \gamma\xi) - \xi \sum \frac{d\alpha}{dx}$$

diviene in questo caso [dove  $(\xi, \eta, \zeta) = cost$ ],

$$[\alpha] = -\xi \frac{d\alpha}{dx} - \eta \frac{d\alpha}{dy} + \zeta \frac{d\alpha}{dz}$$

e sostituendo nell'equazione Hertz sopra  $[\mu\alpha]$  con il valore che abbiamo appena calcolato, si ottiene,

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} + \xi \frac{d\alpha}{dx} - \eta \frac{d\alpha}{dy} + \zeta \frac{d\alpha}{dz} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}$$

o

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} + \xi \frac{d\alpha}{dx} + \eta \frac{d\alpha}{dy} + \zeta \frac{d\alpha}{dz} = \frac{\partial\mu\alpha}{\partial t}$$

è la derivata rispetto al tempo del flusso di induzione magnetica assumendo che la superficie S sia trascinata nel movimento della materia; quindi viene,

$$\frac{\partial\mu\alpha}{\partial t} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}$$

relazione analoga a quella che abbiamo trovato per l'elettrodinamica dei corpi a riposo (n. 292).

Ne consegue quindi che la derivata  $\frac{\partial}{\partial t}$  ha rispetto al movimento relativo la stessa funzione svolta dalla derivata  $\frac{\partial}{\partial t}$  rispetto al movimento assoluto.

**319. Conseguenze** Quest'ultima osservazione ha due conseguenze: una felice, l'altra sfortunata. La felice conseguenza è che le equazioni di Hertz si conformano al principio dell'uguaglianza di azione e reazione; la sfortunata conseguenza è che queste equazioni non possono spiegare certi fenomeni ottici.

Consideriamo un mezzo trasparente animato da un moto traslatorio e attraversato da onde luminose e consideriamo un osservatore situato in un punto di questo mezzo e trascinato dal moto di questo mezzo. Per questo osservatore tutto avverrà come se l'ambiente fosse a riposo; di conseguenza la velocità relativa, rispetto agli assi mobili invariabilmente legati al mezzo e all'osservatore, sarà la stessa che se il mezzo fosse fermo. Per ottenere la velocità assoluta bisogna sommare la velocità di traslazione degli assi; le onde saranno quindi completamente trascinate nel movimento della materia.

Ora, Fizeau, in un famoso esperimento che effettuò per confermare le idee teoriche di Fresnel, dimostrò che le onde luminose non sono trasportate dall'aria in movimento, ma se sostituiamo l'aria con l'acqua si ha un trascinamento *parziale* delle onde. Le equazioni di Hertz sono quindi impotenti a spiegare questi fenomeni ottici.

Per spiegare questo trascinamento parziale sarebbe necessario modificare un po' le equazioni di Hertz. Ricordiamo ora che le equazioni di Hertz non cessano di essere coerenti con il principio di conservazione dell'elettricità se si eliminano i termini contenenti la corrente di Roentgen; lo abbiamo mostrato poco sopra. Solo così facendo, non mantengono più la stessa forma in entrambi i movimenti: relativo e assoluto; ci si potrebbe allora chiedere se queste equazioni così modificate non potrebbero spiegare il trascinamento parziale delle onde luminose inspiegabile dalle equazioni di Hertz non modificate. Questo è ciò che cercheremo di vedere.

### 320. Trascinamento parziale delle onde luminose

Supponiamo quindi di avere a che fare con un mezzo trasparente e scriviamo le equazioni di Hertz fondamentali per questo mezzo; Abbiamo,

$$\begin{cases} \frac{d\mu\alpha}{dt} - [\mu\alpha] = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \\ \frac{d\mu\beta}{dt} - [\mu\beta] = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \\ \frac{d\mu\gamma}{dt} - [\mu\gamma] = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dKP}{dt} - [KP] = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ \frac{dKQ}{dt} - [KQ] = \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma}{dz} \\ \frac{dKR}{dt} - [KR] = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases}$$

Modifichiamo queste equazioni operando sui termini  $[\mu\alpha] \dots [KP] \dots$  con coefficienti  $H, H_1$  che non determineremo per ora; si avrà

$$\begin{cases} \frac{d\mu\alpha}{dt} - H[\mu\alpha] = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \\ \frac{d\mu\beta}{dt} - H[\mu\beta] = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \\ \frac{d\mu\gamma}{dt} - H[\mu\gamma] = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dKP}{dt} - H_1[KP] = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ \frac{dKQ}{dt} - H_1[KQ] = \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma}{dz} \\ \frac{dKR}{dt} - H_1[KR] = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (2)$$

Supponiamo ora di avere a che fare con onde piane e di prendere il piano dell'onda perpendicolare all'asse  $x$ ; questo farà sì che le nostre funzioni dipendano solo da  $x$  e  $t$ . Supponiamo inoltre che il piano di polarizzazione sia perpendicolare all'asse  $z$ ; questo significa che tutte le quantità che apparivano nelle formule precedenti sono ora nulle, tranne  $\beta$  e  $R$ . Supponiamo infine che  $\mu = 1$ , il che non è lontano dal vero, perché in generale i mezzi trasparenti non sono

magnetici, e scriviamo la seconda equazione del gruppo (1) e la terza del gruppo (2) in queste ipotesi.

Dapprima  $[\mu\beta]$  e  $[KR]$  diventano

$$\begin{aligned} -[\mu\beta] &= \xi \frac{d\beta}{dx} \\ -[KR] &= K\xi \frac{dR}{dx} \end{aligned}$$

Le relazioni in questione diventano pertanto

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dt} + H\xi \frac{d\beta}{dx} = \frac{dR}{dx} \\ K \left( \frac{dR}{dt} + H_1\xi \frac{dR}{dx} \right) = \frac{d\beta}{dx} \end{cases} \quad (3)$$

Chiamiamo  $V$  la velocità delle onde; si ha allora

$$\begin{aligned} \beta &= \psi(x - Vt) \\ R &= \varphi(x - Vt) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dx} &= \psi' \\ \frac{dR}{dx} &= \varphi' \end{aligned}$$

indicando con  $\psi'$  e  $\varphi'$  le derivate di  $\psi(x - Vt)$  e di  $\varphi(x - Vt)$ . Calcoliamo ancora le derivate di  $\beta$  e di  $R$  rispetto al tempo; si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= -V\psi' \\ \frac{dR}{dt} &= -V\varphi' \end{aligned}$$

Le equazioni (3) si scrivono allora,

$$\begin{aligned} -\psi'(V - H\xi) &= \varphi' \\ -K\varphi'(V - H\xi) &= \psi' \end{aligned}$$

Eliminando  $\psi'$  e  $\varphi'$  tra queste due equazioni si trova infine

$$(V - H\xi)(V - H_1\xi) = \frac{1}{K}$$

che si può ancora scrivere

$$\left( V - \frac{H + H_1}{1} \xi \right)^2 - \left( \frac{H - H_1}{2} \right)^2 \xi^2 = \frac{1}{K}$$

Ora  $\xi$  è la velocità della materia, che è molto piccola rispetto a  $V$ ; il termine in  $\xi^2$  è quindi trascurabile rispetto al primo e resta semplicemente

$$\left( V - \frac{H + H_1}{1} \xi \right)^2 = \frac{1}{K}$$

da cui, infine

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{H + H_1}{2} \xi$$

Questa relazione ci mostra che il trascinamento dell'onda non è totale, a causa del termine  $\frac{H+H_1}{2}$ ; è quanto di constata in effetti con l'esperienza; solo affinché questa formula sua in accordo con gli esperimenti di Fizeau bisogna che il coefficiente  $\frac{H+H_1}{2}$  (coefficiente di trascinamento delle onde) valga

$$\frac{H + H_1}{2} = \frac{K - K_0}{K}$$

*Conclusion.* — Affinché le equazioni di Hertz possano rendere conto di alcuni fenomeni ottici, in particolare degli esperimenti di Fizeau, siamo stati obbligati a modificare il termine a  $[\mu\alpha]$  del coefficiente  $K-K_0/K$  e inoltre che nulla giustifica l'introduzione di un tale coefficiente potremmo ancora chiederci se ci si trova in contraddizione con gli esperimenti di induzione magnetica (che dipendono direttamente dal termine in  $[\mu\alpha]$ ; ma non insisto ulteriormente su questa questione, almeno per il momento; ho voluto solo indicare le difficoltà che si devono superare per spiegare questi fenomeni ottici partendo dalla teoria di Hertz; queste sono le difficoltà che la teoria di Lorentz intendeva superare.

### 321. Osservazione

Nel calcolo appena effettuato abbiamo coinvolto il termine in  $[KP]$  e di conseguenza il termine in  $[f]$  di un certo coefficiente  $H_1$ . Ora questo termine in  $[f]$  rappresenta le correnti di Rowland e Roentgen. — Per quanto riguarda la corrente di Roentgen, abbiamo detto in precedenza che il suo valore non può ancora essere fissato; ma non è così con la corrente di Rowland; perché possiamo farci un'idea del suo valore.

I coefficienti  $H$  o  $H_1$  non dovrebbero quindi influenzare l'intero termine  $[KP]$ , ma solo la parte che si riferisce alla corrente di Roentgen, quella che si riferisce alla corrente di Rowland mantenendo il coefficiente 1. Non c'è nulla da cambiare. da questo fatto nell'analisi precedente che si riferisce ai fenomeni ottici, perché, in essi le onde sono trasversali, e si ha

$$\sum \frac{df}{dx} = 0$$

Ora (n° 300), equazione (17)

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

essendo  $\rho$  la densità dell'elettricità vera. Pertanto  $\rho = 0$ ; non vi è dunque elettricità vera, e di conseguenza

$$\left. \begin{array}{l} \rho\xi \\ \rho\eta \\ \rho\zeta \end{array} \right\} = 0$$

quindi la corrente di Rowland non esiste.

### Verifica del principio di conservazione dell'energia

**322.** Le equazioni di Hertz per l'elettrodinamica dei corpi in movimento sono coerenti con il principio di conservazione dell'energia? Per vedere questo, si consideri l'espressione dell'energia totale, sia elettrica che magnetica, data da Hertz,

$$J = \int \frac{d\tau}{8\pi} \left[ \sum \mu\alpha^2 + \sum KP^2 \right] \quad (1)$$

Questa energia ha diverse cause. Innanzitutto, c'è l'energia fornita dalla batteria (meno l'energia spesa sotto forma di calore Joule, effetto Peltier, ecc.). Rappresentiamo con

$$dt \int U d\tau$$

l'incremento di questa energia nel tempo  $dt$ .

Quindi, se consideriamo un elemento  $d\tau$  della materia, esso subisce azioni meccaniche da parte del campo esterno, siano,

$$X d\tau \quad Y d\tau \quad Z d\tau$$

le componenti di una forza esterna al sistema, che compensa queste azioni del campo. L'elemento  $d\tau$  sottoposto a queste due forze antagoniste non acquisterà velocità, il che permetterà di trascurare la forza viva della materia.

Qual è, ora, il lavoro delle forze esterne che tendono ad aumentare  $J$ ? Ricordando che abbiamo designato con

$$\xi dt \quad \eta dt \quad \zeta dt$$

le componenti dello spostamento dell'elemento  $d\tau$ , questo lavoro è allora rappresentato da

$$dt \int d\tau (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

e il principio di conservazione dell'energia si esprime con la relazione seguente

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau (U + X\xi + Y\eta + Z\zeta) \quad (2)$$

d'altra parte, abbiamo differenziando la (1) rispetto a  $t$

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\tau}{8\pi} \left[ \sum \frac{d\mu\alpha^2}{dt} + \sum \frac{dKP^2}{dt} \right]$$

Il secondo membro di questa relazione è una funzione lineare di  $\xi, \eta, \zeta$  e le loro derivate, possiamo scrivere

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau \left( U_0 + V_1\xi + V_2\eta + V_3\zeta + V_4 \frac{d\xi}{dx} + \dots \right) \quad (3)$$

dove  $U_0$  rappresenta l'insieme dei termini indipendenti da  $\xi, \eta, \zeta$ .

L'integrazione per parti ci darà

$$\int V_4 \frac{d\xi}{dx} d\tau = - \int \xi \frac{dV_4}{dx} dt$$

poiché le integrazioni sono estese all'intero spazio e tutte le funzioni si annullano all'infinito.

La relazione (3) diviene allora

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau \left[ U_0 + \xi \left( V_1 - \frac{dV_4}{dx} - \dots \right) + \eta (V_2 - \dots) + \zeta (V_3 - \dots) \right]$$

o anche

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau (U_0 + X_0\xi + Y_0\eta + Z_0\zeta) \quad (4)$$

Identificando questa espressione (4) con quella precedente (2), troviamo

$$\begin{aligned} U &= U_0 \\ X &= X_0 \\ Y &= Y_0 \\ Z &= Z_0 \end{aligned}$$

il che significa che la forza che deve essere applicata all'elemento di volume  $d\tau$  per bilanciare l'azione del campo su questo elemento, ha come componenti,

$$\begin{cases} X_0 d\tau \\ Y_0 d\tau \\ Z_0 d\tau \end{cases}$$

e, di conseguenza, l'azione del campo è

$$\begin{cases} -X_0 d\tau \\ -Y_0 d\tau \\ -Z_0 d\tau \end{cases}$$

Ciò ci consente di calcolare l'azione del campo sull'elemento  $d\tau$ .

### 323. Energia elettrocinetica ed energia elastica di un campo magnetico

Ma prima di passare al calcolo di questa azione, indichiamo una trasformazione utile per i calcoli che seguiranno.

L'espressione dell'energia magnetica è, secondo Hertz

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \frac{d\mu\alpha^2}{dt} \quad (1)$$

d'altra parte abbiamo

$$\begin{cases} a = \alpha + 4\pi A = \mu\alpha + 4\pi A_0 \\ b = \beta + 4\pi B = \mu\beta + 4\pi B_0 \\ c = \gamma + 4\pi C = \mu\gamma + 4\pi C_0 \end{cases}$$

essendo  $(A, B, C)$  il vettore detto magnetizzazione *totale* e  $(A_0, B_0, C_0)$  il vettore detto magnetizzazione *permanente*; da ciò ricaviamo

$$\begin{aligned} (\mu - 1)\alpha &= 4\pi(A - A_0) \\ (\mu - 1)\beta &= 4\pi(B - B_0) \\ (\mu - 1)\gamma &= 4\pi(C - C_0) \end{aligned}$$

dove  $(A - A_0, B - B_0, C - C_0)$  sono le componenti della magnetizzazione *indotta*. Se ne deduce facilmente

$$(\mu - 1)\alpha^2 = \frac{16\pi^2}{\mu - 1}(A - A_0)^2, \dots$$

da cui

$$\mu\alpha^2 = \alpha^2 + \frac{16\pi^2}{\mu - 1}(A - A_0)^2, \dots$$

Sostituendo questi valori di  $\mu\alpha^2, \mu\beta^2, \mu\gamma^2$ , nella relazione (1), questa diviene

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \mu\alpha^2 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 + \int \frac{d\tau 2\pi}{\mu - 1} \sum (A - A_0)^2 \quad (2)$$

dove il secondo integrale del secondo membro è, a meno di un fattore  $\frac{2\pi}{\mu - 1}$ , il quadrato della magnetizzazione indotta.

Qual è il significato fisico di questa relazione?

Sappiamo che, secondo Ampère, in un magnete tutto avviene come se fosse percorso da innumerevoli correnti di particelle. Nei magneti permanenti queste correnti sono tutte orientate allo stesso modo; ma non è più così nei magneti indotti. Per spiegare, infatti, perché questi corpi, capaci di magnetizzarsi per induzione, si magnetizzano in un campo magnetico e perdano la loro magnetizzazione non appena viene rimossa l'azione del campo, siamo obbligati a introdurre un'ipotesi aggiuntiva: si deve supporre che queste correnti di Ampère abbiano una direzione variabile. Finché il corpo da magnetizzare non si trova ancora nel campo magnetico, queste correnti di particelle sono orientate indifferentemente in tutte le direzioni; il momento magnetico è quindi nullo: la magnetizzazione risultante è nulla; ma non appena il corpo in questione viene posto in un campo magnetico, le correnti delle particelle tenderanno ad avvicinarsi ad un orientamento comune; il momento magnetico non sarà più nullo e apparirà la magnetizzazione indotta. Il campo magnetico è stato rimosso? Le correnti torneranno al loro orientamento originale e il momento magnetico ritornerà nullo. Tutto avviene come se il mezzo magnetico si deformasse sotto l'azione del campo (come avverrebbe ad esempio con una molla sollecitata) e tornasse nella sua posizione di equilibrio, in virtù della forza elastica messa in gioco da questa deformazione, non appena il campo avrebbe cessasse di agire. Ne consegue che l'energia magnetica totale sarà composta da due parti:

1° L'energia elettrocinetica delle correnti delle particelle, e 2° l'energia dovuta alla forza elastica, appena nominata.

Il primo termine dell'espressione (2) è l'energia elettrocinetica e il secondo termine,

$$\int \frac{d\tau 2\pi}{\mu - 1} \sum (A - A_0)^2$$

rappresenta questa particolare energia elastica.

Maxwell, nel suo ragionamento sui magneti, ha calcolato solo il lavoro delle forze magnetiche vere e proprie; trascura il lavoro della forza elastica che abbiamo appena invocato; anche la sua espressione dell'energia magnetica è in disaccordo con il principio di conservazione dell'energia e perfino con i risultati che egli stesso ottenne in un'altra parte del suo Trattato classico.

Vediamo ora il valore di questa energia elastica. Supponiamo che le correnti di particelle siano allontanate dalla loro posizione di equilibrio originale dall'azione di un campo magnetico; l'energia potenziale risultante è proporzionale a questa differenza, se questa è piccola; quindi il momento magnetico risultante sarà proporzionale alla differenza

$$\sqrt{\sum (A - A_0)^2}$$

e di conseguenza il quadrato della magnetizzazione indotta sarà proporzionale al quadrato della differenza. Ne consegue che il lavoro delle forze elastiche è proporzionale al quadrato di questa stessa quantità: questo è ciò che indica il secondo integrale della relazione (2).

### 324. Calcolo delle azioni meccaniche esercitate dal campo elettromagnetico sulla materia

Abbiamo visto in precedenza che l'energia totale è composta da energia magnetica ed energia elettrica. Indichiamo la prima con  $J_1$  ed la seconda con  $J_2$ . Abbiamo quindi,

$$J_1 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \mu \alpha^2$$

$$J_2 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum K P^2$$

Come già detto, metteremo il principio di conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{dJ}{dt} = \int U_0 d\tau + \int (X_0 \xi + Y_0 \eta + Z_0 \zeta) d\tau \quad (1)$$

Il primo integrale esprime l'energia fornita dalla batteria meno l'energia spesa sotto forma di calore Joule, effetto Peltier, ecc. Per convincersene basta notare che questo termine è indipendente dalla velocità della materia. Si ha quindi la stessa espressione che nel caso dei mezzi a riposo, che abbiamo esaminato prima. Il secondo integrale rappresenta il lavoro delle forze esterne che abbiamo invocato per equilibrare le azioni meccaniche prodotte dal campo. L'azione del campo avrà quindi componenti lungo i tre assi,

$$\begin{cases} -X_0 d\tau \\ -Y_0 d\tau \\ -Z_0 d\tau \end{cases}$$

Per calcolare queste componenti assumerò che i diversi corpi materiali mantengano lo stesso  $\mu$  e lo stesso  $K$  quando ci si sposta nello spazio. Ciò equivale a scrivere che,

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

o

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{dt} + \xi \frac{d\mu}{dx} + \eta \frac{d\mu}{dy} + \zeta \frac{d\mu}{dz}$$

che si può scrivere

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{dt} + \sum \xi \frac{d\mu}{dx}$$

pertanto

$$\frac{d\mu}{dt} = - \sum \xi \frac{d\mu}{dx}$$

$\frac{d\mu}{dt}$  è quindi una funzione lineare di  $\xi, \eta, \zeta$ . Prendiamo ora  $[\mu\alpha]$  e sviluppiamo questa espressione, si ha

$$[\mu\alpha] = \frac{d}{dy} \mu (\beta\xi - \alpha\eta) - \frac{d}{dz} (\alpha\zeta - \gamma\xi) - \xi \sum \frac{d\mu\alpha}{dx}$$

si vede che questa espressione è anche una funzione lineare di  $\xi, \eta, \zeta$  e delle loro derivate e sarà così anche per  $\frac{d\mu\alpha}{dx}$ , ecc.

Infatti, le equazioni fondamentali di Hertz si scrivono

$$\frac{d\mu\alpha}{dx} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\mu\alpha], \dots$$

o

$$\frac{d\mu\alpha}{dx} = \mu \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\mu}{dt}$$

da cui

$$\mu \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\mu\alpha}{dx} - \alpha \frac{d\mu}{dt}$$

$\mu \frac{d\alpha}{dt}$  sarà quindi ancora una funzione lineare di  $\xi, \eta, \zeta$  e delle loro derivate.

Stabilito ciò, valutiamo  $\frac{dJ_1}{dt}$ . Abbiamo differenziando rispetto a  $t$  l'espressione di  $J_1$

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \left( \alpha^2 \frac{d\mu}{dt} + 2\alpha\mu \frac{d\alpha}{dt} \right)$$

e vediamo, da quanto stabilito, che la funzione che compare sotto il segno di integrale è lineare rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$  e alle loro derivate. Posso quindi scrivere

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int d\tau (U_1 + H_1)$$

dove  $U_1$  è l'insieme dei termini che non dipendono da  $\xi, \eta, \zeta$  e dalle loro derivate e  $H_1$ , quello dei termini dipendenti da  $\xi, \eta, \zeta$  e dalle loro derivate;  $H_1$  sarà quindi un polinomio omogeneo di primo grado rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$  e alle loro derivate.

Si troverà con un calcolo analogo

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int d\tau (U_2 + H_2)$$

L'integrazione per parti ci permetterà di metter  $\int H_1 d\tau$  e  $\int H_2 d\tau$  sotto la forma seguente

$$\int H_1 d\tau = \int d\tau (X_1\xi + Y_1\eta + Z_1\zeta) = \int d\tau \sum X_1\xi$$

$$\int H_2 d\tau = \int d\tau \sum X_2\xi$$

di modo che  $\frac{dJ}{dt}$  diviene infine

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau (U_1 + H_1) + \int d\tau [\sum X_1\xi + \sum X_2\xi]$$

Identificando queste relazioni con la (1) si trova

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 + U_2 \\ X_0 &= X_1 + X_2 \\ Y_0 &= Y_1 + Y_2 \\ Z_0 &= Z_1 + Z_2 \end{aligned}$$

La prima relazione

$$U_0 = U_1 + U_2$$

ci dice che  $U_1 + U_2$  corrisponde all'energia creata dalla batteria meno quella che scompare sotto forma di calore Joule. Le altre relazioni ci mostrano che le proiezioni dell'azione del campo sui tre assi sono

$$\begin{aligned} &-(X_1 + X_2) d\tau \\ &-(Y_1 + Y_2) d\tau \\ &-(Z_1 + Z_2) d\tau \end{aligned}$$

Queste componenti comprendono, come si vede, due parti

$$\begin{aligned} &-X_1d\tau \quad -X_2d\tau \\ &-Y_1d\tau \quad -Y_2d\tau \\ &-Z_1d\tau \quad -Z_2d\tau \end{aligned}$$

$(-X_1d\tau, -Y_1d\tau, -Z_1d\tau)$  rappresentano le componenti dell'azione del campo magnetico sulla materia; le altre componenti sono quelle che derivano dall'azione del campo elettrico sulla materia.

**325.** Calcoliamo ciascuna di queste azioni in particolare.

## I. Azioni meccaniche del campo magnetico

Comincerò col formulare un'ipotesi: supporrò che possano esistere corpi suscettibili di magnetizzazione, cioè corpi tali che per essi  $\mu \geq 1$ , e dielettrici per i quali  $K \leq 1$ ; ma farò una restrizione: assumerò che se il sistema considerato può contenere corpi per i quali  $\mu \geq 1$  e  $K \leq 1$ , questi saranno solidi. Non avremo quindi né corpi magnetici fluidi né dielettrici fluidi diversi dall'aria.

— A parte questi corpi solidi, supporrò sempre  $\mu = 1$ .

Abbiamo

$$J_1 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \mu \alpha^2 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 + \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum (\mu - 1) \alpha^2 \quad (1)$$

il primo integrale del secondo membro sarà esteso a tutto lo spazio; il secondo si estenderà solo ai magneti solidi.

Abbiamo trovato in precedenza

$$(\mu - 1) \alpha = 4\pi (A - A_0)$$

Poniamo ora

$$\left. \begin{aligned} (\mu - 1) \alpha &= 4\pi (A - A_0) = \alpha' \\ (\mu - 1) \beta &= \beta' \\ (\mu - 1) \gamma &= \gamma' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

si ricava facilmente

$$\begin{cases} \mu\alpha = \alpha + \alpha' \\ \mu\beta = \beta + \beta' \\ \mu\gamma = \gamma + \gamma' \end{cases} \quad (2 \text{ bis})$$

e la relazione (1) diviene

$$J_1 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 + \int \frac{d\tau}{8\pi} \frac{1}{\mu-1} \sum \alpha^2 \quad (3)$$

Formiamo ora  $\frac{dJ_1}{dt}$ . Differenziamo la relazione (3) sotto il segno di integrale. Per poter effettuare la derivazione, il campo di integrazione deve essere lo stesso al tempo  $t$  e al tempo  $t + dt$ . Per il primo integrale non vi sono difficoltà, perché si estende a tutto lo spazio; ma così non è per il secondo integrale che si estende solo ai solidi magnetizzati. Estendiamo questo integrale ad un singolo solido magnetico; questo solido spostandosi determinerà un campo di integrazione variabile al tempo  $t$  e al tempo  $t + dt$ . Ma aggiriamo la difficoltà considerando un osservatore solidale a questo solido: per questo osservatore il campo di integrazione sarà lo stesso al tempo  $t$  e al tempo  $t + dt$ ; solo allora dovremo effettuare la derivata rispetto al tempo con  $\partial$ . Si avrà pertanto,

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \int \frac{d\tau}{8\pi} \frac{1}{\mu-1} \frac{\partial}{\partial t} \sum \alpha^2 \quad (4)$$

poiché  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  come abbiamo supposto in precedenza.

Ma come ottenere questa derivata  $\frac{\partial}{\partial t} \sum \alpha^2$ ?

Per calcolare questa derivata utilizziamo il teorema che abbiamo dimostrato sopra (308); avevamo dimostrato che se  $N$  è il valore assoluto di un vettore  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , allora si ha,

$$N \frac{\partial N}{\partial t} = \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \sum \alpha[\alpha]$$

oppure, sostituendo  $N$  con il suo valore

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum \alpha^2 = \sum \alpha \frac{d\alpha}{dt} - \sum \alpha[\alpha]$$

e ricordiamo che la dimostrazione di questo teorema presupponeva che il punto considerato apparteneva a un corpo solido: è precisamente il nostro caso. Applichiamo questo teorema a un vettore  $\alpha'$ : si ottiene,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum \alpha'^2 = \sum \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} - \sum \alpha'[\alpha']$$

Dividendo entrambi i membri di questa relazione per  $\mu - 1$  e tenendo conto delle relazioni (2), si avrà

$$\frac{1}{2(\mu-1)} \frac{\partial}{\partial t} \sum \alpha'^2 = \sum \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} - \sum \alpha'[\alpha']$$

è esattamente il valore della derivata che volevamo valutare.

La relazione (4) diventa quindi:

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum \alpha \left( \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt} - [\alpha'] \right) \quad (5)$$

Valutiamo

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt} - [\alpha']$$

A questo scopo sostituiamo nelle equazioni di Hertz  $\mu\alpha$  con il valore (2 bis). Questo ci dà,

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\alpha] + [\alpha']$$

da cui

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt} - [\alpha'] = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\alpha]$$

La relazione (5) si può scrivere

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum \alpha \left( \frac{dQ}{dt} - \frac{dR}{dy} + [\alpha'] \right) \quad (6)$$

Osserviamo ora che la quantità sotto il segno di integrale contiene due parti differenti: la prima parte  $\frac{dQ}{dt} - \frac{dR}{dy}$  è indipendente da  $\xi, \eta, \zeta$  e dalle loro derivate e l'altra in  $[\alpha]$  che dipende, al contrario, di queste quantità e loro derivate: essa è funzione lineare di queste quantità. La relazione (6) può quindi mettersi nella forma,

$$\frac{dJ_1}{dt} = \int (U_1 + H_1) d\tau$$

da cui, identificando con (6)

$$U_1 = \sum \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{dQ}{dt} - \frac{dR}{dy} \right)$$

e

$$4\pi H_1 = \sum \alpha [\alpha] \quad (7)$$

Ora, una volta ottenuto  $H_1$ , da esso otterremo  $X$ . Ecco come fare.

Per integrazione per parti,  $H_1$  può essere posto nella forma

$$\int H_1 d\tau = \int (X_1\xi + Y_1\eta + Z_1\zeta) d\tau \quad (7 \text{ bis})$$

o, facendo  $\eta = \zeta = 0$

$$\int H_1 d\tau = \int X_1\xi d\tau \quad (8)$$

d'altra parte, sviluppando la (7) e ponendo  $\eta = \zeta = 0$ , si ha

$$4\pi H_1 = \alpha \frac{d\beta\xi}{dy} + \alpha \frac{d\gamma\xi}{dz} + \alpha\xi \sum \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\beta\xi}{dy} - \gamma \frac{d\gamma\xi}{dz} \quad (9)$$

poiché, con  $\eta = \zeta = 0$

$$[\alpha] = \frac{d\beta\xi}{dy} + \frac{d\gamma\xi}{dz} - \xi \sum \frac{d\alpha}{dx}$$

$$[\beta] = -\frac{d\beta\xi}{dx}$$

$$[\gamma] = -\frac{d\gamma\xi}{dx}$$

si ha quindi

$$4\pi \int H_1 d\tau = \int d\tau \left( \frac{d\beta\xi}{dy} + \alpha \frac{d\gamma\xi}{dz} + \alpha\xi \sum \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\beta\xi}{dy} - \gamma \frac{d\gamma\xi}{dz} \right) \quad (10)$$

e integrando per parti

$$\begin{aligned}\int \alpha \frac{d\beta\xi}{dy} d\tau &= - \int \beta\xi \frac{d\alpha}{dy} d\tau \\ \int \alpha \frac{d\gamma\xi}{dz} d\tau &= - \int \gamma\xi \frac{d\alpha}{dz} d\tau \\ - \int \beta \frac{d\beta\xi}{dx} d\tau &= \int \beta\xi \frac{d\beta}{dx} d\tau \\ - \int \gamma \frac{d\gamma\xi}{dx} d\tau &= \int \gamma\xi \frac{d\gamma}{dx} d\tau\end{aligned}$$

la relazione (10) si può scrivere,

$$4\pi \int H_1 d\tau = \int d\tau \left( \beta\xi \frac{d\beta}{dx} + \gamma\xi \frac{d\gamma}{dx} + \alpha\xi \sum \frac{d\alpha}{dx} - \beta\xi \frac{d\alpha}{dy} - \gamma\xi \frac{d\alpha}{dz} \right)$$

confrontando quest'ultima relazione con la seguente (ottenuta moltiplicando i due membri della (8) per  $4\pi$ )

$$4\pi \int H_1 d\tau = \int 4\pi X_1 \xi d\tau$$

si ha

$$4\pi X_1 = \beta \frac{d\beta}{dx} + \gamma \frac{d\gamma}{dx} + \alpha \sum \frac{d\alpha}{dx} - \beta \frac{d\alpha}{dy} - \gamma \frac{d\alpha}{dz} \quad (11)$$

Vediamo ora il significato di questa equazione.

Dapprima, abbiamo visto in precedenza (300) che

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} = 4\pi m \quad (12)$$

essendo  $m$  la densità del magnetismo libero, cioè la densità del magnetismo totale tenendo conto del magnetismo permanente e di quello indotto. D'altra parte sappiamo che

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u$$

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v$$

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w$$

Tenendo conto di queste ultime relazioni e della (12), la (11) diviene

$$X_1 = \beta w - \gamma v - \alpha u$$

L'azione meccanica del campo magnetico sull'elemento  $\tau$  ha quindi per proiezione lungo l'asse  $x$

$$-X_1 d\tau = (\alpha m + \gamma v - \beta w) d\tau$$

e si avrà con un calcolo del tutto analogo (eseguendo successivamente nella (7) e (7 bis)  $\xi = \zeta = 0$  e  $\xi = \eta = 0$ )

$$\begin{aligned}-Y_1 d\tau &= (\beta m + \alpha w - \gamma u) d\tau \\ -Z_1 d\tau &= (\gamma \alpha m + \beta u - \alpha v) d\tau\end{aligned}$$

In queste relazioni ( $\alpha m d\tau, \beta m d\tau, \gamma m d\tau$ ) rappresentano l'azione del campo sulla massa magnetica  $m d\tau$  e gli ultimi due termini di ogni parentesi rappresentano ovviamente l'azione del

campo magnetico sulla *corrente totale*  $(u, v, w)^{38}$ ; Questa azione è calcolata tramite la formula di Ampère. Maxwell fornisce per la prima componente di questa forza

$$(\alpha m + cv - bw) d\tau$$

ma questa espressione non è conforme al principio di conservazione dell'energia.

*Osservazione.* Tutto quanto appena detto vale solo per i casi in cui i corpi magnetizzati sono solidi che si muovono senza deformarsi, pur conservando il loro potere induttore  $\mu$  e che trasportano con sé la loro magnetizzazione permanente. Se ci fossero corpi magnetici fluidi o deformabili, non si potrebbe effettuare il calcolo senza fare ipotesi sull'influenza della deformazione sul coefficiente  $\mu$  e sulla distribuzione del magnetismo permanente. D'altro canto, il principio di conservazione dell'energia non potrebbe più essere applicato nella stessa forma; perché queste deformazioni e le variazioni che ne deriverebbero per  $\mu$  e la magnetizzazione permanente potrebbero liberare calore.

Il risultato appena ottenuto ci dimostra ancora una volta che l'espressione da adottare per l'energia magnetica è quella di Hertz e non una qualsiasi di quelle di Maxwell.

## II. Azioni meccaniche del campo elettrico

**326.** Calcoliamo ora le espressioni delle forze meccaniche che si esercitano tra corpi in movimento in un campo elettrico.

Prendiamo come punto di partenza il secondo gruppo di equazioni fondamentali di Hertz per l'elettrodinamica dei corpi in movimento,

$$\begin{cases} \frac{dKP}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} + [KP] - 4\pi p \\ \frac{dKQ}{dt} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} + [KQ] = 4\pi q \\ \frac{dKR}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} + [KR] = 4\pi r \end{cases} \quad (1)$$

e poniamo

$$\begin{cases} (K - K_0) P = P' \\ (K - K_0) Q = Q' \\ (K - K_0) R = R' \end{cases} \quad (2)$$

l'induzione elettrica di Hertz diviene allora,

$$\begin{cases} KP = K_0 P + P' \\ KQ = K_0 Q + Q' \\ KR = K_0 R + R' \end{cases}$$

e di conseguenza il sistema di equazioni (1) diviene,

$$\begin{cases} \frac{dK_0 P}{dt} + \frac{dP'}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} + [K_0 P] + [P'] - 4\pi p \\ \frac{dK_0 Q}{dt} + \frac{dQ'}{dt} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} + [K_0 Q] + [Q'] - 4\pi q \\ \frac{dK_0 R}{dt} + \frac{dR'}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} + [K_0 R] + [R'] - 4\pi r \end{cases} \quad (3)$$

L'energia elettrica è, per Hertz

$$J_2 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum KP^2 \quad (4)$$

o, dalla (2) ricaviamo

$$KP^2 = K_0 P^2 + \frac{P'^2}{K - K_0}$$

<sup>38</sup>Corrente totale = corrente. conduzione + corrente di spostamento + corrente di Rowland + corrente di Röntgen,

la relazione (4) diviene pertanto

$$J_2 = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum K P^2 + \int \frac{d\tau}{8\pi} \frac{1}{K - K_0} \sum P^2$$

il primo integrale è esteso a tutto lo spazio; il secondo si estende solo ai dielettrici solidi il cui potere induttore specifico è  $K \geq 0$  e  $K \geq K_0$ .

Il resto del calcolo si basa sul calcolo precedente (campo magnetico). Si ottiene così

$$\frac{dJ_2}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum P \frac{dK_0 P}{dt} + \int \frac{d\tau}{8\pi} \frac{1}{K - K_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum P'^2$$

applicando il teorema citato in precedenza, dividendo per  $K - K_0$  e tenendo conto delle relazioni (2)

$$\frac{1}{K - K_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum P'^2 = 2 \left[ \sum P \frac{dP'}{dt} - \sum P[P'] \right]$$

pertanto

$$\frac{dJ_2}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum P \left[ \frac{dK_0 P}{dt} + \frac{dP'}{dt} - [P'] \right]$$

o ancora, tenendo conto della (3)

$$\frac{dJ_2}{dt} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum P \left[ \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - 4\pi p + [K_0 P] \right]$$

Da ciò si deduce, osservando che  $\sum [K_0 P]$  è funzione lineare di  $\xi, \eta, \zeta$  e delle loro derivate

$$U_1 = \sum \frac{P}{4\pi} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - 4\pi p \right)$$

e

$$H_2 = \frac{K_0}{4\pi} \sum P[P] \quad (5)$$

essendo queste due quantità collegate dalla relazione

$$\frac{dJ_2}{dt} = \int d\tau (U_2 + H_2)$$

l'integrazione per parti ci dà per  $\int H_2 d\tau$  dopo moltiplicazione per  $4\pi$

$$4\pi \int H_2 d\tau = \int d\tau \sum X_2 \xi \quad (6)$$

Prendiamo la relazione (3) e sviluppiamo  $[P]$ , si ha

$$[P] = \frac{d}{dy} (Q\xi - P\eta) - \frac{d}{dz} (P\zeta - R\xi) - \xi \sum \frac{dP}{dx}$$

$$[Q] = \frac{d}{dz} (R\eta - Q\zeta) - \frac{d}{dx} (Q\xi - P\eta) - \eta \sum \frac{dP}{dx}$$

$$[R] = \frac{d}{dx} (P\zeta - R\xi) - \frac{d}{dy} (R\eta - Q\zeta) - \zeta \sum \frac{dP}{dx}$$

Per avere  $X_1$  poniamo  $\eta = \zeta = 0$  in queste relazioni, si ha così

$$[P] = \frac{dQ\xi}{dy} + \frac{dR\xi}{dz} - \xi \sum \frac{dP}{dx}$$

$$[Q] = -\frac{dQ\xi}{dx}$$

$$[R] = -\frac{dR\xi}{dx}$$

e di conseguenza la relazione (5) diviene

$$\frac{4\pi}{K_0} \int H_2 d\tau = \int d\tau \left[ P \frac{dQ\xi}{dy} + P \frac{dR\xi}{dz} - P\xi \sum \frac{dP}{dx} - Q \frac{dQ\xi}{dx} - R \frac{dR\xi}{dx} \right] \quad (5 \text{ bis})$$

e integrando per parti

$$\int P \frac{dQ\xi}{dy} d\tau = - \int Q\xi \frac{dP}{dy} d\tau$$

$$\int P \frac{dQ\xi}{dz} d\tau = - \int R\xi \frac{dP}{dz} d\tau$$

$$- \int Q \frac{dQ\xi}{dx} d\tau = \int Q\xi \frac{dQ}{dx} d\tau$$

$$- \int R \frac{dR\xi}{dx} d\tau = \int R\xi \frac{dR}{dx} d\tau$$

la (5 bis) diviene allora,

$$\frac{4\pi}{K_0} \int H_2 d\tau = \int d\tau \xi \left[ Q \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) - R \left( \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) - P \sum \frac{dP}{dx} \right] \quad (5 \text{ ter})$$

Ponendo  $\eta = \zeta = 0$  nella (6) e confrontando quanto risulta con la (5 ter) si trova così

$$\frac{4\pi X_2}{K_0} = Q \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) - R \left( \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) - P \sum \frac{dP}{dx}$$

Ora si ha

$$K_0 \sum \frac{dP}{dx} = 4\pi e$$

essendo  $e$  la densità dell'elettricità *libera*, cioè non solo dell'elettricità che si trova in superficie (elettricità vera), ma anche dell'elettricità *apparente* che sembra essere portata sulla superficie dei dielettrici posti nel campo elettrico.

Viene quindi

$$\frac{4\pi X_2}{K_0} = Q \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) - R \left( \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) - P \sum \frac{4\pi e}{K_0}$$

I primi due termini del secondo membro di questa relazione rappresentano *la forza di Hertz*. L'ultimo termine, che nell'espressione per  $X_2$  assumerà la forma  $-Pe$  e che, di conseguenza, darà  $Pe d\tau$  per l'azione del campo sulla massa  $e d\tau$  di elettricità, rappresenta la forza elettrostatica ordinaria esercitata non solo sulla elettricità vera, ma sulla cosiddetta elettricità libera.

**327.** La forza di Hertz è troppo piccola perché sia possibile dimostrarla sperimentalmente: finora è rimasta insensibile agli esperimenti. Cerchiamo tuttavia di rendere conto del significato di questa forza; per comprenderlo bene, sono costretto a fare una digressione sul parallelismo e la reciprocità dei fenomeni elettrici e magnetici e sulla nuova nozione di corrente di spostamento magnetica.

Consideriamo un dielettrico e accettiamo per il momento le idee di Mossotti sui dielettrici (sfere conduttrici estremamente piccole, sparse in una sostanza non conduttrice, aventi le stesse proprietà dell'aria, che si elettrizzano per influenza e che di conseguenza producono la polarizzazione del dielettrico). Supponiamo che questo dielettrico abbia la forma di una lamina

a superficie piana e che sia posto in un campo magnetico costante. Avremo una distribuzione di elettricità positiva su un lato della lamina e di elettricità negativa sull'altro lato. La densità elettrica di questi strati è, secondo i calcoli di Mossotti,

$$\frac{K - K_0}{4\pi} P = \frac{K - K_0}{K} f$$

Quando il campo è variabile si hanno allora correnti analoghe a quelle di spostamento di Maxwell; queste correnti valgono,

$$\frac{K - K_0}{4\pi} \frac{dP}{dt} = \frac{K - K_0}{K} \frac{df}{dt}$$

Supponiamo ora di avere due dielettrici di poteri induttori specifici  $K$  e  $K_1$ , applicati l'uno contro l'altro; si avrà sulla faccia del primo uno strato elettrico di densità

$$\frac{K - K_0}{4\pi} P$$

e lo strato di separazione risultante avrà come densità

$$\frac{K - K_1}{4\pi} P$$

Generalizziamo ora queste idee di Mossotti combinandole con quelle di Maxwell. Si avranno quindi piccole sfere conduttrici separate da un mezzo ipotetico di potenza induttrice specifica  $K'$ . È quindi necessario sostituire  $K_0$  nelle formule di Mossotti con  $K'$ . Si ha allora per la densità superficiale

$$\frac{K - K_0}{4\pi} P'$$

e per la corrente di spostamento

$$\frac{K - K'}{4\pi} \frac{dP}{dt}$$

Se si hanno due dielettrici applicati uno contro l'altro di cui uno è fatto d'aria, si ha allora

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ strato} & \quad \frac{K - K'}{4\pi} P \\ 2^\circ \text{ strato} & \quad \frac{K' - K_0}{4\pi} P \\ \text{stratorisultante} & \quad \frac{K - K_0}{4\pi} P \end{aligned}$$

Otteniamo quindi lo stesso risultato in entrambe le teorie dal punto di vista elettrostatico. Ma dal punto di vista elettrodinamico non è più la stessa cosa: le azioni elettrodinamiche sono infatti diverse nei due ordini di idee.

Passiamo ora ai corpi magnetici. Si avrà la stessa cosa; sappiamo infatti che la teoria di Mossotti sui dielettrici non è altro che la traduzione della teoria di Poisson sui mezzi magnetici; si passa dall'una all'altra trasformando la parola flusso elettrico in flusso magnetico e viceversa.

Consideriamo quindi una lamina di un corpo magnetico posta in un campo magnetico; la lamina magnetica si magnetizzerà e avremo due strati di magnetismo di densità

$$\frac{\mu - 1}{4\pi} \alpha$$

prendendo  $\mu = 1$  per il vuoto.

Se si indica con  $\mu_0$  il coefficiente del vuoto, avremo allora

$$\frac{\mu - \mu_0}{4\pi} \alpha$$

Se il campo non è costante, tutto avverrà come se le cariche magnetiche variassero, come se il magnetismo passasse dall'una all'altra faccia. Si avrà quindi una vera e propria corrente magnetica di densità

$$\frac{\mu - \mu_0}{4\pi} \frac{d\alpha}{dt}$$

Ma affinché il parallelismo sia completo, è necessario modificare la definizione di questa corrente di spostamento magnetico introducendo una nuova teoria che starà, per così dire, a quella di Poisson come quella di Maxwell sta a quella di Mossotti.

Supponiamo ora che il vuoto sia come gli altri corpi: magnetizzabile. Le sfere magnetiche saranno allora separate da un mezzo di permeabilità magnetica  $\mu'$  e sulla superficie si avrà

$$\frac{\mu - \mu'}{4\pi} \alpha$$

e la corrente magnetica sarà

$$\frac{\mu - \mu'}{4\pi} \frac{d\alpha}{dt} \quad (7)$$

Se consideriamo infine la superficie di separazione dei due mezzi: corpo magnetico - vuoto, avremo allora un doppio strato

$$\frac{\mu - \mu'}{4\pi} \alpha \quad \frac{\mu_0 - \mu'}{4\pi} \alpha$$

e lo strato risultante sarà

$$\frac{\mu - \mu_0}{4\pi} \alpha$$

Le due teorie concordano quindi dal punto di vista dei fenomeni statici.

In questo caso, i corpi diamagnetici sono meno magnetici del mezzo che li circonda e quindi meno magnetici del vuoto. Ciò è in accordo con l'ipotesi appena formulata secondo la quale il vuoto sarebbe magnetico. Dobbiamo avere per un corpo qualsiasi  $\mu > \mu'$ ; ma se il vuoto è magnetico abbiamo  $\mu_0 > \mu'$ ; possono quindi esistere corpi per i quali  $\mu < \mu_0$ : si tratta di corpi diamagnetici.

Riprendiamo l'espressione (7) della corrente di spostamento magnetica e passiamo al limite (come fatto da Maxwell per la corrente di spostamento) ponendo  $\mu' = 0$ ; la corrente magnetica sarà allora

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{d\alpha}{dt}$$

o anche

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\mu\alpha}{dt}$$

Ora, secondo Hertz

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\mu\alpha]$$

Poniamo allora

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = -\frac{d\mu\alpha}{dt} + [\mu\alpha] = \frac{4\pi U}{K_0}$$

$$\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} = \frac{4\pi V}{K_0}$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = \frac{4\pi W}{K_0}$$

Risulta, confrontando queste relazioni con le

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w \end{cases}$$

che abbiamo (a meno di fattori costanti) la stessa relazione tra correnti magnetiche e campo elettrico che c'è tra correnti elettriche e campo magnetico. Pertanto, una corrente elettrica produrrebbe un campo magnetico e allo stesso modo una corrente magnetica produrrebbe un campo elettrico. Esiste quindi una reciprocità perfetta. Questa reciprocità evidenziata da Hertz può essere espressa nella forma indicata dal signor Blondlot.

Consideriamo una massa elettrica in movimento: gli esperimenti di Rowland dimostrano che tale movimento produce gli effetti elettrodinamici di una corrente; si crea quindi un campo magnetico. Consideriamo invece un polo magnetico in movimento; se si muove vicino a conduttori dà origine a effetti di induzione. Nel pensiero di Maxwell lo spostamento di questo polo in un dielettrico produce nel dielettrico anche forze elettromotrici di induzione: l'unica differenza è che nel dielettrico queste forze elettromotrici danno origine ad uno *spostamento elettrico* invece di produrre una corrente di conduzione. il movimento del polo magnetico crea quindi un campo elettrico.

Possiamo enunciare la reciprocità tra fenomeni elettrici e magnetici dicendo che se due poli, uno elettrico e l'altro magnetico, subiscono lo stesso spostamento, danno origine allo stesso campo.

Quindi, prendiamo un circuito C, il *primario*, e un altro circuito C', il *secondario*; l'esperienza ci insegna che se varia l'intensità della corrente che attraversa il primario, nel secondario si crea una corrente di induzione. Secondo Hertz, questa azione sarebbe indiretta; la corrente che passa attraverso il primario produce un campo magnetico; se l'intensità di questa corrente è variabile, anche il campo magnetico sarà variabile; le sue variazioni daranno origine ad uno spostamento magnetico: ad una corrente magnetica; questa corrente magnetica produrrà a sua volta un campo elettrico che si manifesterà nel secondario attraverso una corrente elettrica. Avremo quindi, come conseguenza della variazione dell'intensità della corrente primaria, una corrente nel secondario. Quindi, le correnti magnetiche producono un campo elettrico, proprio come le correnti elettriche producono un campo magnetico. D'altra parte, una forza magnetica esercita un'azione meccanica sul materiale attraversato da una corrente elettrica. Per reciprocità una forza elettrica deve esercitare un'azione meccanica sulla materia attraversata da una corrente magnetica. È questa azione meccanica che costituisce la forza di Hertz.

**328.** Riprendiamo ora il calcolo di  $X_2$ .

Abbiamo

$$\frac{4\pi X_2}{K_0} = Q \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) - R \left( \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) - P \sum \frac{4\pi e}{K_0}$$

Tenendo conto delle relazioni in  $U, V, W$  e della relazione

$$\frac{4\pi}{K_0} \sum \frac{dP}{dx} = e$$

verrà infine

$$X_2 = QW - RV - Pe$$

Di conseguenza il campo elettrico esercita sull'elemento di volume  $d\tau$  un'azione meccanica la cui proiezione sull'asse  $x$  è

$$(Pe + RV - QW) d\tau$$

Vediamo il significato di questa relazione. Che cosa è  $Ped\tau$ ? Abbiamo già detto che è l'azione esercitata dal campo elettrico sulla massa elettrica  $ed\tau$ ; questa azione elettrica è esercitata dalla forza elettrica *totale*  $P$  che ha per espressione secondo Maxwell,

$$P = -\frac{d\psi}{dx} - \frac{dF}{dt}$$

e che comprende sia la forza di origine elettrostatica sia la forza elettrica dovuta all'induzione magnetica.

Che cosa è  $(QW - RV)$ ? È l'azione del campo elettrico sulla corrente magnetica. Questa azione è necessaria affinché sia verificato il principio di uguaglianza di azione e reazione. Se infatti, una corrente elettrica variabile produce delle correnti magnetiche, e tramite queste correnti una forza elettrica di induzione, che agisce su una carica elettrica e, deve esserci una reazione di questa carica sia sulla materia attraversata da queste correnti magnetiche, sia sul circuito percorso dalla corrente elettrica variabile. Secondo Hertz questa sarebbe la prima ipotesi che sarebbe realizzata. L'esperienza non ha ancora verificato le previsioni.

## Verifica del principio dell'uguaglianza tra dell'azione e della reazione

**329.** Dimostriamo ancora una volta, per concludere con la teoria di Hertz, che essa è conforme al principio di uguaglianza di azione e reazione.

Abbiamo già mostrato che le equazioni di Hertz mantengono la stessa forma sia nel moto relativo che nel moto assoluto. È facile vedere, d'altro canto, che anche l'espressione dell'energia totale mantiene la stessa forma in questi due movimenti.

Sappiamo che,

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau (U_0 + \sum X_0\xi)$$

Ora  $\int U_0 d\tau$  non dipende da  $\xi, \eta, \zeta$  né dalle loro derivate e pertanto questo integrale sarà lo stesso nei due movimenti.

Quanto al secondo termine

$$\int d\tau \sum X_0\xi$$

$X_0, Y_0, Z_0$  non cambiano più nei due movimenti poiché tutte queste quantità non contengono  $\xi, \eta, \zeta$  né le loro derivate.

Chiamando  $\xi, \eta, \zeta$  le componenti della velocità relativa,  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  quelle della velocità di trascinamento, allora  $\xi + \xi_1, \eta + \eta_1, \zeta + \zeta_1$  rappresentano le componenti della velocità nel moto assoluto.

Abbiamo quindi nel moto assoluto

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau [U_0 + \sum X_0(\xi + \xi_1)]$$

e nel moto relativo

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau (U_0 + \sum X_0\xi)$$

Sottraendo queste due relazioni membro a membro, viene

$$\int \sum X_0\xi_1 d\tau = 0$$

Questa relazione è vera per ogni  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ .

Supponiamo che il moto in questione sia di traslazione; allora

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0 \quad \xi_1 = 1$$

e l'integrale precedente diviene in questo caso,

$$\int X_0 d\tau = 0$$

La componente totale della traslazione è quindi nulla: *il principio di uguaglianza di azione e reazione è quindi verificato dalle equazioni di Hertz.*

# Cap. III - Teoria di Lorentz

## Conduttori

**330.** La teoria di Hertz è, come abbiamo visto, perfettamente coerente; ma se essa rende conto dei fenomeni elettrici, non lo è per certi fenomeni ottici e in particolare per i fenomeni ottici in movimento (trascinamento parziale delle onde luminose, aberrazione astronomica, ecc.). D'altra parte, è perfettamente in accordo con il principio di conservazione dell'energia, con il principio di conservazione dell'elettricità e del magnetismo e con il principio di uguaglianza di azione e reazione.

Presenteremo ora una nuova teoria elettrodinamica che spiega molto bene i fenomeni ottici che non potevano essere spiegati dalla teoria di Hertz, ma che purtroppo non è conforme al principio di uguaglianza di azione e reazione: si tratta della *teoria di Lorentz*.

Prima di entrare nello studio dettagliato di questa teoria, inizieremo elencando le ipotesi fondamentali di Lorentz.

### 331. Ipotesi fondamentali

Secondo Lorentz:

1° *Non vi è magnetismo*: le apparenze del magnetismo sono dovute alle correnti di particelle di Ampère.

2° *Non ci sono correnti di conduzione*: l'elettricità aderisce alla materia. I fenomeni elettrici sono dovuti a certi piccoli corpi materiali, estremamente forti e carichi elettricamente, che Lorentz chiama *ioni* o *elettroni*. Queste molecole materiali sono corpi solidi che si muovono senza deformarsi; queste molecole trasportano cariche elettriche dalle quali sono inseparabili. La carica di ciascuna di queste molecole è costante e la distribuzione è invariabile.

*Conduttori*. — All'interno di un corpo conduttore (liquido o solido), queste molecole possono muoversi liberamente e questi movimenti producono correnti chiamate *voltaiche*. Soltanto in questo movimento devono vincere una sorta di attrito (o resistenza) da parte del conduttore: un corpo è tanto più conduttore quanto più oppone una minore resistenza al movimento di queste particelle. In altre parole, le correnti che scorrono attraverso un conduttore metallico si propagano con lo stesso meccanismo di quelle che scorrono attraverso un elettrolita; le molecole o particelle con carica invariabile si comporteranno quindi allo stesso modo degli ioni degli elettroliti: ciò giustifica il loro nome.

Queste particelle sono cariche le une positivamente, le altre negativamente. Un corpo è carico positivamente perché contiene più molecole caricate positivamente che molecole caricate negativamente.

*Dielettrici*. — La massa dei dielettrici è disseminata di ioni come quella dei conduttori, solo che ognuno di essi, invece di potersi muovere liberamente all'interno del dielettrico, può deviare solo di poco dalla sua posizione di equilibrio: non appena si allontana da esso, una forza antagonista dovuta all'azione degli ioni vicini tende a riportarlo lì; questa forza è proporzionale allo scarto, se questo è piccolo.

Quando il dielettrico viene posto in un campo elettrico, la forza elettrica esterna tende a spingere lo ione lontano dalla sua posizione di equilibrio e si allontana leggermente da essa finché

questa forza esterna non viene controbilanciata dall'attrazione degli ioni vicini che tendono a riportare lo ione alla sua posizione di equilibrio iniziale.

In altre parole il dielettrico si polarizza.

Un'analisi che non si discosta sostanzialmente da quella a cui porta l'ipotesi di Poisson e Mossotti mostra che la *polarizzazione del dielettrico* è proporzionale all'intensità del campo esterno; si ricade quindi sulle formule ben note della teoria dei dielettrici.

Vediamo ora come Lorentz ha ridotto queste ipotesi in equazioni. Cominciamo con i conduttori.

## I - Conduttori

**332.** Possiamo studiare cosa succede nei conduttori ponendoci da due punti di vista diversi. Per prima cosa, consideriamo un osservatore dotato di sensi molto sviluppati e vediamo come gli si presenteranno i fenomeni osservati nei conduttori. — Grazie ai suoi sensi altamente sviluppati e molto sottili, sarà in grado di percepire le correnti particellari di Ampère; riuscirà perfino a distinguere gli ioni e a vederli muovere: per lui non esisteranno né magnetismo né correnti di conduzione. — Se, al contrario, consideriamo un osservatore dotato di sensi grossolani — come i nostri — il movimento degli ioni non gli sarà accessibile; egli vedrà solo fenomeni medi, effetti complessivi, e sarà così portato ad ammettere l'esistenza delle correnti di conduzione e del magnetismo.

Studieremo i conduttori ponendoci successivamente da questi due diversi punti di vista.

### A. - Fenomeni che si presentano a un osservatore aventi sensi molto sviluppati

**333.** Consideriamo la corrente totale; secondo Lorentz, è composta da due parti: la corrente di spostamento e la corrente di convezione di Rowland.

Indichiamo, come in precedenza, con  $u, v, w$  le componenti della corrente totale; si ha allora

$$\begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \rho\xi \\ v = \frac{dg}{dt} + \rho\eta \\ w = \frac{dh}{dt} + \rho\zeta \end{cases} \quad (1)$$

Ammetteremo anche la relazione

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho \quad (2)$$

Questa è una connessione che imponiamo allo spostamento  $(f, g, h)$ . D'altra parte, essendo le particelle solidi invariabili e trasportanti le loro cariche, si avrà:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \xi \frac{d\rho}{dx} + \eta \frac{d\rho}{dy} + \zeta \frac{d\rho}{dz}$$

pertanto

$$\frac{d\rho}{dt} + \xi \frac{d\rho}{dx} + \eta \frac{d\rho}{dy} + \zeta \frac{d\rho}{dz} = 0 \quad (3)$$

e inoltre

$$\rho \left( \xi \frac{d\rho}{dx} + \eta \frac{d\rho}{dy} + \zeta \frac{d\rho}{dz} \right) = 0 \quad (4)$$

poiché la dilatazione delle particelle è nulla.

Sommando le relazioni (3) 3 (4) membro a membro si ha,

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho\xi)}{dx} + \frac{d(\rho\eta)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta)}{dz} = 0$$

o ancora,

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d(\rho\xi)}{dx} = 0 \quad (5)$$

Differenziamo ora la prima equazione del sistema (1) rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$  e sommiamo, si ottiene,

$$\sum \frac{du}{dx} = \sum \frac{d^2 f}{dxdt} + \sum \frac{d(\rho\xi)}{dx} = \frac{d}{dt} \sum \frac{df}{dx} + \sum \frac{d(\rho\xi)}{dx}$$

o, tenendo conto delle relazioni (2) e (5)

$$\sum \frac{du}{dx} = 0 \quad (6)$$

Quest'ultima relazione esprime il principio di conservazione dell'elettricità.

**334.** Introduciamo ora il potenziale vettore  $(F, G, H)$ . Secondo il teorema di Poisson, si ha

$$\begin{cases} \Delta F = -4\pi u \\ \Delta G = -4\pi v \\ \Delta H = -4\pi w \end{cases} \quad (7)$$

Differenziando la prima di queste relazioni rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$  e sommando, si ottiene,

$$\sum \frac{d}{dx} \Delta F = \Delta \sum \frac{dF}{dx} = -4\pi \sum \frac{du}{dx}$$

e per la relazione (6)

$$\Delta \sum \frac{dF}{dx} = 0$$

$\Delta \sum \frac{dF}{dx}$  esprime quindi il potenziale della massa attrattiva la cui densità  $\left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)$  è nulla. Questo potenziale è quindi nullo, e si ha allora

$$\sum \frac{dF}{dx} = 0 \quad (8)$$

**335.** Mostriamo ora che non c'è magnetismo permanente o indotto. Introduciamo per questa la forza magnetica  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Poniamo,

$$\begin{cases} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha \\ \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = \beta \\ \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma \end{cases} \quad (9)$$

Differenziamo la prima di queste equazioni rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$ ; si ha

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

Come si voleva dimostrare.

**336.** Formiamo ora le espressioni,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma}{dy} \\ \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

già incontrate nella teoria di Hertz.

Sostituendo in queste espressioni  $\alpha, \beta, \gamma$  con i loro valori ricavati dalla (9), si ottiene per la prima

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2 G}{dx dy} - \frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{d^2 H}{dx dz}$$

sommiamo e sottraiamo al secondo membro  $\frac{d^2 F}{dx^2}$ , si ha

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = -\Delta F + \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 G}{dx dy} + \frac{d^2 H}{dx dz}$$

o anche

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = -\Delta F + \frac{d}{dx} \sum \frac{dF}{dx}$$

e infine, tenendo conto delle relazioni (7) e (8) si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= -4\pi u \\ \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma}{dy} &= -4\pi v \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= -4\pi w \end{aligned} \right. \quad (10)$$

**337.** Per andare oltre mi servirò delle equazioni di Lagrange.

Supporrò che il sistema sia composto da un gran numero di variabili e che le coordinate delle varie particelle cariche della materia dipendano dai parametri  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  e anche da queste grandezze dipenderanno gli spostamenti.

Sia  $T$  la forza totale del sistema; è composto dalla forza viva della materia,  $T'$ , e dalla forza viva dell'etere che designerò con  $T''$ . Si avrà pertanto

$$T = T' + T''$$

E se  $U$  rappresenta l'energia totale del sistema,  $U'$  l'energia dovuta alle forze diverse dalle elettriche,  $U''$  l'energia dovuta alle forze elettriche, si avrà ancora

$$U = U' + U''$$

Le equazioni di Lagrange si possono allora scrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq} + \frac{dU}{dq} = 0 \quad (11)$$

Ma quali sono i valori espliciti di  $T''$  e  $U''$ ?

Suppongo che  $T''$  sia rappresentato dall'energia magnetica; ciò porta a scrivere

$$T'' = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 \quad (12)$$

da cui, con un calcolo ben noto,

$$T'' = \int \frac{d\tau}{8\pi} \sum \alpha^2 = \int \frac{d\tau}{2} \sum Fu \quad (12 \text{ bis})$$

$U''$  è l'energia potenziale dell'etere; suppongo che è l'energia elettrica; pertanto,

$$U'' = \int \frac{2\pi}{K_0} d\tau \sum f^2 \quad (13)$$

Calcoliamo ora le derivate  $\frac{dT''}{dq'}$ ,  $\frac{dT''}{dq}$ ,  $\frac{dU''}{dq}$ . Si ha

$$\frac{dU''}{dq} = \frac{4\pi}{K_0} \int d\tau \sum f \frac{df}{dq} \quad (14)$$

Per quanto riguarda  $T''$ , osserviamo nella (12 bis) che  $F$  è il potenziale di una massa attrattiva la cui densità è  $u$ ; e se quindi assegno un incremento  $\delta u$  a  $u$ , l'incremento corrispondente di  $F$  sarà  $\delta F$ ; l'integrale (12 bis) aumenterà quindi di conseguenza (considerando solo il primo termine di  $\sum$ )

$$\delta \int \frac{d\tau}{2} \sum F u = \int \frac{d\tau}{2} \sum (F \delta u + u \delta F)$$

e in virtù di un teorema ben noto

$$\int d\tau F \delta u = \int d\tau u \delta F$$

pertanto

$$\int \frac{d\tau}{2} \sum (F \delta u + u \delta F) = \int d\tau F \delta u$$

e di conseguenza,

$$\frac{dT''}{dq} = \int d\tau \sum F \frac{du}{dq} \quad (15)$$

e allo stesso modo

$$\frac{dT''}{dq'} = \int d\tau \sum F \frac{du}{dq'} \quad (16)$$

Rimane ancora da calcolare  $\frac{du}{dq}$  e  $\frac{du}{dq'}$ . E qui siamo portati a distinguere due tipi di coordinate  $q$ :

1° Le coordinate del centro di gravità della particella considerata. Queste coordinate sono sufficienti a determinare completamente la posizione della particella, se assumiamo che essa non possa ruotare su se stessa. Lorentz ha dimostrato anche che, poiché le particelle sono infinitamente piccole, il momento della coppia che tenderebbe a farle ruotare su se stesse è un infinitesimo di ordine superiore. Non riprodurremo questa dimostrazione per mancanza di tempo; ci limiteremo ad ammettere la conclusione.

Le variabili del primo tipo sono quindi sufficienti a determinare la posizione della materia e di conseguenza la posizione dell'elettricità che, secondo Lorentz, è invariabilmente legata alla materia.

2° Le coordinate che definiscono la posizione dell'etere. La materia e quindi l'elettricità non saranno influenzate dalla variazione di queste coordinate; d'altra parte, lo spostamento  $(f, g, h)$  subirà delle variazioni, perché il vettore  $(f, g, h)$  è funzione della posizione dell'etere.

Ora, quando le variabili del primo tipo subiscono degli incrementi, queste variazioni influenzeranno contemporaneamente la materia e l'etere: l'elettricità e lo spostamento elettrico.

### 338. Equazioni che definiscono lo stato dell'etere

Fatta questa distinzione di coordinate, ritorniamo al nostro problema; calcoliamo  $\frac{du}{dq}$  e  $\frac{du}{dq'}$

Cominciamo col porre nel caso delle variabili della seconda specie, che definiscono la posizione dell'etere.

Dapprima

$$u = \frac{df}{dt} + \rho\xi \quad (17)$$

è quindi necessario differenziare questa relazione rispetto a  $q$ .

Ora,  $\rho$  non dipende da  $q$  (variabile di seconda specie), la sua derivata è di conseguenza nulla, e quindi si ha

$$\frac{du}{dq} = \frac{d}{dq} \frac{df}{dt} \quad (18)$$

Dico che

$$\frac{d}{dq} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{df}{dq} = \frac{d^2 f}{dudq}$$

Abbiamo infatti

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{df}{dq_i} q'_i$$

e differenziando rispetto a  $q$

$$\frac{d}{dq} \frac{df}{dt} = \sum \frac{d^2 f}{dq_i dq} q'_i$$

per cui

$$\frac{d}{dq} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{df}{dq} = \sum \frac{d^2 f}{dq_i dq} q'_i \quad (19)$$

Come volevasi dimostrare.

L'equazione (18) diviene allora,

$$\frac{du}{dq} = \frac{d^2 f}{dtdq} \quad (20)$$

Calcoliamo anche  $\frac{du}{dq'}$ . Abbiamo

$$\frac{d}{dq'_i} \frac{df}{dt} = \frac{df}{dq_i}$$

pertanto

$$\frac{du}{dq'} = \frac{df}{dq} \quad (21)$$

Scriviamo ora le equazioni di Lagrange considerando solo variabili di seconda specie. — Queste equazioni si semplificano se notiamo che  $T'$  e  $U'$ , riferentesi alla materia, hanno derivate nulle rispetto alle variabili di seconda specie che si riferiscono all'etere. Le equazioni (11) si scrivono allora, tenendo conto delle relazioni (15), (16), (20) e (21),

$$\frac{d}{dt} \int d\tau \sum F \frac{df}{dq} - \int d\tau \sum F \frac{d^2 f}{dtdq} + \frac{4\pi}{K_0} \int d\tau \sum f \frac{df}{dq} = 0 \quad (22)$$

Trasformiamo queste equazioni. Prendiamo il primo integrale e differenziamo rispetto a  $t$ ; si ha

$$\frac{d}{dt} \int d\tau \sum F \frac{df}{dq} = \int d\tau \sum F \frac{d^2 f}{dtdq} + \int d\tau \sum \frac{df}{dq} \frac{dF}{dt}$$

La relazione (22) diviene quindi

$$\int d\tau \sum \left( \frac{dF}{dt} \frac{df}{dq} + \frac{4\pi}{K_0} f \frac{df}{dq} \right) = 0 \quad (23)$$

Ora abbiamo

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

e differenziando rispetto a  $q$ ,

$$\sum \frac{d^2 f}{dx dq} = \frac{d\rho}{dq}$$

moltiplichiamo ora i due membri di questa relazione per  $\psi d\tau$  (dove  $\psi$  è una funzione qualunque, che si annulla all'infinito) e integriamo nell'intero spazio: si ha,

$$\int \psi d\tau \sum \frac{d^2 f}{dx dq} = \int \psi d\tau \frac{d\rho}{dq}$$

ma osserviamo che  $\rho$  non dipende da  $q$  (variabile della seconda specie) quindi,

$$\int \psi d\tau \sum \frac{d^2 f}{dx dq} = 0$$

o ancora integrando per parti in tutto lo spazio

$$\int \psi d\tau \sum \frac{d^2 f}{dx dq} = - \int \psi d\tau \sum \frac{d\psi}{dx} \frac{df}{dq} = 0$$

e introducendo questa funzione  $\psi$  nelle equazioni (23) di Lagrange si ottiene

$$\int d\tau \sum \frac{df}{dq} \left( \frac{df}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi}{K_0} f \right) = 0 \quad (24)$$

Affinché questa relazione sia soddisfatta, basta che

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi}{K_0} f = 0 \\ \frac{dG}{dt} + \frac{d\psi}{dy} + \frac{4\pi}{K_0} g = 0 \\ \frac{dH}{dt} + \frac{d\psi}{dz} + \frac{4\pi}{K_0} h = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Si potrebbe dimostrarlo utilizzando il calcolo delle variazioni che ci mostrerebbe, inoltre, che esiste solo questo modo per soddisfare questa relazione (24) [se tra  $\rho$  e  $f$  non vi è altra relazione oltre la (2)].

D'altra parte, è ovvio che le equazioni di Lagrange possono avere una sola soluzione.

Cerchiamo quindi una funzione che soddisfi le condizioni (25).

Differenziamo a questo scopo la prima delle relazioni (25) rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$  e sommiamo; si ha così

$$\sum \frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi f}{K_0} \right) = 0$$

o anche

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{dF}{dx} + \Delta\psi + \frac{4\pi}{K_0} \sum \frac{df}{dx} = 0 \quad (26)$$

ma,

$$\sum \frac{dF}{dx} = 0 \quad \sum \frac{df}{dx} = \rho$$

La relazione (26) diviene pertanto,

$$\Delta\psi = -\frac{4\pi}{K_0} \rho \quad (27)$$

Questa equazione ci mostra che la funzione  $\psi$  soddisfacendo alle condizioni (25), gode delle proprietà di un potenziale: è il potenziale di una massa attrattiva di densità  $\frac{\rho}{K_0}$ .

Poniamo ora,

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{K_0} f = P \\ \frac{4\pi}{K_0} g = Q \\ \frac{4\pi}{K_0} h = R \end{cases} \quad (28)$$

e scriviamo le relazioni (25) con queste notazioni; si ha

$$\begin{cases} P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{cases} \quad (29)$$

relazioni che presentano una grande analogia con quelle di Maxwell.

Differenziando la seconda di queste equazioni rispetto a  $z$ , la terza rispetto a  $y$  e sottraendo, si ottiene

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} - \frac{d}{dt} \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right)$$

o, (9)

$$\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha, \text{ ecc....}$$

per cui

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} &= \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{dR}{dy} - \frac{dP}{dx} &= \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dz} &= \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Le ultime due equazioni si ottengono come la prima.

Queste sono le equazioni che definiscono lo stato dell'etere.

### 239. Confronto con le relazioni di Hertz

Confrontando le relazioni di Lorentz con quelle di Hertz, si vede immediatamente una differenza molto marcata:  $K$  è diventato costante e uguale a  $K_0$  e  $\mu$  è completamente scomparso nelle equazioni di Lorentz. Ciò è dovuto alle ipotesi che abbiamo introdotto all'inizio: non abbiamo ammesso alcun magnetismo o dielettrico diverso dal vuoto. Notiamo anche la scomparsa dei termini contenenti le correnti di conduzione. Ciò non deve sorprenderci, perché abbiamo trascurato, nell'espressione della corrente totale, le correnti di Roentgen e le correnti di conduzione ( $p, q, r$ ); questa differenza è visibile confrontando le equazioni fondamentali di Hertz (ponendo  $\mu = 1$ ) e le equazioni (30) di Lorentz.

Confrontiamo infatti le prime equazioni di ogni gruppo. Si ha

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\alpha] \dots \quad (\text{Hertz})$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \dots \dots \dots \quad (\text{Lorentz})$$

ed è precisamente il termine  $[\alpha]$  che contiene la corrente di Roentgen e che abbiamo trascurato.

Suppongo che si sia ripreso il calcolo precedente tenendo conto dei termini contenenti la corrente di Roentgen che si esprime come

$$\frac{d}{dz} (f\zeta - h\xi) - \frac{d}{dy} (g\xi - f\eta)$$

in altri termini suppongo che  $u$  valga

$$u = \frac{df}{dt} + \rho\xi + \frac{d}{dz} (f\zeta - h\xi) - \frac{d}{dy} (g\xi - f\eta)$$

in questa ipotesi si troverebbero come condizioni da soddisfare

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi}{K_0} f + (\zeta\beta - \eta\gamma) = 0 \\ \frac{dG}{dt} + \frac{d\psi}{dy} + \frac{4\pi}{K_0} g + (\xi\gamma - \zeta\alpha) = 0 \\ \frac{dH}{dt} + \frac{d\psi}{dz} + \frac{4\pi}{K_0} h + (\eta\alpha - \xi\beta) = 0 \end{cases}$$

e ponendo sempre

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{K_0} f &= P \\ \frac{4\pi}{K_0} g &= Q \\ \frac{4\pi}{K_0} h &= R \end{aligned}$$

si troverebbe invece delle relazioni (29) le seguenti

$$\begin{cases} P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} + (\eta\gamma - \zeta\beta) \\ Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} + (\zeta\alpha - \xi\gamma) \\ R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} + (\xi\beta - \eta\alpha) \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + [\alpha] \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} + [\beta] \\ \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} + [\gamma] \end{cases}$$

cioè proprio le equazioni di Hertz.

Quindi, tenendo conto delle correnti di Roentgen nelle equazioni di Lagrange, si ritrovano le equazioni fondamentali di Hertz. Questo dovrebbe attirare la nostra attenzione. Ricordiamo, infatti, che siamo stati indotti ad introdurre i termini  $[a]$ ,  $[\beta]$ ,  $[\gamma]$  tenendo conto degli esperimenti di induzione magnetica. Sarà quindi interessante spiegare come le equazioni di Lorentz riescano a spiegare l'induzione magnetica; vedremo più avanti che ne rendano perfettamente conto.

### 340. b. Variabili di prima specie

Consideriamo una particella  $m$  e chiamiamo  $q$  l'ascissa del suo centro di gravità.

Calcoliamo  $\frac{dT'}{dq}$  e  $\frac{dT'}{dq'}$ .

$T'$  è la forza viva della materia; di conseguenza

$$T = \frac{mq'^2}{2} + \frac{mq_1'^2}{2} + \frac{mq_2'^2}{2} + \dots \quad (1)$$

$q_1, q_2, q_3, \dots$  sono le ascisse dei centri di gravità delle diverse particelle.

Si vede che questa forza viva dipende dalle variabile di prima specie e non dipende dalle loro derivate; ne risulta che

$$\frac{dT'}{dq} = 0 \quad \frac{dT'}{dq'} = mq'$$

e di conseguenza

$$\frac{d}{dt} \frac{dT'}{dq'} - \frac{dT'}{dq} = mq' \quad (2)$$

Per quanto riguarda le derivate  $\frac{dT''}{dq}$  e  $\frac{dT''}{dq'}$ , le formule (15) e (16) ci forniscono queste derivate. Abbiamo infatti

$$\frac{dT''}{dq} = \int d\tau \sum F \frac{du}{dq} \quad (3)$$

$$\frac{dT''}{dq'} = \int d\tau \sum F \frac{du}{dq'} \quad (4)$$

rimane da calcolare  $\frac{du}{dq}$  e  $\frac{du}{dq'}$ .

**341.** Iniziamo col calcolare  $\frac{du}{dq'}$ . Abbiamo

$$u = \frac{df}{dt} + \rho\xi$$

differenziamo questa relazione rispetto a  $q'$  e osserviamo che  $\rho$  dipende solo dalla posizione reale della materia; è quindi indipendente da  $q'$ ; si ha allora,

$$\frac{du}{dq'} = \frac{df}{dq} + \rho \frac{d\xi}{dq'} \quad (5)$$

All'interno della particelle  $m$  si ha  $\xi = q'$  per cui

$$\frac{d\xi}{dq'} = 1$$

al di fuori di essa si ha  $\rho = 0$  e di conseguenza

$$\rho \frac{d\xi}{dq'} = 0$$

conveniamo allora di chiamare  $\rho_0$  una variabile tale che all'interno della particella il suo valore divenga  $\rho_0 = \rho$  e all'esterno di essa  $\rho_0 = 0$ .

La relazione (5) si scrive, con queste notazioni

$$\frac{du}{dq'} = \frac{df}{dq} + \rho_0 \quad (6)$$

Per quanto riguarda  $\frac{dv}{dq'}$  e  $\frac{dw}{dq'}$  si ha differenziando rispetto a  $q'$  le relazioni date per  $v$  e  $w$

$$\frac{dv}{dq'} = \frac{dg}{dq} + \rho \frac{d\eta}{dq'}$$

$$\frac{dw}{dq'} = \frac{dh}{dq} + \rho \frac{d\zeta}{dq'}$$

Ma notiamo che all'interno della particella  $m$ , si ha  $\eta = q'_1$  essendo  $q_1$  l'ordinata del centro di gravità di questa particella; da ciò risulta che

$$\frac{d\eta}{dq'} = 0$$

e con un ragionamento analogo

$$\frac{d\zeta}{dq'} = 0$$

Le relazioni precedenti diventano allora

$$\frac{dv}{dq'} = \frac{dg}{dq} \quad (7)$$

$$\frac{dw}{dq'} = \frac{dh}{dq} \quad (8)$$

**342.** Calcoliamo ora

$$\frac{du}{dq'}, \frac{dv}{dq'}, \frac{dw}{dq'}$$

Si ha, differenziando rispetto a  $q$  le relazioni che esprimono  $u, v, w$

$$\begin{cases} \frac{du}{dq} = \frac{d^2f}{dt dq} + \xi \frac{d\rho}{dq} + \rho \frac{d\xi}{dq} \\ \frac{dv}{dq} = \frac{d^2g}{dt dq} + \eta \frac{d\rho}{dq} + \rho \frac{d\eta}{dq} \\ \frac{dw}{dq} = \frac{d^2h}{dt dq} + \zeta \frac{d\rho}{dq} + \rho \frac{d\zeta}{dq} \end{cases}$$

Cosa sono

$$\rho \frac{d\xi}{dq} \quad \rho \frac{d\eta}{dq} \quad \rho \frac{d\zeta}{dq}$$

Abbiamo visto che all'interno della particella  $m$  si aveva  $\xi = q'$  e quindi

$$\frac{d\xi}{dq} = 0$$

all'esterno della particella si ha  $\rho = 0$ ; si ha quindi dappertutto

$$\rho \frac{d\xi}{dq} = 0$$

e analogamente

$$\rho \frac{d\eta}{dq} = 0 \quad \rho \frac{d\zeta}{dq} = 0$$

Le relazioni precedenti diventano pertanto

$$\begin{cases} \frac{du}{dq} = \frac{d^2f}{dt dq} + \xi \frac{d\rho}{dq} \\ \frac{dv}{dq} = \frac{d^2g}{dt dq} + \eta \frac{d\rho}{dq} \\ \frac{dw}{dq} = \frac{d^2h}{dt dq} + \zeta \frac{d\rho}{dq} \end{cases} \quad (9)$$

**343.** Le relazioni (3) e (4) diventano quindi

$$\frac{dT'}{dq} = \int d\tau \sum F \frac{d^2f}{dt dq} + \int d\tau \frac{d\rho}{dq} \sum F \xi \quad (3 \text{ bis})$$

$$\frac{dT'''}{dq'} = \int d\tau \sum F \frac{df}{dq} + \int d\tau F \rho_0 \quad (4 \text{ bis})$$

Queste derivate compaiono nelle equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{dT'''}{dq'} - \frac{dT'''}{dq}$$

Calcoliamo questa espressione servendoci delle relazioni (3 bis) e (4 bis). Si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{dT'''}{dq'} - \frac{dT'''}{dq} = \int d\tau \sum \frac{dF}{dt} \frac{df}{dq} + \int d\tau \frac{dF}{dt} \rho_0 + \int d\tau F \frac{d\rho_0}{dt} + \int d\tau \frac{d\rho}{dq} \sum F \xi \quad (10)$$

Trasformeremo ora questa espressione. Consideriamo gli ultimi due integrali. Nel primo, sostituiamo  $\frac{d\rho_0}{dt}$  con il suo valore

$$\frac{d\rho_0}{dt} = - \sum \frac{d\rho_0 \xi}{dx}$$

si ha così

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0}{dt} = - \int d\tau F \sum \frac{d\rho_0 \xi}{dx}$$

Integriamo per parti; si ha

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0 \xi}{dx} = - \int d\tau \rho_0 \xi \frac{dF}{dx}$$

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0 \eta}{dy} = - \int d\tau \rho_0 \eta \frac{dF}{dy}$$

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0 \zeta}{dz} = - \int d\tau \rho_0 \zeta \frac{dF}{dz}$$

e l'integrale in questione diviene

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0 \xi}{dx} = \int d\tau \rho_0 \left( \xi \frac{dF}{dx} + \eta \frac{dF}{dy} + \zeta \frac{dF}{dz} \right) \quad (11)$$

Trasformiamo ora l'altro integrale:

$$\int d\tau \frac{d\rho}{dq} \sum F \xi \quad (12)$$

Che cos'è  $\frac{d\rho}{dq}$ ? All'esterno della particella  $\frac{d\rho}{dq} = 0$ ; ciò significa che spostando la particella  $m$ , la densità elettrica varia solo al suo interno. Qual è questa variazione?

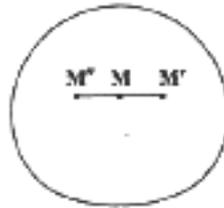


Fig. 53.

Per vederla, consideriamo il punto M all'interno della particella in questione e sia  $\rho$  la densità elettrica in questo punto. Se la coordinata  $q$  del punto M aumenta di  $dq$ , il punto M arriverà a M' e si ha  $MM' = dq$ . D'altra parte, la densità nel punto M' sarà diversa dalla densità in M. Essa varrà

$$\rho + \frac{d\rho}{dq} dq$$

In un punto M'' simmetrico di M' rispetto a M, si avrà  $MM'' = dq$  e come densità

$$\rho - \frac{d\rho}{dx} MM''$$

o

$$\rho - \frac{d\rho}{dx} dq$$

Si ha pertanto,

1° All'interno della particella,

$$\frac{d\rho}{dq} = - \frac{d\rho}{dx}$$

2° All'esterno della particella

$$\frac{d\rho}{dq} = 0$$

Pertanto con le convenzioni precedenti

$$\frac{d\rho}{dq} = - \frac{d\rho_0}{dx}$$

e il nostro integrale (12) diviene

$$- \int d\tau \frac{d\rho_0}{dx} \sum F\xi$$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int d\tau \frac{d\rho_0}{dx} \sum F\xi &= - \int d\tau \rho_0 \xi \frac{dF}{dx} \\ \int d\tau \frac{d\rho_0}{dx} \sum G\eta\xi &= - \int d\tau \rho_0 \eta \frac{dG}{dx} \\ \int d\tau \frac{d\rho_0}{dx} \sum H\zeta &= - \int d\tau \rho_0 \zeta \frac{dH}{dx} \end{aligned}$$

poiché il moto della particella, ridotto a moto di traslazione,  $\xi, \eta, \zeta$  non dipendono da  $x, y, z$ , all'interno della particella; questi sono costanti.

L'integrale (12) può quindi essere scritto,

$$- \int d\tau \frac{d\rho_0}{dq} \sum F\xi = \int d\tau \rho_0 \left( \xi \frac{dF}{dx} + \eta \frac{dG}{dx} + \zeta \frac{dH}{dx} \right) \quad (13)$$

Torniamo ora alla somma degli ultimi due integrali della (10); questa somma vale, tenendo conto delle relazioni (11) e (i3) appena stabilite,

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0}{dt} - \int d\tau \frac{d\rho_0}{dq} \sum F\xi = \int d\tau \rho_0 \left[ \eta \left( \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} \right) + \zeta \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) \right]$$

ora,

$$\begin{cases} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha \\ \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = \beta \\ \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma \end{cases}$$

pertanto

$$\int d\tau F \frac{d\rho_0}{dt} - \int d\tau \frac{d\rho_0}{dq} \sum F\xi = \int d\tau \rho_0 (\zeta\beta - \eta\gamma)$$

Scriviamo ora la relazione (10); essa diviene

$$\frac{d}{dt} \frac{dT''}{dq'} - \frac{dT''}{dq} = \int d\tau \sum \frac{dF}{dt} \frac{df}{dq} + \int d\tau \frac{dF}{dt} \rho_0 + \int d\tau \rho_0 (\zeta\beta - \eta\gamma)$$

**344.** Calcoliamo ancora  $\frac{dU''}{dq}$ . Abbiamo visto che

$$U'' = \int \frac{2\pi}{K_0} d\tau \sum f^2$$

da cui, differenziando rispetto a  $q$ ,

$$\frac{dU''}{dq} = \int d\tau \sum \frac{4\pi f}{K_0} \frac{df}{dq} \quad (14)$$

**345.** Prendiamo ora l'equazione di legame

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

e differenziamola rispetto a  $q$ ; si ha

$$\sum \frac{d^2 f}{dx dq} = \frac{d\rho}{dq}$$

Moltiplichiamo questa relazione per  $\psi d\tau$ , essendo  $\psi$  una funzione qualsiasi che si annulla all'infinito, e integriamo su tutto lo spazio; otteniamo così,

$$\int d\tau \psi \left( \sum \frac{d^2 f}{dx dq} - \frac{d\rho}{dq} \right) = 0$$

ora

$$\frac{d\rho}{dq} = -\frac{d\rho_0}{dx}$$

$$\int d\tau \psi \left( \sum \frac{d^2 f}{dx dq} + \frac{d\rho_0}{dx} \right) = 0 \quad (15)$$

Integriamo per parti; si ha

$$\int d\tau \psi \frac{d^2 f}{dx dq} = - \int d\tau \frac{df}{dq} \frac{d\psi}{dx}$$

.....

$$\int d\tau \psi \frac{d\rho_0}{dx} = - \int d\tau \rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

e l'integrale (15) diviene,

$$\int d\tau \sum \frac{d\psi}{dx} \frac{df}{dq} + \int d\tau \rho_0 \frac{d\psi}{dx} = 0 \quad (15 \text{ bis})$$

**346.** Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per scrivere le equazioni di Lagrange: dobbiamo solo aggiungere, membro per membro, le relazioni (2), (10 bis), (14) e (15 bis), che riscrivo per facilitare il calcolo,

$$\frac{d}{dt} \frac{dT'}{dq'} - \frac{dT'}{dq} + \frac{dU'}{dq} = mq'' + \frac{dU'}{dq}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dT''}{dq'} - \frac{dT''}{dq} = \int d\tau \sum \frac{dF}{dt} \frac{df}{dq} + \int d\tau \rho_0 \frac{dF}{dt} + \int d\tau \rho_0 (\zeta\beta - \eta\gamma)$$

$$\frac{dU''}{dq} = \int d\tau \sum \frac{4\pi f}{K_0} \frac{df}{dq}$$

$$0 = \int d\tau \sum \frac{d\psi}{dx} \frac{df}{dq} + \int d\tau \rho_0 \frac{d\psi}{dx}$$

La somma dei primi membri di queste equazioni ci dà zero; e ciò che rimane può essere scritto nella forma,

$$mq'' + \frac{dU'}{dq} + \int d\tau \sum \frac{df}{dq} \left( \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi}{K_0} f \right) + \int d\tau \rho_0 \left( \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} \right) + \int d\tau \rho_0 (\zeta\beta - \eta\gamma) = 0 \quad (16)$$

ora,

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi}{K_0} f = 0$$

da cui

$$\frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = -\frac{4\pi}{K_0} f$$

e la relazione (16) diviene allora

$$mq'' = -\frac{dU'}{dq} + \frac{4\pi}{K_0} \int \rho_0 f d\tau + \int d\tau \rho_0 (\zeta\beta - \eta\gamma) \quad (17)$$

in questa relazione  $q''$  rappresenta la proiezione, lungo l'asse  $x$ , dell'accelerazione della particella;  $mq''$  rappresenta quindi la proiezione lungo l'asse  $x$  della forza che agisce su questa particella; il termine in  $U$ , rappresenta delle forze, diverse da quelle elettriche, che agiscono sulla materia; il termine  $\frac{4\pi}{K_0}$  è la forza elettrostatica e infine il terzo termine del secondo membro rappresenta l'azione elettrodinamica.

Ne consegue, quindi, secondo Lorentz, che esiste una forza dovuta al campo elettrico e un'altra forza dovuta al campo magnetico.

### 346. Confronto con la teoria di Hertz

Confrontiamo ora questi risultati di Lorentz con quelli di Hertz.

Secondo Hertz la materia deve subire quattro azioni da parte del campo elettromagnetico, e da queste quattro azioni risultano:

- 1° La forza magnetica;
- 2° Forza elettrica;
- 3° La forza elettrodinamica;
- 4° La forza di Hertz.

Nella teoria di Lorentz non troviamo la prima forza; ciò non ci deve sorprendere, perché abbiamo supposto l'assenza del magnetismo.

La forza elettrica stessa, cioè la forza elettrica totale (dovuta ai fenomeni di induzione magnetica e alle azioni elettrostatiche) sussiste in entrambe le teorie; quindi, accordo con la teoria di Hertz su questo punto.

Per quanto riguarda l'azione elettrodinamica, vi è una differenza piuttosto marcata tra le due teorie, e ciò si spiega. Ricordiamo, infatti, che nella teoria di Hertz la corrente totale era composta da quattro parti: la corrente di conduzione, la corrente di spostamento, la corrente di Rowland e la corrente di Roentgen, mentre nella teoria di Lorentz la corrente di conduzione e la corrente di Roentgen non vengono prese in considerazione.

Inoltre, nella teoria di Hertz, la forza elettrodinamica agisce sulla corrente totale; in quella di Lorentz agisce sulla corrente di convezione e non agisce sulla corrente di spostamento.

Per quanto riguarda la forza di Hertz, essa non può esistere neanche nella teoria di Lorentz, perché questa forza è intimamente legata all'esistenza della corrente di Roentgen.

In sintesi, secondo Lorentz, la forza meccanica totale agente sullo ione considerato ha per proiezione sull'asse  $x$ ,

$$-\frac{4\pi}{K_0} \int \rho_0 f d\tau + \int d\tau \rho (\eta\gamma - \zeta\beta)$$

*l'integrazione essendo estesa solo alla particella considerata e non all'intero spazio (perché abbiamo visto che al di fuori delle particelle  $\rho = 0$ )*

### Verifica dei principi generali della meccanica

**347.** Resta da vedere come la teoria di Lorentz si accorda con i principi generali della meccanica.

1° *Principio di conservazione del magnetismo.* Nella teoria di Lorentz non esiste alcun magnetismo.

2° *Principio di conservazione dell'elettricità.* Questo principio è soddisfatto, perché abbiamo visto che

$$\sum \frac{du}{dx} = 0$$

che è precisamente l'espressione stessa del principio della conservazione dell'elettricità.

3° *Principio di conservazione dell'energia.* Anche questo principio è soddisfatto perché il nostro punto di partenza è stata l'applicazione delle equazioni di Lagrange.

4° *Principio di uguaglianza di azione e reazione*. Non è soddisfatto, e questo è il punto debole della teoria di Lorentz.

**348.** Supponiamo infatti una particella carica isolata e una perturbazione elettromagnetica proveniente dall'esterno e che raggiunga la particella. La forza elettrica dovuta a questa perturbazione, agendo sulla particella carica, o meglio sulla carica di questa particella, darà origine ad una forza ponderomotrice agente su di essa. Tuttavia, supponendo che questa sia isolata, non ci sarà alcuna reazione: la forza ponderomotrice non sarà controbilanciata.

Ma insistiamo ancora un po' su questo punto. Consideriamo semplicemente la risultante della traslazione e proiettiamola sull'asse  $x$ . Abbiamo,

$$X = \frac{4\pi}{K_0} \int \rho d\tau f + \int \rho d\tau (\eta\gamma - \zeta\beta) \quad (18)$$

Ma osserviamo che,

$$\begin{aligned} \rho\eta &= v - \frac{dg}{dt} \\ \rho\zeta &= w - \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

pertanto,

$$X = \frac{4\pi}{K_0} \int \rho d\tau f + \int d\tau (v\gamma - w\beta) + \int d\tau \left( \beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right) \quad (19)$$

Trasformiamo questa espressione. Iniziamo con il primo integrale.

$$\frac{4\pi}{K_0} \int \rho d\tau f \quad (20)$$

Abbiamo

$$\rho = \sum \frac{df}{dx}$$

L'integrale (20) diviene

$$\frac{4\pi}{K_0} \int f \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) d\tau$$

con l'integrale esteso all'intero spazio.

Integriamo per parti; si ha, osservando che

$$\int \frac{df}{dx} d\tau = 0$$

$$\frac{4\pi}{K_0} \int \left( -g \frac{df}{dy} - h \frac{df}{dz} \right) d\tau$$

sommiamo ora sotto a questo integrale, sotto il segno  $\int$ , le derivate perfette  $g \frac{dg}{dy}$  e  $h \frac{dh}{dz}$ , poiché sappiamo che se l'integrazione è estesa all'intero spazio.

$$\int \frac{dg}{dy} d\tau = 0$$

$$\int \frac{dh}{dz} d\tau = 0$$

Si ha allora,

$$\frac{4\pi}{K_0} \int \left[ g \left( \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) - h \left( \frac{dh}{dz} - \frac{df}{dx} \right) \right] d\tau$$

ma osserviamo che,

$$-\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{df}{dz} - \frac{dh}{dx} \right) = \frac{d\beta}{dt}$$

$$-\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) = \frac{d\gamma}{dt}$$

il nostro integrale diviene allora,

$$\int d\tau \left( h \frac{d\beta}{dt} - g \frac{d\gamma}{dt} \right)$$

Dico che il secondo integrale della (19) è nullo. Sappiamo, infatti, che

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v$$

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w$$

l'integrale in esame può quindi essere scritto

$$\frac{1}{4\pi} \int d\tau \left[ \gamma \left( \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) - \beta \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right]$$

Integrando per parti nell'intero spazio e sommando

$$\int \alpha \frac{d\alpha}{dx} d\tau$$

che è nullo si estendo a tutto lo spazio, si ottiene

$$\frac{1}{4\pi} \int d\tau \alpha \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right)$$

o ancora tenendo conto della relazione

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\tau \alpha \sum \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

Come si voleva dimostrare.

L'espressione (19) diviene allora, tenendo conto della (20 bis),

$$X = \int d\tau \left( h \frac{d\beta}{dt} - g \frac{d\gamma}{dt} \right) + \int d\tau \left( \beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right) = \int d\tau \frac{d}{dt} (\beta h - \gamma g)$$

o ancora

$$X = \frac{d}{dt} \int d\tau (\beta h - \gamma g)$$

Ecco il risultato della traslazione; si vede che essa non è nulla. Il principio di uguaglianza di azione e reazione non è quindi soddisfatto.

**350.** Liénard<sup>39</sup> ritiene di attenuare questo disaccordo dicendo che: "questo risultato non ha nulla di sorprendente: dal momento che si respinge la teoria delle azioni a distanza, e che si ammette al contrario che le forze impiegano un certo tempo per propagarsi nell'etere, non può

<sup>39</sup>L'Éclairage Électrique. LIÉNARD, *La théorie de Lorentz*, t. XIV. p. 67, 1898.

più esserci in ogni istante uguaglianza tra l'azione e la reazione, poiché queste non si producono nello stesso momento. Tutto ciò che si può chiedere è che la risultante di tutte le forze sia in media nulla, e questo è ciò che accade per la teoria di Lorentz.»

Infatti, il valore medio di  $X$  durante l'intervallo di tempo da  $t_0$  a  $t_1$ , è dato da

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} X dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} (\beta h - \gamma g) d\tau \right]$$

l'integrale del secondo membro rimarrà sempre finito perché la perturbazione elettrica e magnetica non può aumentare oltre un certo limite: questo integrale è quindi minore di una certa quantità data  $M$ , così che

$$X_{med} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} X dt < \frac{M}{t_1 - t_0}$$

e questo valore medio sarà tanto più vicino allo zero quanto più grande è l'intervallo di tempo  $t_1 - t_0$ . Se all'inizio e alla fine il campo è nullo, o ha lo stesso valore, il valore medio della risultante  $X$  sarà addirittura rigorosamente nullo.

**351.** Ma è facile vedere che questo argomento di Liénard a favore della teoria di Lorentz non è sufficiente.

Indichiamo infatti con  $A$  l'ascissa del centro di gravità della particella e con  $M$  la sua massa; si ha allora

$$\int_{t_0}^{t_1} X dt = \frac{dA}{dt}$$

e si vede che quando la perturbazione sarà finita il centro di gravità della particella avrà subito un impulso *finito*; il valore di questo impulso è rappresentato dall'incremento di  $\int (\beta h - \gamma g) d\tau$ .

Ricordiamoci, d'altra parte, il teorema di Poynting<sup>40</sup>: consideriamo una perturbazione che si verifica in un punto qualunque; questo punto sarà un centro di emanazione di energia in tutte le direzioni e ci permetterà di valutare la quantità di energia che passa attraverso una data superficie. Secondo il teorema di Poynting, questa energia è data dal prodotto della superficie in questione per il *vettore radiante* le cui componenti sono rappresentate da  $(\beta h - \gamma g)$ ,  $(\gamma f - \alpha h)$ ,  $(\alpha g - \beta f)$  in modo che la quantità di energia che attraversa l'elemento di superficie  $d\omega$  perpendicolarmente all'asse  $x$  è rappresentata da

$$\frac{1}{4\pi K_0} (\beta h - \gamma g)$$

Vediamo cosa succede se consideriamo una perturbazione che si propaga, ad esempio, da sinistra a destra; la perturbazione che si produce in  $O$  e cessa dopo pochi istanti, lascerà solo onde che si propagano verso destra e si allontanano sempre di più dal centro della scossa  $O$ . *La nostra integrazione dovrà quindi estendersi a quella parte dello spazio in cui la perturbazione è ancora presente.* Per ottenere l'energia totale, dobbiamo considerare un'infinità di rette uscenti da  $O$ , in tutte le direzioni, e integrare rispetto a tutti i piani perpendicolari a queste linee.

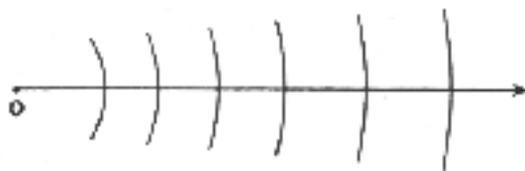


Fig. 54.

<sup>40</sup>H. POIXCARÉ, *Oscillations électriques*, p. 27, G. Carré et G. Naud, éditeurs.

Da ciò consegue che:

1° Che questa energia totale misura l'impulso che ha prodotto la perturbazione.

2° Che se il sistema che produce l'energia elettromagnetica inviava questa energia solo in una direzione, rinculerebbe come un pezzo di artiglieria.

3° Che se il sistema invia energia in tutte le direzioni ci sarà una compensazione tra questi impulsi parziali e di conseguenza il centro di gravità del sistema rimarrà a riposo.

Non è quindi sufficiente dire che il valore medio della risultante è nullo.

Ma traduciamo tutto questo in numeri per dimostrare che il rinculo previsto dalla teoria di Lorentz non è trascurabile. Supponiamo che un sistema invii in una qualsiasi direzione una quantità di energia rappresentata da tre milioni di joule; il calcolo mostra che il rinculo corrispondente potrebbe conferire a una massa di 1 chilogrammo una velocità di 1 cm. al secondo.

**352.** Si potrebbe anche dire che se il principio dell'uguaglianza di azione e reazione sembra violato, ciò è forse dovuto al fatto che non si è tenuto conto del movimento dell'etere. Consideriamo dunque questa obiezione e vediamo a quale conclusione ci condurrà. Affinché il principio in questione non venga violato, la proiezione della velocità dell'etere sull'asse  $x$  deve essere rappresentata da  $(\beta h - \gamma g)$ : questo è il vettore radiante a meno di una costante; ciò ci porta alla seguente conclusione: se il campo raddoppiasse, la velocità dell'etere quadruplicherebbe. Ciò ovviamente non è soddisfacente.

**353.** Integrazione delle equazioni di Lorentz. Riassumiamo le equazioni di Lorentz che abbiamo stabilito in precedenza. Abbiamo trovato,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta F = -4\pi u \\ \Delta G = -4\pi v \\ \Delta H = -4\pi w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} g + \frac{dG}{dt} + \frac{d\psi}{dy} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} h + \frac{dH}{dt} + \frac{d\psi}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

$$\sum \frac{dF}{dx} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0$$

Ci proponiamo di integrare le equazioni supponendo che il moto di tutte le particelle sia noto, il che equivale a considerare  $\rho, \xi, \eta, \zeta$  come noti.

**354.** Il metodo che andremo ad usare sarà analogo a quello usato nelle oscillazioni hertziane<sup>41</sup>. Ricordiamo a questo proposito la definizione di ciò che chiamiamo *potenziale ritardato*.

<sup>41</sup>H. POINCARÉ. *Oscillations électriques*, p. 74. G., Carré et C. Naud, éditeurs.

Consideriamo un certo numero di punti attrattivi  $M$  e sia  $M_K$  il punto attratto; sia ancora  $m_K$  la massa di tale punto e  $r_K$  la distanza tra i punti attraenti e il punto attratto. Il potenziale in  $M_K$  è per definizione,

$$V = \sum \frac{m_k}{r_k}$$

Ma se le masse  $m_K$  dipendono dal tempo, a causa della densità  $\rho$  che è funzione di  $x, y, z; t$ , anche il potenziale dipenderà dal tempo. Infatti, poiché la propagazione di una perturbazione (elettrica o magnetica) avviene con una velocità finita,  $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$ , (che è la velocità della luce), il potenziale per propagarsi da  $M$  a  $M_k$  richiederà quindi un tempo  $r_K\sqrt{K_0}$ ; l'azione in  $M_K$  si calcherà assegnando alla massa  $m_K$  non il valore che ha al tempo  $t$ , ma il valore  $m'_K$  che aveva all'istante  $t - r_K\sqrt{K_0}$ ; il valore del potenziale sarà quindi rappresentato da,

$$V' = \sum \frac{m'_k}{r_k}$$

ed è a questa nuova espressione del potenziale che diamo il nome di potenziale ritardato.

Si può anche considerare i potenziali ritardati dovuti ad un materiale attrattivo, che invece di essere distribuito in un certo numero di punti attrattivi, si costituirebbe di un volume attrattivo. Sia  $f(x, y, z; t)$  la densità della materia attrattiva e sia  $d\tau'$  un elemento di volume di coordinate  $x', y', z'$ . Il potenziale ordinario di questo volume attrattivo sarà

$$V = \int \frac{f(x', y', z'; t) d\tau'}{r}$$

dove  $r$  è dato da

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Se la propagazione di una perturbazione avviene alla velocità della luce, il potenziale ritardato, definito come sopra, avrà allora il valore,

$$V' = \int \frac{f(x', y', z'; t - r\sqrt{K_0})}{r} d\tau'$$

Esaminando queste ultime due formule, si vede che nel caso dei potenziali ordinari il numeratore (che rappresenta la massa attrattiva) dipende solo da  $x', y', z'$ . Mentre nel caso dei potenziali ritardati è funzione non solo di  $x', y', z'$  ma dipende anche da  $x, y, z$ , tramite  $r$ .

**355.** Richiamate queste premesse, vediamo cosa accade alla relazione di Poisson nel caso dei potenziali ritardati. Nel caso dei potenziali ordinari avevamo,

$$\Delta V = -4\pi f$$

Con i potenziali ritardati avremo,

$$\Delta V' - K_0 \frac{d^2 V'}{dt^2} = -4\pi f$$

Per sintetizzare introduciamo il simbolo seguente, ponendo,

$$\Delta U - K_0 \frac{d^2 U}{dt^2} = \square U$$

dove  $U$  indica una funzione qualunque.

Con questa notazione l'equazione di Poisson diviene

$$\square V' = -4\pi f'$$

Questa equazione, se consideriamo  $f$  come dato e  $V'$  come incognita, non ha altra soluzione, sempre che si ammetta di partire da riposo e che tutte le funzioni si annullino all'infinito.

Da quanto sopra consegue che la relazione

$$\square U = \square V$$

che porta alla seguente

$$U = V$$

**356.** Applichiamo questi principi alla questione che ci occupa.

Introduciamo una funzione analoga a  $\psi$  che chiamerò  $\psi'$  e che svolgerà il ruolo del potenziale elettrostatico:  $\psi'$  sarà il potenziale ritardato dovuto alla stessa materia come nel caso dei potenziali ordinari.

Avremo quindi

$$\square \psi' = -\frac{4\pi}{K_0} \rho$$

Facciamo lo stesso per il potenziale vettore; introduciamo un vettore di componenti  $F', G', H'$  analogo al vettore potenziale. Questa quantità sarà definita

$$\square F' = -4\pi \rho \xi$$

ed è opportuno fare una piccola osservazione su questo argomento; nel caso del potenziale vettoriale ordinario avevamo,

$$\Delta F - 4\pi u = -4\pi \rho \xi - 4\pi \frac{df}{dt}$$

$F$  era quindi il potenziale ordinario dovuto ad un materiale attrattivo la cui densità era la corrente totale

$$u = \rho \xi + \frac{df}{dt}$$

nel caso attuale la densità della materia fittizia è solo la corrente di convezione.

Abbiamo altresì supposto che  $\rho, \xi, \eta, \zeta$  sono noti; ne deriva che anche  $F', G', H'$  saranno noti.

**357.** Mi propongo ora di dimostrare le relazioni seguenti,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dH'}{dy} - \frac{dG'}{dz} \\ \beta = \frac{dF'}{dz} - \frac{dH'}{dx} \\ \gamma = \frac{dG'}{dx} - \frac{dF'}{dy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF'}{dt} + \frac{d\psi'}{dx} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} g + \frac{dG'}{dt} + \frac{d\psi'}{dy} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} h + \frac{dH'}{dt} + \frac{d\psi'}{dz} = 0 \end{cases}$$

Queste relazioni ci daranno l'intero campi e il problema sarà allora completamente risolto.

Calcoliamo dapprima  $\square F$ .

Abbiamo,

$$\square F = \Delta F - K_0 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi u - K_0 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi \rho \xi - 4\pi \frac{df}{dt} - K_0 \frac{d^2 F}{dt^2} = \square F' - 4\pi \frac{df}{dt} - K_0 \frac{d^2 F}{dt^2}$$

calcoliamo allora  $4\pi \frac{df}{dt} - K_0 \frac{d^2 F}{dt^2}$ .

Partiamo dall'equazione

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0$$

che, differenziata rispetto al tempo, dà

$$4\pi \frac{df}{dt} + K_0 \frac{d^2 F}{dt^2} + K_0 \frac{d^2 \psi}{dx dt} = 0$$

da cui

$$-4\pi \frac{df}{dt} - K_0 \frac{d^2 F}{dt^2} = K_0 \frac{d^2 \psi}{dx dt}$$

La relazione in  $\square F$  diviene pertanto,

$$\square F = \square F' + K_0 \frac{d^2 \psi}{dx dt}$$

e si otterrà con un calcolo analogo

$$\square G = \square G' + K_0 \frac{d^2 \psi}{dy dt}$$

$$\square H = \square H' + K_0 \frac{d^2 \psi}{dz dt}$$

Differenziamo ora la terza di queste equazioni rispetto a  $y$ , la seconda rispetto a  $z$  e sottraiamo; viene così

$$\frac{d}{dy} \square H - \frac{d}{dz} \square G = \square \alpha = \square \left( \frac{dH'}{dy} - \frac{dG'}{dz} \right)$$

da cui

$$\alpha = \frac{dH'}{dy} - \frac{dG'}{dz}$$

e con un calcolo analogo

$$\beta = \frac{dF'}{dz} - \frac{dH'}{dx}$$

$$\gamma = \frac{dG'}{dx} - \frac{dF'}{dy}$$

Come volevasi dimostrare.

Dimostriamo ora la relazione

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0$$

Calcoliamo per questo

$$\square \frac{4\pi}{K_0} f = -\square \frac{dF}{dt} - \square \frac{d\psi}{dx}$$

Abbiamo,

$$\begin{aligned} \square \psi &= \square \psi' - K_0 \frac{d^2 \psi}{dt^2} \\ \square \frac{dF}{dt} &= \square \frac{dF'}{dt} - K_0 \frac{d^3 \psi}{dx dt^2} \\ \square \frac{d\psi}{dx} &= \square \frac{d\psi'}{dx} - K_0 \frac{d^3 \psi}{dx dt^2} \end{aligned}$$

Ciò ci permette di scrivere

$$\square \frac{4\pi}{K_0} f = -\square \frac{dF'}{dt} - \square \frac{d\psi'}{dx}$$

da cui la relazione cercata

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF'}{dt} + \frac{d\psi'}{dx} = 0$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \frac{4\pi g}{K_0} + \frac{dG'}{dt} + \frac{d\psi'}{dy} &= 0 \\ \frac{4\pi h}{K_0} + \frac{dH'}{dt} + \frac{d\psi'}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

**358.** Consideriamo ancora la relazione

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0$$

che, moltiplicata per  $-4\pi$ , dà

$$-4\pi \frac{d\rho}{dt} - 4\pi \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0$$

Ora

$$\square\psi' = -\frac{4\pi}{K_0}\rho$$

da cui

$$\square K_0 \frac{d\psi'}{dt} = -4\pi \frac{d\rho}{dt}$$

e poi

$$\square F' = -4\pi\rho\xi$$

da cui

$$\frac{d(.4\pi\rho\xi)}{dx} = \square \frac{dF'}{dx}$$

la relazione in questione diviene pertanto,

$$\square K_0 \frac{d\psi'}{dt} + \sum \square \frac{dF'}{dx} = 0$$

da cui infine

$$K_0 \frac{d\psi'}{dt} + \sum \frac{dF'}{dx} = 0$$

Quindi vediamo che la soluzione è completa. Aggiungo che è unica se assumiamo, come abbiamo fatto, che si parte dalla quiete e che le nostre funzioni si annullano all'infinito. Quest'ultima ipotesi presuppone che non vi siano perturbazioni provenienti dall'esterno: le perturbazioni sono limitati. La perturbazione totale sarà quindi la somma delle perturbazioni parziali e il campo totale sarà quindi la somma dei campi parziali dovuti a ciascuna particella, calcolando il campo di ciascuna particella come se la particella esistesse da sola.

## B. - Fenomeni che si presentano a un osservatore aventi sensi grossolani

**359.** Esaminiamo ora i fenomeni così come appaiono a un osservatore dotato di sensi grossolani come i nostri.

Consideriamo una particella carica in movimento e cerchiamo le condizioni per il suo equilibrio. Scriviamo che questa particella, in virtù del principio di d'Alembert, è in equilibrio sotto l'azione delle forze che agiscono su di essa, tra cui la forza d'inerzia.

Valutiamo queste diverse forze. Abbiamo :

1° La forza d'inerzia della particella; questa forza è trascurabile (almeno nel nostro caso) perché abbiamo ipotizzato che la particella abbia dimensioni molto piccole.

2° Azione del campo elettromagnetico sulla particella. Questa azione è, come abbiamo visto, espressa da

$$\frac{4\pi}{K_0} \int \rho_0 d\tau f + \int \rho_0 d\tau (\eta\gamma - \zeta\beta) \quad (1)$$

Questa azione può essere a sua volta divisa in due parti:

- a) Primo campo parziale, dovuto al moto della particella stessa, e
- b) Secondo campo parziale dovuto al moto di tutte le particelle all'interno e all'esterno del conduttore chiuso.

La prima di queste azioni è trascurabile. Sarebbe rigorosamente nulla se il principio di uguaglianza di azione e reazione fosse verificato dalla teoria di Lorentz, il quale ha calcolato questa azione della particella su se stessa e, secondo i suoi calcoli, il suo valore, proporzionale peraltro alla forza d'inerzia, sarebbe del tutto trascurabile.

Per quanto riguarda il campo dovuto all'azione di tutte le particelle su quella considerata, lo si può supporre uniforme, poiché questa particella, essendo molto piccola,  $f, \gamma, \alpha, \eta, \zeta$  possono essere considerati costanti, per cui se poniamo

$$\int \rho_0 d\tau = e$$

dove  $e$  è la carica della particella, troviamo allora per proiezione di questa azione sull'asse  $x$ ,

$$\frac{4\pi}{K_0}ef + e(\eta\gamma - \zeta\beta)$$

3° L'attrito della particella contro il conduttore in cui si muove; questa forza è proporzionale alla velocità relativa della particella rispetto a quella del conduttore. Se chiamiamo  $\xi, \eta, \zeta$  la velocità della particella e  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  quella del conduttore attraverso il quale la particella si sposta e se d'altra parte indichiamo con  $\lambda$  il coefficiente d'attrito, questa forza sarà rappresentata da

$$\frac{\xi - \xi_1}{\lambda}$$

di modo che il principio di d'Alembert è espresso dalla relazione seguente,

$$\frac{\xi - \xi_1}{\lambda} = \frac{4\pi}{K_0}ef + e(\eta\gamma - \zeta\beta) \quad (2)$$

**360.** Consideriamo ora un elemento di volume  $D\tau$ ; molto piccolo rispetto ai nostri sensi grossolani, ma comunque abbastanza grande da contenere un numero piuttosto elevato di particelle. Se chiamiamo  $\rho_1$  la densità *media* dell'elettricità in questo volume, abbiamo,

$$\rho_1 D\tau = \sum e$$

D'altra parte, queste particelle che si trovano all'interno del volume  $D\tau$  considerato, sono in movimento: esiste quindi una corrente, le cui componenti sono,

$$\frac{\sum e\xi}{D\tau} \quad \frac{\sum e\eta}{D\tau} \quad \frac{\sum e\zeta}{D\tau}$$

si ha identicamente

$$\begin{aligned} \frac{\sum e\xi}{D\tau} &= \frac{\sum e(\xi - \xi_1)}{D\tau} + \frac{\sum e\xi_1}{D\tau} \\ \frac{\sum e\eta}{D\tau} &= \frac{\sum e(\eta - \eta_1)}{D\tau} + \frac{\sum e\eta_1}{D\tau} \\ \frac{\sum e\zeta}{D\tau} &= \frac{\sum e(\zeta - \zeta_1)}{D\tau} + \frac{\sum e\zeta_1}{D\tau} \end{aligned}$$

Il primo termine del secondo membro di queste relazioni, dovuto, come si vede, al moto relativo della particella, rappresenta la *corrente di conduzione*. Indichiamo le sue componenti con  $p, q, r$ ; avremo così

$$\frac{\sum e(\xi - \xi_1)}{D\tau} = p, \quad \text{ecc.}$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum e(\xi - \xi_1) &= pD\tau \\ \sum e(\eta - \eta_1) &= qD\tau \\ \sum e(\zeta - \zeta_1) &= rD\tau \end{aligned}$$

Il secondo termine del secondo membro delle identità precedenti rappresenta la *corrente di convezione*; si può quindi scrivere,

$$\begin{aligned}\sum e\xi_1 &= \rho_1\xi_1 D\tau \\ \sum e\eta_1 &= \rho_1\eta_1 D\tau \\ \sum e\zeta_1 &= \rho_1\zeta_1 D\tau\end{aligned}$$

di modo che l'identità diviene, tenendo conto di queste relazioni,

$$\begin{cases} \sum e\xi = D\tau (p + \rho_1\xi_1) \\ \sum e\eta = D\tau (q + \rho_1\eta_1) \\ \sum e\zeta = D\tau (r + \rho_1\zeta_1) \end{cases}$$

Queste sono le tre componenti della corrente che deriva dal movimento delle particelle che si trovano all'interno del volume  $D\tau$  considerato.

### 361. Calcolo dell'azione meccanica

Qual è il valore dell'azione meccanica esercitata sull'elemento di volume  $D\tau$  considerato?

La particella, come abbiamo visto, sfrega sul conduttore in cui si muove, e l'azione esercitata su di essa dal conduttore (la resistenza opposta al movimento della particella) ha come proiezione sull'asse  $x$ ,

$$\frac{\xi_1 - \xi}{\lambda}$$

La reazione della particella sarà pertanto

$$\frac{\xi - \xi_1}{\lambda}$$

e la somma di queste reazioni sarà

$$\sum \frac{\xi - \xi_1}{\lambda}$$

Quindi, per avere l'azione meccanica che si esercita sull'elemento di volume  $D\tau$  considerato, è necessario sommare tutte le azioni parziali esercitate su ciascuna particella che fa parte dell'elemento  $D\tau$ .

Anche qui possiamo scomporre il campo di integrazione in due parti:

- 1° Il campo dovuto alle particelle che si trovano all'interno di  $D\tau$ ;
- 2° Il campo dovuto alle particelle situate all'esterno di  $D\tau$ .

Si noti che il primo campo sarebbe nullo se il principio di uguaglianza di azione e reazione non fosse violato dalla teoria di Lorentz; ma se l'energia è distribuita in modo simmetrico, il principio in questione è all'incirca verificato. Ora questa distribuzione simmetrica dell'energia sarà in generale realizzata: il campo di integrazione che ci interessa può di conseguenza essere assunto nullo.

Il secondo campo parziale può essere considerato costante all'interno dell'elemento di volume  $D\tau$ ; ciò equivale a supporre che  $\xi, \eta, \zeta$  sono costanti.

Si giunge quindi all'azione meccanica cercata.

$$\sum \frac{\xi - \xi_1}{\lambda} = \frac{4\pi}{K_0} f \rho_1 D + [\gamma D\tau (q + \rho_1\eta_1) - \beta D\tau (r + \rho_1\zeta_1)]$$

Il primo termine del secondo membro di questa relazione rappresenta l'azione del campo elettrico sull'elemento di volume  $D\tau$ . Questa azione è, come si vede, proporzionale alla carica elettrica e dell'elemento  $D\tau$  e alla forza elettrica  $\frac{4\pi}{K_0} f$ : questa forza elettrica è qui la forza

elettrica *totale*; non vi è quindi solo la forza elettrica di origine elettrostatica  $\left(-\frac{d\psi}{dx}\right)$  ma anche quella dovuto all'induzione elettromagnetica  $\left(-\frac{dF}{dt}\right)$ . Vi è quindi accordo su questo punto con la teoria di Hertz.

Il termine tra parentesi rappresenta l'azione meccanica del campo magnetico. Nella teoria di Hertz la corrente che subisce questa azione meccanica è la corrente totale, cioè la corrente di conduzione, più la corrente di spostamento, più la corrente di Rowland e più la corrente di Rontgen; qui la corrente che interviene è semplicemente la corrente di conduzione più la corrente di convezione.

*Secondo le idee di Lorentz, la corrente di spostamento non subirebbe quindi alcuna azione meccanica.*

### 362. Calcolo della forza elettromotrice

Calcoliamo ora la *forza elettromotrice*. Valutiamo perciò  $p$ . Abbiamo

$$p = \frac{\sum e(\xi_1 - \xi)}{D\tau}$$

Moltiplichiamo le equazioni (2) per  $\frac{e\lambda}{D\tau}$  e sommiamo, viene

$$\frac{\sum e(\xi_1 - \xi)}{D\tau} = p = \frac{\sum e^2\lambda}{D\tau} \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{\sum e^2\lambda}{D\tau} (\eta\gamma - \zeta\beta) \quad (3)$$

e impieghiamo lo stesso artificio del calcolo appena eseguito: abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\sum e^2\lambda\eta}{D\tau} &= \frac{\sum e^2(\eta - \eta_1)\lambda}{D\tau} + \frac{\sum e^2\eta_1\lambda}{D\tau} \\ \frac{\sum e^2\lambda\zeta}{D\tau} &= \frac{\sum e^2(\zeta - \zeta_1)\lambda}{D\tau} + \frac{\sum e^2\zeta_1\lambda}{D\tau} \end{aligned}$$

La relazione (3) si può quindi scrivere

$$p = \frac{\sum e^2\lambda}{D\tau} \frac{4\pi}{K_0} f + \gamma \left[ \frac{\sum e^2(\eta - \eta_1)\lambda}{D\tau} + \frac{\sum e^2\eta_1\lambda}{D\tau} \right] - \beta \left[ \frac{\sum e^2(\zeta - \zeta_1)\lambda}{D\tau} + \frac{\sum e^2\zeta_1\lambda}{D\tau} \right] \quad (4)$$

Posso supporre che

$$\frac{\sum e^2(\eta - \eta_1)\lambda}{D\tau} = \frac{\sum e^2(\zeta - \zeta_1)\lambda}{D\tau} = 0$$

A priori, questa ipotesi sembra inammissibile; infatti,  $\sum e(\xi_1 - \xi)$ ,  $\sum e(\eta - \eta_1)$ ,  $\sum e(\zeta - \zeta_1)$ , non sono nulli e di conseguenza non vi è ragione perché  $\sum e^2(\xi_1 - \xi)$ , ecc. lo siano. Ciò si spiega però con il modo in cui concepiamo il meccanismo attraverso il quale si propaga una corrente. Dobbiamo infatti rappresentare una corrente come il movimento di due tipi di particelle, alcune positive, altre negative, che si muovono in versi opposti. Se consideriamo solo particelle positive,  $\xi - \xi_1$  ecc., avranno allora un segno ben determinato; avremo la stessa cosa per le particelle negative, solo che il segno sarà cambiato. Poiché così vale anche per  $e$  ne deriva che  $\sum e(\xi_1 - \xi)$ , ecc., non saranno mai nulli. Ma se si considerano i prodotti  $\sum e^2(\xi_1 - \xi)$ , ecc., dove  $e^2$  sarà positivo,  $\sum(\xi_1 - \xi)$ , ecc., potranno essere sia positivi che negativi, e vi sarà quindi neutralizzazione completa dei termini sotto il simbolo  $\sum$ . E ora si comprende bene la nullità delle espressioni  $\sum e^2(\xi_1 - \xi)$ , ecc.

Ciò stabilito, l'equazione (4) si può scrivere

$$p = \frac{\sum e^2\lambda}{D\tau} \left( \frac{4\pi}{K_0} f + \eta_1\gamma - \zeta_1\beta \right) \quad (5)$$

Il fattore  $\frac{\sum e^2 \lambda}{D\tau}$  che appare sul secondo membro di questa relazione, rappresenta la conducibilità specifica del mezzo conduttore; vediamo quindi che il coefficiente di conducibilità è proporzionale al coefficiente di attrito  $\lambda$ . Il termine che è tra parentesi rappresenta la forza elettromotrice, o meglio la sua proiezione sull'asse  $x$ .

363. Questo risultato mi ispira due riflessioni.

1° In primo luogo, vediamo che l'azione meccanica dipende dalla somma delle azioni meccaniche subite dalle particelle positive e dalle particelle negative all'interno del conduttore. La forza elettromotrice, che tende ad allontanare le particelle positive e quelle negative, al contrario, dipende solo dalla differenza nelle azioni che si esercitano sulle particelle positive da una parte e su quelle negative dall'altra.

2° Il termine  $\frac{4\pi}{K_0} f$  è ciò che abbiamo chiamato forza elettrica; vediamo allora che la forza elettrica differisce dalla forza elettromotrice: la forza elettromotrice contiene anche il termine  $(\eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta)$ . Nella teoria di Hertz, al contrario, vi era perfetta identità tra la forza elettrica e la forza elettromotrice: era la stessa forza a esercitare le azioni meccaniche e a produrre le correnti di spostamento.

Perché nella teoria di Lorentz non c'è uguaglianza tra queste due forze? Ciò avviene perché le correnti convettive sono dovute al movimento di particelle che subiscono due tipi di azioni meccaniche:

1° L'azione del campo elettrico, perché le particelle trasportano una carica elettrica;

2° L'azione del campo magnetico, perché le particelle subiscono correnti convettive.

Nella teoria di Hertz abbiamo,

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} - (\eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta) = 0$$

di modo che la forza elettrica era rappresentata da

$$\frac{4\pi}{K_0} f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} + (\eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta)$$

e la forza elettromotrice era rappresentata dalla stessa formula.

Non è più così nella teoria di Lorentz. Abbiamo visto, infatti, che

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0$$

per cui la forza elettrica ha per espressione

$$\frac{4\pi}{K_0} f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$$

allorché la forza elettromotrice, che indicherò con  $P'$ , ha per espressione, come vedremo,

$$\frac{4\pi}{K_0} f + (\eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta)$$

cioè

$$P' = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} + (\eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta)$$

L'espressione della forza elettromotrice è quindi la stessa in entrambe le teorie. D'altra parte, la forza elettrica ha valori diversi.

Per comprendere meglio questa differenza, esprimiamo il nostro pensiero in un'altra forma.

Se prendo, nella teoria di Hertz, un circuito chiuso  $C$  che limita una superficie  $S$ , indicando con  $P'$  la forza elettromotrice, la seguente espressione:

$$\int \sum P' dx$$

che rappresenta l'integrale di linea della forza elettrica (integrale preso lungo il contorno C), è uguale alla derivata del flusso di induzione magnetica che attraversa S, considerando questa superficie come trascinata nel movimento della materia.

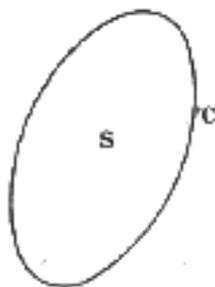


Fig. 55.

Nella teoria di Lorentz abbiamo per l'integrale di linea della forza elettromotrice

$$\int \sum P' dx$$

quindi uguale alla teoria di Hertz. Non è lo stesso per l'integrale di linea della forza elettrica. Infatti abbiamo in questo caso,

$$\int \sum P dx$$

Cosa significa questo? Ricordiamo che  $P$  deriva da  $P'$  ponendolo  $\xi_1 = \eta_1 = 0$ ; questo integrale avrà quindi la stessa interpretazione della teoria di Hertz, ma supponendo che la superficie  $S$  non trascinata nel movimento della materia.

Ecco allora ciò che  $P$  e  $P'$  rappresentano nella teoria di Lorentz.

1° Per quanto riguarda la forza elettromotrice  $P'$ , si ha dapprima il termine  $-\frac{d\psi}{dx}$ : è la forza elettromotrice di origine elettrostatica; poi il termine  $-\frac{dF}{dt}$ : è la forza elettromotrice di induzione dovuta alla variazione del campo magnetico; e infine  $(\eta_1\gamma - \zeta_1\beta)$ : è la forza elettromotrice di induzione dovuta al movimento del circuito.

2° Per la forza elettrica  $P$ , si ha che i primi due termini;  $-\frac{d\psi}{dx}$  e  $-\frac{dF}{dt}$ : essa sarà quindi prodotta soltanto dalle azioni elettrostatiche e dalla variazione del campo magnetico. Il movimento della materia in questo campo non produrrà quindi una forza elettrica, bensì una forza elettromotrice.

Supponiamo quindi che un dielettrico, ad esempio l'aria, si muova in un campo non uniforme; secondo Lorentz non ci sarà corrente di spostamento poiché non ci sarà forza elettrica. La teoria di Hertz, al contrario, prevede la nascita di una corrente di spostamento.

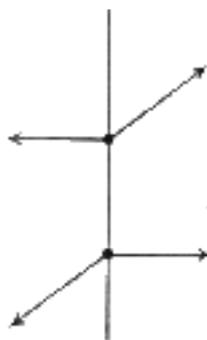


Fig. 56.

Per comprendere la natura di questa azione, consideriamo un conduttore che si muove in un campo magnetico perpendicolare sia alla velocità del conduttore sia alla direzione del filo conduttore e di conseguenza al piano del tavolo; allora, considerando due particelle, una carica positivamente, l'altra carica negativamente, le particelle positive trasportate dal conduttore in movimento produrranno una corrente di convezione; le particelle negative produrranno un'altra corrente di convezione di senso contrario al precedente. Quale sarà l'azione del campo magnetico sulle due particelle considerate? Si avrà per la prima particella una forza diretta in un certo verso e per l'altra particella, una forza diretta in verso contrario al precedente; l'azione meccanica sul conduttore è la somma algebrica di queste due forze uguali e contrarie; essa è quindi nulla. La forza elettromotrice che tende a separare le particelle è la differenza di queste due forze; non è nulla: questa è l'origine della forza elettromotrice d'induzione.

### 364. Fenomeno di Hall

Consideriamo un conduttore immobile. L'equazione (2) diviene in questo caso

$$\xi = e\lambda \frac{4\pi}{K_0 f} + e\lambda (\eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta)$$

e analogamente la (5) diviene

$$p = \frac{\sum e^2 \lambda}{D\tau} \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{\sum e^2 \lambda}{D\tau} \eta_1 \gamma - \zeta_1 \beta$$

Osservo dapprima che, essendo la particella molto piccola, il prodotto  $e\lambda$  è molto piccolo; pertanto, in prima approssimazione

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= 0 \end{aligned}$$

Ciò vuol dire che le velocità delle particelle sono molto piccole rispetto alla velocità della luce.

In secondo approssimazione abbiamo,

$$\xi = e\lambda \frac{4\pi}{K_0 f}$$

e

$$p = \frac{\sum e^2 \lambda}{D\tau} \frac{4\pi}{K_0} f$$

di conseguenza,

$$\begin{aligned} \xi &= e\lambda p \frac{D\tau}{\sum e^2 \lambda} \\ \eta &= e\lambda q \frac{D\tau}{\sum e^2 \lambda} \\ \zeta &= e\lambda r \frac{D\tau}{\sum e^2 \lambda} \end{aligned}$$

Osserviamo che il fattore  $\frac{\sum e^2 \lambda}{D\tau}$  rappresenta la conducibilità specifica del corpo, che indicherò con  $C$ ; porremo quindi

$$\frac{\sum e^2 \lambda}{D\tau} = C$$

e le relazioni

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{e\lambda p}{C} \\ \eta &= \frac{e\lambda q}{C} \\ \zeta &= \frac{e\lambda r}{C} \end{aligned}$$

Sostituendo  $p, q, r; \xi, \eta, \zeta$  per i loro valori, si ha infine

$$\begin{cases} p = C \frac{4\pi f}{K_0} + \frac{\sum e^2 \lambda^2}{CD\tau} (q\gamma - r\beta) \\ q = C \frac{4\pi g}{K_0} + \frac{\sum e^2 \lambda^2}{CD\tau} (r\alpha - p\gamma) \\ r = C \frac{4\pi h}{K_0} + \frac{\sum e^2 \lambda^3}{CD\tau} (p\beta - q\alpha) \end{cases}$$

da cui

$$\text{forza elettromotrice} = \begin{cases} \frac{p}{C} = \frac{4\pi f}{K_0} + \frac{\sum e^2 \lambda^2}{C^2 D\tau} (q\gamma - r\beta) \\ \frac{q}{C} = \frac{4\pi g}{K_0} + \frac{\sum e^2 \lambda^2}{C^2 D\tau} (r\alpha - p\gamma) \\ \frac{r}{C} = C \frac{4\pi h}{K_0} + \frac{\sum e^2 \lambda^2}{C^2 D\tau} (p\beta - q\alpha) \end{cases}$$

Poiché  $e$  è molto piccolo e anche  $\lambda$  è molto piccolo, e poiché da una parte ci sono particelle positive e particelle negative dall'altro,  $\sum e^2 \lambda^2$  è trascurabile e rimane semplicemente, *forza elettromotrice* =  $\left[ \frac{4\pi f}{K_0}, \frac{4\pi g}{K_0}, \frac{4\pi h}{K_0} \right] = \text{forza elettrica}$ . Se, al contrario,  $\sum e^2 \lambda^2$  non è trascurabile, che vale per certi corpi, alla forza elettromotrice,  $\frac{4\pi f}{K_0}, \frac{4\pi g}{K_0}, \frac{4\pi h}{K_0}$ , si deve allora aggiungere una forza elettromotrice supplementare,

$$\begin{cases} \frac{\sum e^2 \lambda^2}{CD\tau} (q\gamma - r\beta) \\ \frac{\sum e^2 \lambda^2}{CD\tau} (r\alpha - p\gamma) \\ \frac{\sum e^2 \lambda^3}{CD\tau} (p\beta - q\alpha) \end{cases}$$

È il *fenomeno di Hall*.

È una forza elettromotrice perpendicolare al conduttore da un lato e perpendicolare al campo magnetico dall'altro.

**365.** Questo risultato mi ispira una riflessione. Vi sono molte più possibilità che  $\sum e^2$  sia grande quanto  $\sum e$  sarà esso stesso più grande, cioè che il conduttore sarà fortemente carico.

Saremmo così portati a indagare se il fenomeno di Hall non esiste per tutti i metalli quando portano una carica forte e se non cambia segno con questa carica, quando questa è forte.

L'esperienza sarebbe interessante; non può, tuttavia, essere decisivo; se avesse avuto successo, infatti, il successo avrebbe potuto essere spiegato in moltissimi modi, oltre alla teoria di Lorentz. Se invece fallisse, questo non sarebbe un argomento inconfutabile contro questa teoria, poiché non possiamo avere a priori alcuna idea dell'ordine di grandezza del fenomeno.

## Cap IV - Dielettrici

**366.** Lorentz considera la massa dei dielettrici punteggiata di particelle cariche (ioni) come quella dei conduttori. Ma mentre in quest'ultimo caso ciascuna di queste particelle potrebbe muoversi liberamente, percorrendo qualsiasi distanza, nei dielettrici, al contrario, non possono deviare (o deviare di poco) dalla loro posizione di equilibrio, perché non appena se ne allontanano, una forza antagonista dovuta all'azione delle particelle vicine tende a riportarle indietro. Questa forza è proporzionale alla distanza se questa è piccola.

Nella teoria di Lorentz, come del resto in tutte le teorie dei dielettrici, lo stato di un dielettrico può essere paragonato a quello di un magnete. Quando il dielettrico viene immerso in un campo elettrico, le particelle si allontanano dalla loro posizione di equilibrio, formando piccole coppie di particelle opposte cariche elettricamente: il dielettrico è polarizzato. Ogni coppia di due particelle cariche di elettricità opposta, o meglio ogni elemento dielettrico per abbreviare il termine, è paragonabile a un piccolo magnete e, proprio come un magnete è un insieme di elementi magnetici, un dielettrico sarà un insieme di elementi dielettrici.

Lo stato di un dielettrico polarizzato è quindi simile a quello di un magnete. I principi della teoria dei magneti saranno quindi applicabili ai dielettrici.

Ricordiamo questi principi in poche parole.

### 367. Potenziale magnetico

Maxwell designa le componenti della magnetizzazione con  $A, B, C$  e ottiene come espressione del potenziale magnetico,

$$\Omega = \int \sum A' \frac{d^1}{dx'} d\tau'$$

essendo  $x', y', z'$  le coordinate del punto attratto,  $x, y, z$  le coordinate del punto attricante,  $r$  la distanza che li separa,  $d\tau'$  un elemento di volume,  $A'B', C'$  le componenti della magnetizzazione nel punto  $(x'y'z')$ .

Integriamo per parti questa espressione del potenziale; si ha

$$\Omega = \int \sum A'l' \frac{1}{r} d\omega' - \int \sum \frac{dA'}{dx'} \frac{1}{r} d\tau'$$

Il primo integrale deve essere esteso a tutti gli elementi  $d\omega'$  della superficie che delimita il magnete, e il secondo all'intero volume del magnete;  $l', m', n'$  designano i coseni direttori di  $d\omega'$  in modo tale che

$$A'l' + B'm' + C'n'$$

rappresenta la componente normale di magnetizzazione.

Il potenziale del magnete può quindi essere considerato come la somma di due potenziali:

1° Il potenziale di una superficie attricante di densità  $\sum A'l'$ , e

2° Il potenziale di un volume attricante di densità  $-\sum \frac{dA'}{dx'}$ .

Si noti che questo risultato vale non solo per la legge dell'inverso del quadrato della distanza, ma anche per qualsiasi legge di attrazione.

Se ad esempio il potenziale avesse l'espressione

$$\sum m\varphi(r)$$

otterremmo ancora, ripetendo il ragionamento precedente, la stessa formula finale.

In particolare questo risultato rimane ancora vero se suppongo che l'attrazione, invece di propagarsi istantaneamente, avvenga alla velocità della luce; come già sappiamo, tutto ciò si riduce all'introduzione dei potenziali ritardati.

### 368. Forza magnetica esterna a un magnete

Le componenti della forza magnetica esercitata sull'unità di massa magnetica positiva posta in un punto esterno al magnete valgono, indicandole con Maxwell con  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

### 369. Forza magnetica all'interno di un magnete

Per conoscere la forza magnetica esercitata sull'unità di massa magnetica positiva posta all'interno del magnete, è necessario produrre in esso una piccola cavità inserendovi un piccolo magnete *di prova*. Ma il potenziale si trova modificato dalla presenza di questa cavità, cioè  $\alpha, \beta, \gamma$  dipenderanno dalla forma della cavità.

Maxwell considera due forme particolari di cavità:

1° Cavità cilindrica di sezione infinitamente piccola: altezza molto grande rispetto alla sezione. Le generatrici del cilindro sono parallele alla direzione della magnetizzazione. In questo caso il potenziale in un punto all'interno di questa cavità sarà la differenza tra il potenziale iniziale, quando la cavità non esisteva, e il potenziale della massa cilindrica che è stata rimossa per ricavare la cavità. Quest'ultimo potenziale è, secondo quanto detto sopra, la somma di questi altri due potenziali:

a) Il potenziale proveniente dalla superficie del piccolo cilindro è considerato una superficie attrattiva. Dico che questo potenziale è nullo. Notiamo infatti che questa superficie è composta da due basi di sezione infinitamente piccola e dalla superficie laterale. Il termine proveniente dalle due basi è trascurabile. Per quanto riguarda quella proveniente dalla superficie laterale, è nullo; poiché la normale a questa superficie è perpendicolare alla direzione della magnetizzazione (le generatrici del cilindro sono parallele ad essa),

$$\sum A'l' = 0$$

b). Il potenziale derivante dal volume della piccola cavità. Questo potenziale è trascurabile perché il volume è un infinitesimo del terzo ordine.

Il potenziale in un punto all'interno di questa cavità è quindi lo stesso che avrebbe se questa cavità non esistesse.

2° Cavità cilindrica infinitamente appiattita. Con un ragionamento del tutto simile ai precedenti, i potenziali provenienti dal volume e dalla superficie laterale della cavità sono nulli. Rimane solo il potenziale che proviene dalle due basi della cavità; esso vale,

$$\int \frac{A'}{r} d\omega' - \int \frac{A'}{r'} d\omega'$$

ciascuno degli integrali essendo esteso alla superficie di ciascuna base del cilindro in questione.

Ora, avendo queste due basi una superficie molto grande rispetto alla loro distanza, la loro azione su un punto interno è  $4\pi A$ . Si ha quindi chiamando  $a$  la forza in un punto della cavità in questione.

$$\begin{aligned} a &= -\left(\frac{d\Omega}{dx} - 4\pi A\right) = \alpha + 4\pi A \\ b &= \beta + 4\pi B \\ c &= \gamma + 4\pi C \end{aligned}$$

Questi sono quelli che Maxwell chiama componenti dell'induzione magnetica.

3° Per una cavità sferica si trova,

$$a = \alpha + \frac{4}{3}\pi A, \text{ ecc.}$$

Tutti questi risultati saranno validi, come abbiamo già detto, con i potenziali ritardati, perché possiamo considerare la densità come costante mentre la perturbazione attraversa la cavità (supponendo naturalmente che le dimensioni della cavità siano molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda utilizzata).

**370.** Indichiamo ora, per concludere questi preliminari, le condizioni di equilibrio di un elemento magnetico.

Prendiamo questo elemento come centro di una sfera  $S$ . Esso deve essere in equilibrio sotto l'azione delle forze che agiscono su di esso.

Quali sono queste forze? — Si ha,

1° Le azioni dovute al volume esterno a questa sfera  $S$ ,

$$\alpha + \frac{4}{3}\pi A$$

2° Azioni dovute agli elementi interni alla sfera. Tali azioni sono nulle.

3° La forza che tende a riportare la particella nella sua posizione di equilibrio. Questa forza è proporzionale allo scarto se questo è piccolo, è quindi proporzionale ad  $\alpha$  e di conseguenza ad  $A$ .

Questi sono i preliminari che ho voluto stabilire per facilitare lo studio dei dielettrici secondo Lorentz.

Passeremo ora alla teoria di Lorentz vera e propria.

## A. - Elettrostatica

**371.** Applichiamo ai dielettrici i principi del calcolo appena ricordati. Consideriamo una particella e cerchiamo le condizioni di equilibrio di questa particella sotto l'azione delle forze che agiscono su di essa.

Descriviamo attorno a questa particella una sfera molto piccola in senso assoluto, ma tuttavia sufficientemente grande da contenere un numero piuttosto grande di particelle. Quali forze agiscono su questa particella? Queste sono:

1° *Le forze esterne alla sfera che abbiamo appena costruito.* Valutiamo queste forze. Per fare ciò, introduciamo un vettore che svolge lo stesso ruolo della magnetizzazione.

Siano  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate di un punto in condizioni di equilibrio e  $x, y, z$  le coordinate di questo stesso punto allo stato reale. Il momento elettrico avrà per componenti, indicando con  $e$  la carica della particella

$$\begin{aligned} e(x - x_0) \\ e(y - y_0) \\ e(z - z_0) \end{aligned}$$

Sia  $D\tau$  il volume della sfera descritta attorno alla particella considerata e indichiamo con  $X, Y, Z$  il valore medio di  $e(x - x_0)$ , ecc.; si avrà

$$\begin{aligned} \sum e(x - x_0) &= XD\tau \\ \sum e(y - y_0) &= YD\tau \\ \sum e(z - z_0) &= ZD\tau \end{aligned}$$

Il simbolo  $\sum$  si estende a tutte le particelle che si trovano all'interno della sfera  $S_1$ .  $X, Y, Z$  svolgeranno lo stesso ruolo di  $A, B, C$ .

Nel caso del magnetismo, abbiamo visto che la densità del magnetismo all'interno dell'elemento di volume  $d\tau$  era

$$-\sum \frac{dA}{dx}$$

Nel caso di un dielettrico avremo analogamente, sostituendo il vettore  $(A, B, C)$  con il vettore  $(X, Y, Z)$

$$-\sum \frac{dX}{dx}$$

Pertanto

$$\sum e = -D\tau \sum \frac{dX}{dx}$$

indicando il simbolo  $\sum$  del primo membro che la sommatoria deve estendersi a tutte le particelle contenute nel volume  $D\tau$ ; e il simbolo  $\sum$  del secondo membro una permutazione circolare tra le lettere  $X, Y, Z; x, y, z$ .

Nel caso del magnetismo, la relazione di Poisson si scriverà,

$$\Delta\Omega = 4\pi \sum \frac{dA}{dx}$$

avremo ora

$$\Delta\psi = \frac{4\pi}{K_0} \sum \frac{dX}{dx}$$

indicando con  $\psi$  il potenziale elettrostatico e dividendo il secondo membro di questa relazione per  $K_0$ , perché, come abbiamo già detto, utilizzeremo unità elettromagnetiche.

Se la cavità ha la forma di un cilindro infinitamente sottile e se è orientata come il vettore  $(X, Y, Z)$ , la forza elettrica avrà il valore

$$-\frac{d\psi}{dx}$$

Se la cavità è cilindrica, ma infinitamente appiattita, la forza elettrica sarà

$$-\frac{d\psi}{dx} + \frac{4\pi}{K_0} X$$

Nel caso di una sfera, si avrà

$$-\frac{d\psi}{dx} + \frac{4}{3}\pi \frac{1}{K_0} X \quad (1)$$

ed è quest'ultimo caso che ci interessa per il momento. L'espressione (1) rappresenta la forza elettrica dovuta alla parte esterna alla sfera  $S$ . Ora sappiamo che

$$P = \frac{4\pi}{K_0} f = -\frac{d\psi}{dx} - \frac{dF}{dt}$$

ma nel caso attuale (stato di equilibrio)  $\frac{dF}{dt} = 0$ : il potenziale vettore è nullo.

Rimane quindi

$$P = \frac{4\pi}{K_0} f = -\frac{d\psi}{dx}$$

La (1) diviene allora

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{4\pi}{K_0} \frac{X}{3}$$

o ancora se la carica della particella è  $e$ ,

$$\frac{4\pi}{K_0} e \left( f + \frac{X}{3} \right) \quad (2)$$

2° Azione delle particelle interne sulla superficie  $S'$ . Come nel caso dei magneti questa azione è nulla.

3° La forza che riporta la particella nella sua posizione di equilibrio. Questa forza è proporzionale alla distanza se questa è piccola. Quindi si ha per questa forza.

$$-\frac{4\pi}{K_0} \mu (x - x_0) \quad (3)$$

**372.** La somma delle due proiezioni (2) e (3) deve essere nulla; ciò si scrive

$$\frac{4\pi}{K_0} e \left( f + \frac{X}{3} \right) = \frac{4\pi}{K_0} \mu (x - x_0)$$

da cui moltiplicando per  $e$  i due membri di questa relazione

$$e(x - x_0) = \frac{e^2}{\mu} \left( f + \frac{X}{3} \right)$$

Per ottenere  $X$ , sommiamo le relazioni simili per tutte le particelle che si trovano all'interno del volume  $D\tau$  e dividiamo per  $D\tau$ ; viene così,

$$\frac{\sum e(x - x_0)}{D\tau} = X = \sum \frac{e^2}{\mu D\tau} \left( f + \frac{X}{3} \right) \quad (4)$$

Poniamo ora,

$$\sum \frac{e^2}{\mu D\tau} = L$$

La (4) diviene

$$\frac{X}{L} = f + \frac{X}{3}$$

da cui

$$f = X \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{3} \right)$$

Questa relazione ci mostra che esiste proporzionalità tra  $f$  e  $X$ ; esplicitiamo il fattore proporzionalità. Innanzitutto sappiamo che Maxwell, in un dielettrico diverso dall'aria, considera lo spostamento in blocco, che corrisponde nella teoria di Lorentz a quello dovuto all'etere,  $f$ , e a quello dovuto alla particella,  $X$ . Quindi

$$f + X = \frac{K}{4\pi} P = -\frac{K}{4\pi} \frac{d\psi}{dx}$$

d'altra parte

$$\frac{4\pi}{K_0} f = -\frac{d\psi}{dx}$$

da cui

$$f = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d\psi}{dx}$$

pertanto

$$\frac{f + X}{K} = \frac{f}{K_0} = \frac{X}{K - K_0}$$

da cui

$$f = X \frac{K_0}{K - K_0}$$

Il fattore di proporzionalità vale quindi  $\frac{K_0}{K - K_0}$ .

## B. Elettrodinamica dei corpi in quiete

**373.** Va notato che i nostri sensi grossolani possono raggiungere solo il valore medio dei fenomeni; dovremo quindi, nel seguito, considerare il valore medio delle nostre funzioni; la domanda allora è se le formule che abbiamo trovato in precedenza saranno valide anche in questo caso.

In primo luogo, il valore medio di una funzione  $u$  nel punto  $(x, y, z)$  è

$$\bar{u} = \frac{\int u d\tau}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$$

con l'integrale esteso a una piccola sfera di raggio  $\varepsilon$  e avente come centro il punto  $(x, y, z)$ .

Risulta pertanto

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{d\bar{u}}{dx}$$

**374.** Le relazioni che in precedenza abbiamo trovato essere lineari, continueranno quindi a sussistere anche nel caso presente. Avremo quindi,

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{dH'}{dy} - \frac{dG'}{dz} \\ \beta = \frac{dF'}{dz} - \frac{dH'}{dx} \\ \gamma = \frac{dG'}{dx} - \frac{dF'}{dy} \end{cases} \quad (2)$$

$F', G', H'$  sono le componenti del vettore che agisce come potenziale vettore e che è il potenziale ritardato di una massa attrattiva avente la densità delle tre componenti della corrente convettiva.

Si avrà pertanto

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF'}{dt} + \frac{d\psi'}{dx} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} g + \frac{dG'}{dt} - \frac{d\psi'}{dy} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} h + \frac{dH'}{dt} - \frac{d\psi'}{dz} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \square F' = -4\pi \left( u - \frac{df}{dt} \right) \\ \square G' = -4\pi \left( v - \frac{dg}{dt} \right) \\ \square H' = -4\pi \left( w - \frac{dh}{dt} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\square \psi' = \frac{4\pi}{K_0} \sum \frac{dX}{dx} \quad (5)$$

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho = - \sum \frac{dX}{dx} \quad (6)$$

**375.** Quanto alla relazione

$$u = \frac{df}{dt} + \rho\xi$$

non mantiene la stessa forma. Per vedere cosa diviene, cerchiamo il valore medio di  $\rho\xi$ .

Abbiamo per questo valore medio,

$$\frac{\sum e \frac{dx}{dt}}{D\tau} = \frac{dX}{dt}$$

pertanto,

$$u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} \quad (7)$$

### 376. Condizioni di equilibrio di una particella

Consideriamo una piccola cavità sferica che circonda la particella e valutiamo le forze che agiscono su questa particella. Abbiamo:

1° La forza d'inerzia: questa forza è stata trascurata per i conduttori, ma ora non possiamo più trascurarla, perché nel caso dei dielettrici possiamo avere vibrazioni estremamente rapide. Questa forza vale,

$$\frac{4\pi}{K_0} m \frac{d^2x}{dt^2}$$

2° L'azione del campo. Questa azione può essere suddivisa in tre parti:

a) Il campo prodotto dalla particella stessa. Questo campo è trascurabile. Lorentz lo ha calcolato, ma per mancanza di tempo non riprodurremo qui il suo calcolo.

b) L'azione prodotta dalle particelle che si trovano all'interno della sfera che circonda la particella in questione. Questa azione è nulla.

c) L'azione del campo esterno. Questa azione vale,

$$\frac{4\pi}{K_0} e f + e(\eta\gamma - \zeta\beta)$$

Ma cos'è  $f$ ? Abbiamo

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF'}{dt} + \frac{d\psi'}{dx} = 0$$

da cui deduciamo il valore di  $f$ . Ma ricordiamo che abbiamo ricavato una piccola cavità sferica nell'elemento  $D\tau$  attorno al punto  $(x, y, z)$  e questa cavità modifica il campo. Qual è questa modifica? Innanzitutto, il termine in  $\frac{dF'}{dt}$  non è modificato; e questo è comprensibile, perché il potenziale vettore  $F'$  proviene da un materiale la cui densità è  $\frac{d^2x}{dt^2}$ . Ma non è più così per il termine  $\frac{d\psi'}{dx}$ . Trattandosi di una sfera questo termine viene modificato dal cambiamento di  $f$  in  $f + \frac{X}{3}$ . (Vedi in precedenza, n° 371).

Si avrà pertanto

$$\frac{4\pi}{K_0} e \left( f + \frac{X}{3} \right) + e(\eta\gamma - \zeta\beta)$$

3° La forza elastica che tende a riportare la particella nella sua posizione di equilibrio. Questa forza è rappresentata da,

$$\frac{4\pi}{K_0} \mu (x - x_0)$$

L'equazione dell'equilibrio della particella considerata si scrive allora.

$$\frac{4\pi}{K_0} \mu (x - x_0) + \frac{4\pi}{K_0} m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4\pi}{K_0} e \left( f + \frac{X}{3} \right) + e(\eta\gamma - \zeta\beta)$$

**377.** Moltiplichiamo per  $e$  i due membri di questa equazione; si ha

$$e(x - x_0) + \frac{em}{\mu} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e^2}{\mu} \left( f + \frac{X}{3} \right) + \frac{e^2}{\mu} (\eta\gamma - \zeta\beta) \frac{K_0}{4\pi}$$

Facciamo ora la somma per tutte le particelle che si trovano all'interno di  $D\tau$  e dividiamo per  $D\tau$ ; si ha, supponendo che  $\frac{m}{\mu}$  è lo stesso per tutte le particelle,

$$\frac{\sum e(x - x_0)}{D\tau} + \frac{\frac{m}{\mu} \sum e \frac{d^2x}{dt^2}}{D\tau} = \sum \frac{e^2}{\mu D\tau} \left( f + \frac{X}{3} \right) + \frac{K_0}{4\pi} \left( \gamma \sum \frac{e^2 \eta}{\mu D\tau} - \beta \sum \frac{e^2 \zeta}{\mu D\tau} \right)$$

Ora,

$$\frac{\sum e(x - x_0)}{D\tau} = X$$

da cui

$$\frac{\sum e \frac{d^2 x}{dt^2}}{D\tau} = \frac{d^2 X}{dt^2}$$

D'altra parte

$$\sum \frac{e^2}{\mu D\tau} = L$$

L'equazione dell'equilibrio diviene pertanto,

$$X + \frac{m}{\mu} \frac{d^2 X}{dt^2} = L \left( f + \frac{X}{3} \right) + \frac{K_0}{4\pi} \left( \gamma \sum \frac{e^2 \eta}{\mu D\tau} - \beta \sum \frac{e^2 \zeta}{\mu D\tau} \right)$$

**378.** Se trattiamo corpi in quiete, allora

$$\eta = \frac{dy}{dt}$$

e di conseguenza,

$$\frac{K_0}{4\pi} \sum \frac{e^2 \eta}{D\tau} = \frac{K_0}{4\pi} e \sum \frac{e \eta}{D\tau} = \frac{K_0}{4\pi} e \sum \frac{e \frac{dy}{dt}}{D\tau} = \frac{K_0}{4\pi} e \frac{dY}{dt}$$

Con un calcolo analogo si avrà

$$\frac{K_0}{4\pi} e \frac{dZ}{dt}$$

Queste relazioni sono vere solo se la carica  $e$  è la stessa per tutte le particelle mobili. Se questa ipotesi non è del tutto rigorosa, ci permetterà almeno di vedere il significato generale del fenomeno.

Si avrà quindi

$$X + \lambda \frac{d^2 X}{dt^2} = f + \frac{X}{3} + \varepsilon \left( \gamma \frac{dY}{dt} - \beta \frac{dZ}{dt} \right)$$

o ancora,

$$X \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{3} \right) + \lambda \frac{d^2 X}{dt^2} = f + \varepsilon \left( \gamma \frac{dY}{dt} - \beta \frac{dZ}{dt} \right)$$

Ma osserviamo che

$$\left( \frac{1}{L} - \frac{1}{3} \right) = \frac{K_0}{K - K_0}$$

che ci dà infine

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + X \frac{K_0}{K - K_0} = f + \varepsilon \left( \gamma \frac{dY}{dt} - \beta \frac{dZ}{dt} \right) \quad (8)$$

**379.** Se il campo non è potente il secondo termine del secondo membro è trascurabile e si ottiene una relazione tra  $\frac{d^2 X}{dt^2}$ ,  $X$  e  $f$ :

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + X \frac{K_0}{K - K_0} = f$$

Se, inoltre, si è a riposo,  $\lambda \frac{d^2 X}{dt^2}$  è allora nullo e si ricade sull'equazione

$$f = X \frac{K_0}{K - K_0}$$

$\lambda$  assume una grandissima importanza quando si ha a che fare con oscillazioni molto rapide.

Questa equazione (8) non è più valida se le particelle subiscono un attrito: in questo caso sarebbe necessario aggiungere al primo membro un termine complementare della forma  $\lambda' \frac{dX}{dt}$ .

## C. Elettrodinamica dei corpi in movimento

**380.** Ora estenderemo i risultati trovati per i corpi a riposo a quelli in movimento.

Innanzitutto, abbiamo trovato una serie di equazioni per i corpi a riposo che non hanno motivo di cambiare per i corpi in movimento.

Queste sono,

$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \square F' = -4\pi \left( u - \frac{df}{dt} \right) \\ \square G' = -4\pi \left( v - \frac{dg}{dt} \right) \\ \square H' = -4\pi \left( w - \frac{dh}{dt} \right) \end{cases} \quad (2)$$

$$\square \psi' = \frac{4\pi}{K_0} \sum \frac{dX}{dx} \quad (3)$$

$$\frac{df}{dx} = - \sum \frac{dX}{dx} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF'}{dt} + \frac{d\psi'}{dx} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} g + \frac{dG'}{dt} - \frac{d\psi'}{dy} = 0 \\ \frac{4\pi}{K_0} h + \frac{dH'}{dt} - \frac{d\psi'}{dz} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

D'altra parte abbiamo trovato, in assenza di un campo magnetico intenso e per i corpi a riposo,

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + X \frac{K_0}{K - K_0} = f$$

Ma questa equazione, come abbiamo visto, può perdere la sua semplicità di scrittura quando si tratta di un campo magnetico molto intenso; in questo caso è necessario completare la relazione scritta con il termine complementare seguente

$$\varepsilon \left( \gamma \frac{dY}{dt} - \beta \frac{dZ}{dt} \right)$$

è il termine corrispondente alla *polarizzazione rotazionale magnetica* e al *fenomeno Zeeman*.

**381.** Per i corpi in movimento, si ottiene nello stesso modo,

$$X + \frac{m}{\mu} \sum \frac{d^2 x}{D\tau} = \sum \frac{e^2}{\mu D\tau} \left( f + \frac{X}{3} \right) + \frac{K_0}{4\pi} \left( \gamma \sum \frac{e^2 \eta}{\mu D\tau} - \beta \sum \frac{e^2 \zeta}{\mu D\tau} \right)$$

e mediante trasformazioni analoghe a quelle che abbiamo utilizzato trattando l'elettrodinamica dei corpi a riposo,

$$X + \frac{m}{\mu} \frac{d^2 x}{dt^2} = L \left( f + \frac{X}{3} \right) + \frac{K_0}{4\pi} L (\eta\gamma - \zeta\beta) \quad (6)$$

$\xi, \eta, \zeta$  qui rappresentano le componenti della velocità della materia. Infatti, se il campo magnetico non è molto intenso, e trascurando la velocità relativa della particella rispetto a quella della materia,  $\xi, \eta, \zeta$  rappresentano allora la velocità della materia stessa.

Dividendo per  $L$  i due membri della relazione (6) otteniamo,

$$\lambda \frac{d^2 x}{dt^2} + X \frac{K_0}{K - K_0} = f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \quad (7)$$

**382.** Per quanto concerne la relazione in  $u - \frac{df}{dt}$  essa va un poco modificata per i corpi in movimento.

Abbiamo,

$$\left(u - \frac{df}{dt}\right) D\tau = \sum e \frac{dx}{dt} \quad (8)$$

dove il simbolo  $\sum$  indica che la sommatoria si estende a tutte le particelle che si trovano all'interno del volume  $D\tau$ .

Per effettuare il calcolo utilizzeremo uno strumento molto utile ogni volta che dovremo calcolare dei valori medi.

Sappiamo che

$$XD\tau = \sum e(x - x_0)$$

Consideriamo una funzione  $\varphi$  qualsiasi; la sottoporremo ad una sola condizione: che vari in modo sufficientemente lento da poter essere considerata costante all'interno del volume  $D\tau$ . Avremo quindi,

$$\varphi XD\tau = \sum \varphi e(x - x_0)$$

Scomponiamo il volume  $D\tau$  in elementi di volume  $d\tau$  molto piccoli (nel senso comune del termine); si può allora scrivere

$$\int \varphi XD\tau = \sum \varphi e(x - x_0) \quad (9)$$

dove il simbolo  $\int$  come il simbolo  $\sum$  si estende all'intero volume  $D\tau$ .

Più in generale il valore medio  $\bar{U}$  di una funzione  $U$  qualsiasi sarà dato dalla formula

$$\int \varphi \bar{U} d\tau = \sum \varphi U$$

si avrà così

$$\int d\tau \left(u - \frac{df}{dt}\right) = \sum \varphi e \frac{dx}{dt} \quad (10)$$

**383.** Quale è il valore della densità media? - Bisogna perciò calcolare  $\sum \varphi e$ .

Poniamo

$$\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

dove  $\varphi_0$  rappresenta il valore della funzione  $\varphi$  quando la particella passa dalla sua posizione di equilibrio  $(x_0, y_0, z_0)$ . Allo stato di equilibrio, la densità media è nulla; quindi,

$$\sum \varphi e = 0 \quad (11)$$

D'altra parte essendo  $(x, y, z)$  vicini a  $(x_0, y_0, z_0)$  si può scrivere

$$\varphi = \varphi_0 + \sum (x - x_0) \frac{d\varphi}{dx}$$

e di conseguenza

$$\sum \varphi e = \sum e \left[ \varphi_0 + \sum (x - x_0) \frac{d\varphi}{dx} \right] \quad (12)$$

estendendosi il secondo simbolo  $\sum$  del secondo membro alle tre coordinate.

Tenendo conto della relazione (11) e della (9) che, differenziata rispetto a  $x$  ci dà

$$\int X \frac{d\varphi}{dx} d\tau = \sum e(x - x_0) \frac{d\varphi}{dx}$$

la relazione (12) diviene

$$\sum \varphi e = - \int \sum \varphi \frac{dX}{dx} d\tau = \int \varphi \sum \frac{dX}{dx} d\tau$$

La formula

$$\sum \varphi e = - \int \varphi \sum \frac{dX}{dx} d\tau \quad (13)$$

mostra che la densità media è

$$- \sum \frac{dX}{dx}$$

**384.** Cerchiamo ora il valore della *corrente totale*  $u$ . Partiamo dall'equazione (9) e la differenziamo rispetto a  $t$ ; viene,

$$\int \varphi \frac{dX}{dx} d\tau = \sum e (x - x_0) \frac{d\varphi}{dt} + \sum \varphi e \frac{dx}{dt} - \sum \varphi e \frac{dx_0}{dt} \quad (14)$$

Infatti,  $\varphi$  non dipende direttamente da  $t$ : è una funzione solo di  $x, y, z$ ; ma nel primo membro  $x, y, z$  rappresentano le coordinate dell'elemento di volume  $d\tau$ , mentre nel secondo membro  $x, y, z$  rappresentano le coordinate di  $e$ , che sono mobili; che sono quindi funzione di  $t$ . Ecco perché la funzione  $\varphi$  viene trattata nel secondo membro come dipendente da  $t$  e nel primo membro come indipendente da questa variabile.

Abbiamo,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum \xi \frac{d\varphi}{dx}$$

dove  $\sum$  si estende alle tre coordinate.

Il primo termine del secondo membro della (13) diviene pertanto,

$$\sum e (x - x_0) \frac{d\varphi}{dt} = \int X \frac{d\varphi}{dt} d\tau = \int X d\tau \sum \xi \frac{d\varphi}{dx}$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int X d\tau \xi \frac{d\varphi}{dx} &= - \int \varphi d\tau \frac{dX\xi}{dx} \\ \int X d\tau \eta \frac{d\varphi}{dy} &= - \int \varphi d\tau \frac{dX\eta}{dy} \\ \int X d\tau \zeta \frac{d\varphi}{dz} &= - \int \varphi d\tau \frac{dX\zeta}{dz} \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\sum e (x - x_0) \frac{d\varphi}{dt} = - \int \varphi d\tau \left( \frac{dX\xi}{dx} + \frac{dX\eta}{dy} + \frac{dX\zeta}{dz} \right) \quad (15)$$

Passiamo ora al terzo termine della (14); qual è il significato di  $\frac{dx_0}{dt}$ ? — È la velocità del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , essendo questo punto considerato come trasportato nel movimento della materia: è quindi quello che abbiamo chiamato  $\xi$ . Si ha allora

$$\frac{dx_0}{dt} = \xi (x_0, y_0, z_0)$$

e siccome  $(x_0, y_0, z_0)$  è molto vicino a  $(x, y, z)$  si può quindi scrivere

$$\frac{dx_0}{dt} = \xi + \delta\xi$$

ponendo,

$$\delta\xi = -(x - x_0) \frac{d\xi}{dx} - (y - y_0) \frac{d\xi}{dy} - (z - z_0) \frac{d\xi}{dz}$$

Il calcolo di  $\sum \varphi e \frac{dx_0}{dt}$  rimanda ora al calcolo di  $\sum \varphi e \xi$  e di  $\sum \varphi e \delta\xi$ .

Cominciamo con il calcolare  $\sum \varphi e \xi$ .

Abbiamo

$$\sum \varphi e \xi = - \int \varphi \xi \sum \frac{dX}{dx} d\tau = - \int \varphi d\tau \left( \xi \frac{dX}{dx} + \xi \frac{dY}{dy} + \xi \frac{dZ}{dz} \right) \quad (16)$$

Per  $\sum \varphi e \delta\xi$  abbiamo,

$$\sum \varphi e \delta\xi = - \sum \sum \varphi e \frac{d\xi}{dx} (x - x_0) = - \int \varphi \delta\tau \left( \frac{dX\xi}{dx} + \frac{dY\xi}{dy} + \frac{dZ\xi}{dz} \right) \quad (17)$$

Scriviamo ora la relazione (14) tenendo conto delle (15), (16) e (17) che abbiamo appena stabilito; essa diventa,

$$\int \varphi \frac{dX}{dt} d\tau = \int \varphi d\tau \left( u - \frac{df}{dt} \right) + \int \varphi d\tau \left[ \frac{d}{dy} (Y\xi - X\eta) - \frac{d}{dz} (X\zeta - Z\xi) \right]$$

Ora dobbiamo solo identificare i coefficienti di  $\varphi d\tau$ , perché questa uguaglianza deve rimanere valida qualunque sia la funzione  $\varphi$ .

Facendo questa identificazione troviamo,

$$\frac{dX}{dt} = \left( u - \frac{df}{dt} \right) + \frac{d}{dy} (Y\xi - X\eta) - \frac{d}{dz} (X\zeta - Z\xi)$$

da cui infine

$$\begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} + \frac{d}{dz} (X\zeta - Z\xi) - \frac{d}{dy} (Y\xi - X\eta) \\ v = \frac{dg}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{d}{dx} (Y\xi - X\eta) - \frac{d}{dz} (Z\eta - Y\zeta) \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \frac{d}{dy} (Z\eta - Y\zeta) - \frac{d}{dx} (X\zeta - Z\xi) \end{cases} \quad (18)$$

*Questa è l'espressione della corrente totale secondo Lorentz.*

### 385. Confronto con la teoria di Hertz

Confrontiamo questa espressione con quella della corrente totale secondo Hertz. Abbiamo visto che la corrente totale nella teoria di Hertz è la somma di quattro correnti: la corrente di conduzione, la corrente di spostamento, la corrente di convezione di Rowland e la corrente di Roentgen. Qui non abbiamo una corrente convettiva analoga a quella di Rowland e questo è comprensibile, perché la densità della vera elettricità è nulla, poiché ci troviamo in un dielettrico. Per quanto riguarda la corrente di spostamento, la si ritrova nella teoria di Lorentz, solo che è divisa in due: è composta dalla corrente di spostamento propriamente detta,  $\frac{df}{dt}$  e dalla corrente di polarizzazione  $\frac{dX}{dt}$ . Quanto all'ultimo termine della (18) è una espressione analoga a quella che rappresenta la corrente di Roentgen salvo che il vettore  $(f, g, h)$  è sostituito dal vettore  $(X, Y, Z)$  nella teoria di Lorentz. Abbiamo, infatti, in quest'ultima

$$\frac{d}{dz} (X\zeta - Z\xi) - \frac{d}{dy} (Y\xi - X\eta)$$

nella teoria di Hertz, abbiamo trovato

$$\frac{d}{dz} (f\zeta - h\xi) - \frac{d}{dy} (g\xi - f\eta) \quad (19)$$

Ma è importante notare che Hertz designa con  $f, g, h$  lo *spostamento totale* (spostamento + polarizzazione) che Lorentz rappresenta con  $f + X, g + Y, h + Z$ . Con le notazioni di Lorentz sarebbe quindi necessario nell'espressione (19) sostituire  $f, g, h$  con  $f + X, g + Y, h + Z$ .

Se prendiamo l'equazione

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + X \frac{K_0}{K - K_0} = f$$

che abbiamo trovato in precedenza e se vi trascuriamo la derivata seconda  $\frac{d^2 X}{dt^2}$  troviamo che  $X$  è proporzionale a  $f$  e che il fattore di proporzionalità è  $\frac{K - K_0}{K_0}$ . La corrente di Roentgen prevista dalla teoria di Lorentz sta quindi a quella prevista dalla teoria di Hertz come  $X$  sta a  $X + f$ , cioè come  $K - K_0$  sta a  $K$ .

Quindi nel vuoto ( $K = K_0$ ) non esiste corrente di Roentgen, secondo Lorentz, mentre secondo Hertz deve essercene una. Ma come abbiamo già visto in precedenza, quando ci siamo occupati della teoria di Hertz, gli esperimenti di Röntgen sono del tutto insufficienti per risolvere la questione.

**386.** Ritorniamo ora all'equazione fondamentale

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + X \frac{K_0}{K - K_0} = f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta)$$

abbiamo visto che il termine  $\lambda \frac{d^2 X}{dt^2}$  del primo membro di questa equazione è trascurabile (tranne nel caso in cui si hanno oscillazioni rapide) per cui si può scrivere,

$$X = \frac{K - K_0}{K_0} f + \frac{K - K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta)$$

La quantità che Hertz e Maxwell chiamano spostamento totale è, come osservato,  $X + f$ . Calcolandola, viene

$$X + f = \frac{K}{K_0} f + \frac{K - K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta)$$

o anche

$$X + f = \frac{K}{4\pi} \left[ \frac{4\pi}{K_0} f + \frac{K - K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \right]$$

Ciò significa che nella teoria di Lorentz lo spostamento di Maxwell è il prodotto di due fattori: uno è  $\frac{K}{4\pi}$  e l'altro la forza elettromotrice (secondo Lorentz). Ora, nei conduttori, la forza elettromotrice è espressa come

$$\frac{K}{4\pi} f + (\eta\gamma - \zeta\beta)$$

si vede quindi che la differenza è solo nell'introduzione del fattore  $\frac{K - K_0}{K_0}$ .

**387.** Interpretiamo questi risultati.

1° Supponiamo di avere un corpo conduttore in movimento posto in un campo magnetico invariabile. Cosa accadrebbe secondo la teoria di Hertz? Innanzitutto vi si produce una forza elettromotrice che darà origine a una corrente di induzione.

Secondo Lorentz, sebbene non esista una forza elettrica nel senso proprio del termine, esisterà tuttavia una forza elettromotrice che avrà la stessa espressione della teoria di Hertz, poiché ritroviamo il termine  $(\eta\gamma - \zeta\beta)$ . Questa forza elettromotrice darà origine alla stessa corrente di conduzione nella teoria di Hertz.

Vediamo quindi che nella teoria di Lorentz le leggi dell'induzione magnetica non sono in difetto.

2° Supponiamo ora di considerare un dielettrico in movimento in un campo magnetico. Secondo Hertz deve esserci uno spostamento elettrico proporzionale alla forza elettrica. Secondo la teoria di Lorentz lo spostamento elettrico totale,  $X + f$ , esiste ancora ma il suo valore è inferiore

rispetto alla teoria di Hertz: si riduce nel rapporto  $\frac{K-K_0}{K_0}$ . Ad esempio se il dielettrico è costituito da aria, allora  $K - K_0 = 0$ : non ci sarà proprio nulla.

Riassumendo, il risultato ottenuto da Lorentz si riduce ad assegnare i termini  $[\mu\alpha]$  e  $[f]$  della teoria di Hertz al coefficiente  $\frac{K-K_0}{K_0}$ .

Ora, ricordiamo che le equazioni di Hertz potevano spiegare gli esperimenti di Fizeau solo se veniva loro assegnato il coefficiente  $\frac{K-K_0}{K_0}$ : si può quindi prevedere che la teoria di Lorentz sia del tutto in accordo con i fatti sperimentali citati.

# Cap. V - Fenomeni luminosi nei dielettrici

## Dispersione

**388.** Affronteremo ora lo studio dei fenomeni luminosi nei dielettrici. Inizieremo con il caso più semplice: quello in cui non è presente un forte campo magnetico. Supponiamo inoltre che il corpo trasparente considerato sia in quiete: questo ci libererà dai termini aggiuntivi che eravamo costretti a introdurre per i corpi in movimento. Terremo però conto dell'attrito che potrebbero subire le particelle: ciò equivale a tenere conto dell'assorbimento.

Quindi avremo le seguenti equazioni

$$\begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} \\ v = \frac{dg}{dt} + \frac{dY}{dt} \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dZ}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + \lambda' \frac{dX}{dt} + X \frac{K_0}{K-K_0} = f \\ \lambda \frac{d^2 Y}{dt^2} + \lambda' \frac{dY}{dt} + Y \frac{K_0}{K-K_0} = g \\ \lambda \frac{d^2 Z}{dt^2} + \lambda' \frac{dZ}{dt} + Z \frac{K_0}{K-K_0} = h \end{cases} \quad (2)$$

**389.** Per prima cosa mostreremo che se *assumiamo una luce monocromatica le vibrazioni sono trasversali*.

A questo scopo, differenziamo la prima equazione (2) rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$ ; viene,

$$\begin{cases} \lambda \frac{d^2}{dt^2} \frac{dX}{dx} + \lambda' \frac{d}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{K_0}{K-K_0} \frac{dX}{dx} = \frac{df}{dx} \\ \lambda \frac{d^2}{dt^2} \frac{dY}{dy} + \lambda' \frac{d}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{K_0}{K-K_0} \frac{dY}{dy} = \frac{dg}{dy} \\ \lambda \frac{d^2}{dt^2} \frac{dZ}{dz} + \lambda' \frac{d}{dt} \frac{dZ}{dt} + \frac{K_0}{K-K_0} \frac{dZ}{dz} = \frac{dh}{dz} \end{cases}$$

Sommando queste tre equazioni si ottiene

$$\lambda \frac{d^2}{dt^2} \sum \frac{dX}{dx} + \lambda' \frac{d}{dt} \sum \frac{dX}{dt} + \frac{K_0}{K-K_0} \sum \frac{dX}{dx} = \sum \frac{df}{dx}$$

Ora

$$\sum \frac{df}{dx} = - \sum \frac{dX}{dx}$$

pertanto

$$\lambda \frac{d^2}{dt^2} \sum \frac{dX}{dx} + \lambda' \frac{d}{dt} \sum \frac{dX}{dt} + \frac{K_0}{K-K_0} \sum \frac{dX}{dx} = 0 \quad (3)$$

$\sum \frac{dX}{dx}$  soddisfa quindi un'equazione differenziale lineare del secondo ordine: concludiamo che questa funzione è una somma di due esponenziali. Ma affinché la luce sia monocromatica (perché ci siamo posti in questo caso) è necessario che questi esponenziali abbiano un periodo reale, cioè che i loro esponenti siano puramente immaginari; è quindi necessario che

$$\lambda' \sum \frac{dX}{dx} = 0$$

e, per avere un colore determinato, serve che gli esponenziali abbiano un periodo determinato. Se ne conclude che

$$\sum \frac{dX}{dx} = 0 \quad (4)$$

L'unica eccezione sarebbe per  $\lambda' = 0$ , e ancora una volta per un colore specifico.

Ora  $\sum \frac{dX}{dx} = 0$  significa che le vibrazioni sono trasversali: è quanto vogliamo proprio mostrare.

**390.** Stabilito quanto detto vediamo come diventano le relazioni in  $\square\psi'$  e  $\square f'$ . Abbiamo

$$\square\psi' = \frac{4\pi}{K_0} \sum \frac{dX}{dx}$$

o, siccome  $\sum \frac{dX}{dx} = 0$ , abbiamo ora

$$\square\psi' = 0 \quad (5)$$

D'altra parte,

$$\frac{4\pi}{K_0} f + \frac{dF'}{dt} + \frac{d\psi'}{dx} = 0$$

da cui

$$\square f = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square F' - \frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dx} \square\psi'$$

abbiamo visto che  $\square\psi' = 0$  per cui

$$\square f = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square F'$$

d'altra parte

$$\square F' = -4\pi \left( u - \frac{df}{dt} \right)$$

e dalla (1)

$$u - \frac{df}{dt} = \frac{dX}{dt}$$

pertanto

$$\square F' = -4\pi \frac{dX}{dt}$$

la relazione in  $\square f$  diviene allora

$$\square f = K_0 \frac{d^2 X}{dt^2} \quad (6)$$

**391.** Supponiamo ora di avere a che fare con onde piane: tutte le nostre funzioni dipenderanno solo da  $z$  e  $t$ , quindi

$$\square f = \frac{d^2 f}{dz^2} - K_0 \frac{d^2 f}{dt^2}$$

e dalla (6)

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = K_0 \frac{d^2 X}{dt^2} \quad (6 \text{ bis})$$

Abbiamo,

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + \lambda' \frac{dX}{dt} + \frac{K_0}{K - K_0} X = f \quad (7)$$

Poniamo allora,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{a_0} \\ \lambda' &= \frac{b_0}{a_0} \\ \frac{K_0}{K - K_0} &= \frac{p_0^2}{a_0} \end{aligned}$$

L'equazione (7) diverrà

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + b_0 \frac{dX}{dt} + p_0^2 X = a_0 f \quad (7 \text{ bis})$$

La luce è stata supposta monocromatica; si può pertanto applicare l'artificio solito degli immaginari: poniamo

$$\begin{aligned} X &= X_0 e^P \\ f &= f_0 e^P \\ P &= ip (nz\sqrt{K_0} - t) \end{aligned}$$

Poiché le equazioni sono lineari a coefficienti reali, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} X &= \text{parte reale di } X_0 e^P \\ f &= \text{parte reale di } f_0 e^P \end{aligned}$$

e queste nuove soluzioni che sono reali ci daranno i valori reali delle nostre funzioni.

Sia  $p$  un numero proporzionale al numero di vibrazioni al secondo, in modo che il periodo  $T$  sia dato da

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

$n$  rappresenta l'indice di rifrazione; se  $n$  è immaginario allora

$$n = n' + in''$$

e in questo caso

$$\text{parte reale di } X_0 e^P = X_0 e^{-n'' p \sqrt{K_0} z} \cos p (n' z \sqrt{K_0} - t)$$

il coefficiente di assorbimento è allora proporzionale a  $n''$  e l'indice di rifrazione è  $n'$ .

**392.** Cosa diventano le nostre equazioni (7) in questo caso? Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= -p^2 X \\ \frac{d^2 f}{dt^2} &= -p^2 f \\ \frac{dX}{dt} &= -ipX \\ \frac{d^2 f}{dz^2} &= -n^2 p^2 K_0 f \end{aligned}$$

L'equazione (7 bis) diviene allora,

$$(p_0^2 - ipb_0 - p^2) X = a_0 f \quad (7 \text{ ter})$$

e l'equazione (6 bis) assume la forma

$$-n^2 p^2 K_0 f + K_0 p^2 f = -K_0 p^2 X$$

o ancora

$$(n^2 - 1) f = X$$

da cui

$$n^2 = 1 + \frac{X}{f}$$

o, tenendo conto della (7 ter)

$$n^2 = 1 + \frac{a_0}{p_0^2 - ipb_0 - p^2} \quad (8)$$

DISCUSSIONE. In generale  $b_0$  è molto piccolo, di conseguenza il termine  $ipb_0$  è trascurabile rispetto a  $p_0^2 - p^2$ , e allora  $n^2$  diviene reale:

$$n^2 = 1 + \frac{a_0}{p_0^2 - p^2} \quad (9)$$

Vi è un'eccezione nel caso in cui  $p_0^2 - p^2$  è molto piccolo; in questo caso il termine in  $b_0$  non è più trascurabile, il denominatore sarà molto piccolo e di conseguenza la funzione molto grande; sarà quindi immaginario in questo caso. In breve, quando  $p_0$  è diverso da  $p$ , non c'è assorbimento; e, al contrario, quando  $p_0$  è vicino a  $p$  c'è assorbimento (a causa del termine immaginario  $ipb_0$ ).

Ciò spiega l'esistenza di linee di assorbimento molto strette nello spettro.

**393.** Per meglio vedere la variazione di  $n^2$ , costruiamo la curva che rappresenta le variazioni di questa funzione. Portiamo  $p^2$  in ascisse e  $n^2$  in ordinate e rappresentiamo le rette  $n^2 = \frac{K}{K_0}$ ,  $n^2 = 1$  e poi  $p_0^2 = p^2$  e  $p^2 = 0$ .

Facciamo poi  $p^2 = 0$  nella formula (9); viene così

$$n^2 = 1 + \frac{a_0}{p_0^2}$$

ora

$$\frac{a_0}{p_0^2} = \frac{K - K_0}{K_0}$$

pertanto

$$n^2 = 1 + \frac{K - K_0}{K_0} = \frac{K}{K_0}$$

La curva è quindi tangente alla retta  $n^2 = \frac{K}{K_0}$

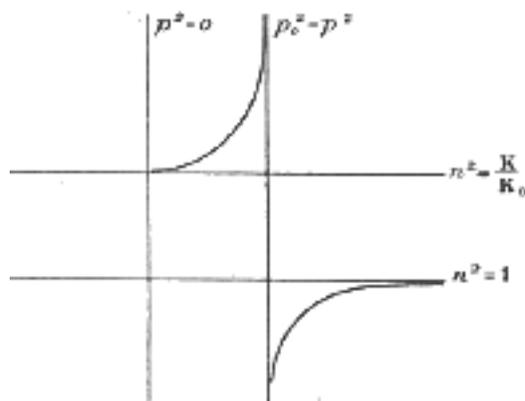


Fig. 58.

Ora se  $p$  aumenta, il secondo termine del secondo membro della (9) aumenta con  $p$ , e per  $p_0^2 = p$ , il termine in  $\frac{a_0}{p_0^2 - p^2}$  diventa infinito: ne consegue che  $n^2$  diventa infinito: si ha un asintoto.

Se  $p$  continua ad aumentare, per un valore di  $p$  leggermente maggiore di  $p_0$  si avrà  $n^2 = -\infty$ : si avrà quindi ancora un asintoto.

Sia  $p = \infty$ , cioè se si tratta di onde infinitamente corte, allora  $n^2 = 1$ ; si ha così un ramo tangente alla retta  $n^2 = 1$ .

Si vede d'altronde che la curva così ottenuta è un'iperbole.

**394.** *1<sup>a</sup> Osservazione.* La presenza degli asintoti che trovati corrisponde alla realtà delle cose? E prima di tutto, come abbiamo trovato questi asintoti? Li abbiamo trovati ponendo  $p_0^2 = p^2$  nella formula (9), ipotesi che non corrisponde a nessuna realtà poiché per  $p_0 = p$  non abbiamo più il diritto di trascurare il termine in  $ipb_0$ .

Teniamo conto, al contrario, di questo termine e correggiamo la nostra curva rappresentando con linee tratteggiate le parti che non possono manifestare la loro esistenza attraverso l'esperienza, a causa dell'assorbimento. Otteniamo quindi una curva il cui andamento è indicato dalla figura 59.

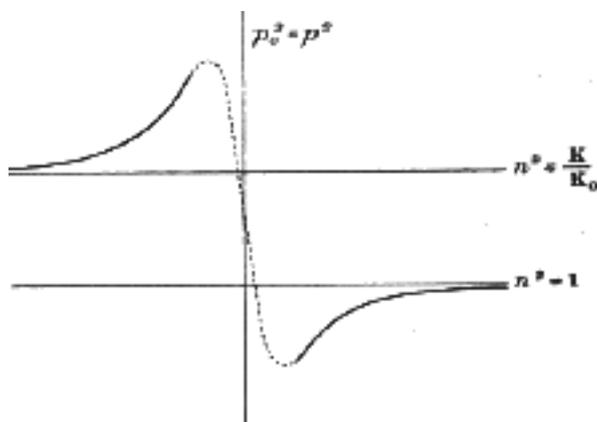


Fig. 59.

**395.** *2<sup>a</sup> Osservazione.* Cosa indica ci dice la curva appena disegnata? Ci indica la presenza di una singola riga di assorbimento: è la riga che corrisponde a  $p_2 = p_0^2$ . Ma dove si trova questa linea nello spettro? Per vederla, notiamo che nella parte sinistra della curva si ha  $n > 1$ , nella parte destra  $n < 1$  e infine per  $p = \infty$  si ha  $n = 1$ ;  $p^2 = p_0^2$  si trova quindi in una regione molto lontana dallo spettro noto, il che significa che la linea di assorbimento esce dallo spettro conosciuto.

Come possiamo allora spiegare la presenza di righe di assorbimento che l'osservazione rivela nello spettro conosciuto? — Si è portati a fare una nuova ipotesi: *bisogna ammettere che vi sono particelle di più generi.*

*Particelle di più generi.* Abbiamo visto, infatti, che queste particelle sono caratterizzate dalla loro massa  $m$ , dalla loro carica  $e$  e infine dal loro coefficiente di elasticità  $\mu m$ , che tende a riportarle nella loro posizione di equilibrio. Abbiamo supposto inoltre che il rapporto  $m/\mu$  fosse costante (lo stesso per tutte le particelle); è proprio a causa di ciò che abbiamo ottenuto come risultato della nostra analisi, la presenza di una sola riga di assorbimento nello spettro. Questa era un'ipotesi restrittiva. Ma modifichiamo ora questa ipotesi ammettendo l'esistenza di particelle di  $n$  tipi diversi.

Per ogni tipo di queste particelle  $X$  sarà diverso. Indichiamo con  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$  le polarizzazioni di ciascuna di queste categorie di particelle. La polarizzazione totale  $X$  di queste particelle sarà quindi la somma delle polarizzazioni parziali  $X_1, X_2, \dots, X_K$  di ciascuna categoria di particelle. Quindi possiamo scrivere

$$X = \sum X_k$$

e d'altra parte:

$$X_K D\tau = \sum e(x - x_0) \quad (10 \text{ bis})$$

essendo il simbolo  $\sum$  esteso nella (10 bis) a tutte le particelle di tipo  $K^e$  contenute nell'elemento di volume  $D\tau$ .

Le equazioni

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{X}{L} = f + \frac{X}{3}. \text{ ecc.}$$

trovate in precedenza, esprimenti la condizione di equilibrio di una particella diventano quindi, tenendo conto dell'ipotesi che abbiamo appena fatto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{d^2 X_1}{dt^2} + \frac{X_1}{L_1} = f + \frac{X}{3} \\ \lambda_2 \frac{d^2 X_2}{dt^2} + \frac{X_2}{L_2} = f + \frac{X}{3} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_k \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} \end{array} \right. \quad (11)$$

essendo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K, L_1, L_2, \dots, L_K$  coefficienti caratteristici delle particelle del primo, secondo, ..., K-esimo tipo.

**396.** Trasformiamo queste equazioni.

Abbiamo visto in precedenza che se supponiamo le onde piane, allora

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = K_0 \frac{d^2 X}{dt^2}$$

e se la luce è monocromatica

$$(n^2 - 1) f = X \quad (12)$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -p^2 X \quad (13)$$

Scriviamo quest'ultima equazione per la particella del K-esimo tipo e sostituiamo il valore di  $\frac{d^2 X}{dt^2}$  nell'ultima equazione (11); si ha

$$\frac{X_K}{L_K} - p^2 X_K \lambda_K = f + \frac{X}{3} \quad (14)$$

Poniamo ora,

$$\Phi = \sum \frac{X_K^2}{2L_K} - \frac{X^2}{6} \quad (15)$$

con  $X$  definita dalla relazione (10). Questa espressione di  $\Phi$ , come si vede una forma quadratica omogenea rispetto a  $X_K$ .

Poniamo ancora

$$\Phi' = \sum \frac{\lambda_K X_K^2}{2} \quad (16)$$

è ancora una forma quadratica omogenea.

Ciò posto, si osserva facilmente che la nostra equazione (14) si può scrivere tenendo conto della (15) e della (16)

$$\frac{d}{dX_K} (\Phi - p^2 \Phi' - fX) = 0 \quad (17)$$

in altri termini questa equazione si traduce con

$$\Phi - p^2 \Phi' - fX = \text{massimo}$$

Ora sappiamo che quando abbiamo due espressioni quadratiche qualsiasi, le si può ridurre entrambe a somme di quadrati, effettuando un cambiamento lineare di variabili. Facciamo questo cambiamento e scriviamo le relazioni (15) e (16) in questa ipotesi; viene,

$$\Phi = \sum \frac{p_K^2 X_K'^2}{2a_K} \quad (15 \text{ bis})$$

$$\Phi' = \sum \frac{X_K'^2}{2a_K} \quad (16 \text{ bis})$$

D'altra parte,  $X$  sarà una funzione lineare di  $X'_K$  e posso allora supporre che questi coefficienti sono uguali all'unità, di modo che

$$X = \sum X'_K \quad (18)$$

La condizione (17) diviene allora

$$(p_K^2 - p^2) X'_K = a_k f$$

da cui

$$X'_K = f \frac{a_k}{p_K^2 - p^2}$$

e di conseguenza

$$X = f \sum \frac{a_K}{p_K^2 - p^2}$$

da cui, uguagliando questo valore di  $X$  con quello dato dalla (12)

$$n^2 = 1 + \sum \frac{a_K}{p_K^2 - p^2} \quad (19)$$

**397.** Rappresentiamo questo risultato impiegando un ragionamento analogo a quello utilizzato nella teoria semplice. Si ottiene così il grafico opposto (fig. 60). Ciò è vero se trascuriamo l'attrito. Ma non è più la stessa cosa se ci spostiamo nelle vicinanze delle linee di assorbimento: nelle vicinanze degli asintoti.

Modificando la nostra curva per questo caso, cioè tenendo conto dell'attrito, otteniamo la forma che è rappresentata dalla figura (61).

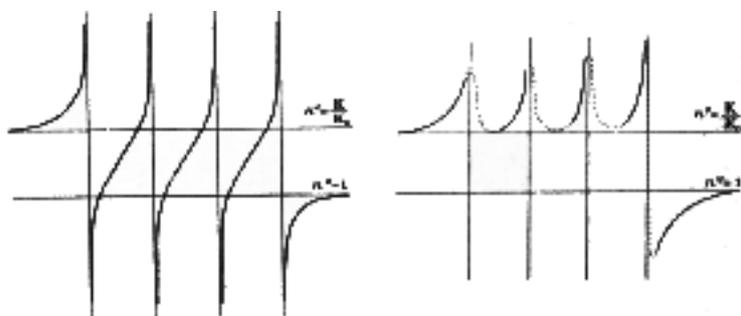


Fig. 60 - 61

Le linee tratteggiate corrispondono alle bande di assorbimento, che non sono visibili.

**398. Nota.** Seguendo le linee continue sul grafico si vede che  $n^2$  cresce; per le linee tratteggiate accade il contrario.

La distanza tra due bande di assorbimento consecutive è più breve dell'aumento tra queste due linee consecutive. Tuttavia, per  $p$  sufficientemente grande,  $n$  deve diminuire, perché se  $p^2$  aumenta indefinitamente, ci troviamo al di sotto della linea  $n^2 = 1$ . Ne consegue che per  $p^2 = \infty$  (onde estremamente corte)  $n^2$  è molto vicino all'unità, il che significa che non c'è rifrazione per queste onde. Alcuni hanno utilizzato questo risultato per equiparare i raggi Roentgen a raggi con lunghezza d'onda molto corta.

H. Becquerel ha ottenuto queste curve tramite fotografia<sup>42</sup>.

Osserviamo di sfuggita che la teoria di Helmholtz conduce ad una formula del tutto analoga a quella da noi trovata.

<sup>42</sup>H. BECQUEREL, *C. R.*, 1898; 1899.

## Dispersione elettrica anomala

399. La dispersione elettrica è stata studiata molto recentemente da M. Barbillion<sup>43</sup> per le onde hertziane di grande lunghezza d'onda. Per la maggior parte dei corpi la dispersione è anomala: invece di aumentare all'inizio,  $n$  diminuisce, così che otteniamo come inizio della curva di dispersione la porzione indicata in linea tratteggiata nella figura allegata.

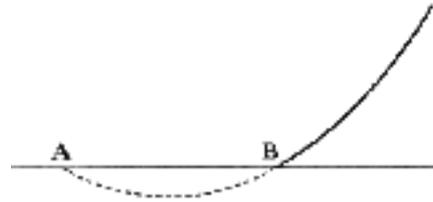


Fig. 62.

Ci si può rendere conto di questa anomalia nel modo seguente: Supponiamo che  $p$  sia molto piccolo; il secondo termine della relazione (15) si riduce allora a

$$\frac{a}{p_K^2}$$

Il termine corrispondente al primo asintoto è

$$\frac{a_0}{p_0^2 - p^2}$$

che completato con il termine dovuto all'attrito diviene

$$\frac{a_0}{p_0^2 - ipb_0 - p^2}$$

ma abbiamo supposto  $p$  molto piccolo:  $p^2$  è quindi trascurabile rispetto a  $p_0^2$ , rimane allora

$$\frac{a_0}{p_0^2 - ipb_0}$$

pertanto

$$n^2 = n_0^2 + \frac{a_0}{p_0^2 - ipb_0} \quad (16)$$

Poniamo

$$a_k = 2n_0^2 c$$

La relazione (16) diviene allora,

$$n^2 = n_0^2 \left( 1 + \frac{2c}{p_0^2 - ipb_0} \right)$$

supponendo  $c$  molto piccolo ed estraendo la radice quadrata, si ha

$$n = n_0 \left( 1 + \frac{c}{p_0^2 - ipb_0} \right)$$

La parte reale di  $n$  sarà quindi,

$$\text{parte reale di } n = n_0 \left( 1 + \frac{cp_0^2}{p_0^2 + p^2 b_0^2} \right)$$

<sup>43</sup>L. BARBILLION, *Thèse de doctorat*, 24 gennaio 1899.

Quando  $p$  aumenta, anche il denominatore di questa espressione aumenta, di conseguenza  $n$  diminuisce: ciò che spiega lo spettro anomalo osservato.

**400.** *Osservazione.* Abbiamo detto in precedenza che le equazioni

$$\frac{X_K}{L_K} - \lambda_K p^2 X_K = f + \frac{X}{3}$$

si potevano interpretare dicendo che

$$\Phi - p^2 \Phi' - fX = \text{massimo}$$

Possiamo rappresentare il caso in un'altra forma.

Scriviamo le equazioni simmetriche alla precedente; si avrà allora il sistema,

$$\begin{cases} \frac{X_K}{L_K} - \lambda_K p^2 X_K = f + \frac{X}{3} \\ \frac{Y_K}{L_K} - \lambda_K p^2 Y_K = g + \frac{Y}{3} \\ \frac{Z_K}{L_K} - \lambda_K p^2 Z_K = f + \frac{Z}{3} \end{cases} \quad (17)$$

poniamo ora

$$\Theta = \sum \frac{X_K^2 + Y_K^2 + Z_K^2}{2L_K} - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{6}$$

$$\Theta' = \sum \frac{\lambda_K}{2} (X_K^2 + Y_K^2 + Z_K^2)$$

le nostre equazioni (17) significano allora che l'espressione seguente

$$\Theta - p^2 \Theta' - fX - gY - hZ$$

è massimo, cioè che la sua derivata rispetto a  $X_K$  è nulla.

**401.** *Dispersione nei cristalli.* — L'osservazione appena fatta serve per passare alla dispersione nei cristalli.

Supponiamo infatti di avere a che fare con un corpo anisotropo, ad esempio un cristallo ortorombico, che presenta tre piani di simmetria rettangolari. Prendiamo questi tre piani di simmetria come piani di coordinate e consideriamo la forza che riporta una molecola alla sua posizione di equilibrio. Questa forza, come già sappiamo, è proporzionale alla differenza e in un corpo isotropo non dipende dalla direzione di essa. Abbiamo quindi per le tre componenti di questa forza,

$$\begin{cases} \mu(x - x_0) \\ \mu(y - y_0) \\ \mu(z - z_0) \end{cases}$$

Nei mezzi anisotropi, si ha, al contrario,

$$\begin{cases} \mu(x - x_0) \\ \mu'(y - y_0) \\ \mu''(z - z_0) \end{cases}$$

ne risulta che troveremo le stesse equazioni tranne per quelle in  $Y_K/L_K$  e  $Z_K/L_K$  che saranno sostituite dalle equazioni in  $Y_K/L'_K$  e  $Z_K/L''_K$ .

Per quanto riguarda  $\Theta$  e  $\Theta'$ ,  $\Theta'$  conserverà la stessa forma, ma  $\Theta$  assumerà la forma seguente.

$$\Theta = \sum \frac{1}{2} \left( \frac{X_K^2}{L_K} + \frac{Y_K^2}{L'_K} + \frac{Z_K^2}{L''_K} \right) - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{6}$$

Le equazioni (17) rimarranno e significheranno ancora che

$$\Theta - p^2\Theta' - fX - gY - hZ = \text{massimo} \quad (18)$$

e il calcolo sarà svolto come prima.

Se il cristallo non è ortorombico, saremo portati, con un calcolo analogo, a porre

$$\Theta = \sum \Theta_K - \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{6}$$

Essendo  $\Theta_K$  una forma quadratica in  $X_K, Y_K, Z_K$ , bisognerà scrivere ancora che il primo membro della (18) è massimo.

Per i corpi ortorombici, se la deviazione si ha lungo gli assi coordinati, anche la forza sarà diretta lungo questi assi, solo il coefficiente di proporzionalità sarà diverso a seconda che la deviazione sia diretta parallelamente a  $x$ , o a  $y$  o a  $z$ .

Se si ha una deviazione obliqua rispetto agli assi coordinati, la direzione della forza non coinciderà più con la direzione della deviazione.

Abbiamo quindi nel cristallo tre direzioni principali che godono di questa proprietà: se la deviazione è diretta in una di queste direzioni, le forze che tenderanno a riportare la molecola nella sua posizione di equilibrio saranno dirette nella stessa direzione della deviazione.

Per un cristallo che non è ortorombico, troveremo ancora per ogni tipo di particella tre direzioni principali che sarebbero gli assi dell'ellissoide  $\Theta_K = 1$ ; solo che queste direzioni non sono le stesse per particelle di tipo diverso e di conseguenza non possiamo più prendere queste direzioni come assi coordinati; e la simmetria scompare.

Si vede quindi che i risultati sono più o meno gli stessi della teoria di Helmholtz.

## **CAP. VI - Fenomeni ottici nei corpi in movimento**



**402.** Il più importante di questi fenomeni è l'*aberrazione astronomica*. Questo fenomeno mette in evidenza il movimento relativo dell'etere e del mezzo ponderabile in cui esso penetra. Ricordiamo brevemente in cosa consiste.

Puntiamo un telescopio verso una stella qualsiasi: avremo l'immagine di questa stella nel piano focale di questo telescopio; solo che, poiché la velocità della luce non è infinita e poiché la Terra si muove rispetto a questa stella, questa immagine e la stella stessa non saranno più nella direzione dell'asse ottico dello strumento: l'angolo tra la posizione effettiva della stella e la sua immagine nel telescopio (un angolo che può arrivare fino a 20") è esattamente ciò che viene chiamato aberrazione astronomica.

Si vede che questo fenomeno non potrebbe esistere se non ci fosse la velocità relativa della Terra rispetto alle onde luminose.

Fresnel ha mostrato che il movimento della Terra non influisce sulla riflessione e sulla rifrazione<sup>44</sup>. Egli ha formulato la seguente ipotesi: suppone che nei mezzi rifrangenti diversi dall'aria e dal vuoto si verifichi un parziale trascinamento delle onde. Per vedere il valore del coefficiente di questo trascinamento, chiamiamo  $d_0$  la densità dell'etere e  $d$  la densità di un qualsiasi mezzo rifrangente; la frazione di etere trascinata è secondo Fresnel

$$\frac{d - d_0}{d} = 1 - \frac{d_0}{d}$$

d'altra parte

$$\frac{d_0}{d} = \frac{V^2}{V_0^2}$$

essendo  $V$  e  $V_0$  le velocità di propagazione delle onde nei due mezzi di densità  $d_0$  e  $d$ ; ora

$$\frac{V^2}{V_0^2} = \frac{1}{n^2}$$

con  $n$  l'indice di rifrazione del mezzo considerato; pertanto

$$\frac{d - d_0}{d} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

è il valore del coefficiente di trascinamento secondo Fresnel.

Queste idee teoriche di Fresnel furono confermate dagli esperimenti di Fizeau. Egli ha evidenziato questo trascinamento parziale delle onde mediante lo spostamento delle frange di interferenza che avevano attraversato l'acqua in movimento (velocità di 7 metri al secondo). Inoltre, lo spostamento delle frange si è verificato a volte verso destra, a volte verso sinistra, secondo il verso del flusso dell'acqua. Il valore di questo spostamento coincideva sostanzialmente con il risultato teorico di Fresnel. Gli stessi esperimenti ripetuti con l'aria diedero un risultato negativo, sempre in accordo con le idee teoriche di Fresnel.

Questi esperimenti di Fizeau furono ripetuti in condizioni più favorevoli da MM. Michelson e Morley<sup>45</sup>. Lo spostamento della frangia centrale nei loro esperimenti ha raggiunto quasi una frangia completa (0,899 frange esatte). Gli stessi esperimenti ripetuti con l'aria (velocità di 25 metri al secondo) hanno dato esito negativo.

**403.** Da allora sono stati condotti numerosi esperimenti per dimostrare il movimento della Terra mediante fenomeni ottici. In questi esperimenti la sorgente luminosa e tutti i dispositivi ottici sulla Terra avevano la stessa velocità e non erano in moto relativo tra loro. Tutti questi esperimenti hanno dato risultati negativi.

C'è però un'eccezione: Fizeau ha creduto di osservare un'influenza del movimento della Terra sulla rotazione del piano di polarizzazione nella riflessione vetrosa della luce polarizzata.

<sup>44</sup>Vedere per i dettagli, H. POINCARÉ, *Théorie mathématique de la lumière*, t. 1. p. 385, n° 285.

<sup>45</sup>*American Journal of Science*; vol, XXXI, mai 1886.

Ma questi esperimenti sono estremamente delicati e lo stesso Fizeau mi ha espresso i dubbi che nutriva riguardo al risultato appena citato. È facilmente riconoscibile che affinché non vi sia alcuna influenza del movimento della Terra sui fenomeni ottici, è necessario, secondo Fresnel, che il coefficiente di trascinamento abbia il valore

$$1 - \frac{1}{n^2}$$

Ma cos'è  $n$ ? È l'indice di rifrazione corrispondente a ogni colore o l'indice medio? Per Fresnel,  $n$  è l'indice di rifrazione medio: per lui la velocità di trascinamento dell'etere è indipendente dalla lunghezza d'onda della luce. Ma in realtà  $n$  non è una costante; dipende dal colore del raggio luminoso e non è lo stesso per un raggio ordinario e uno straordinario in un mezzo birifrangente. L'ipotesi di Fresnel deve quindi essere modificata.

**404.** La teoria di Lorentz, come vedremo, spiega molto bene questi fatti. Tuttavia, dobbiamo fare un'ipotesi: *se si vuole che i fenomeni ottici non siano influenzati dal movimento della Terra, dobbiamo trascurare nelle formule i termini dell'ordine del quadrato dell'aberrazione* (cioè dell'ordine di  $1/10^8$ ).

Se invece si tiene conto di questi termini, il movimento della Terra esercita la sua influenza sui fenomeni ottici.

In quasi tutti gli esperimenti, questi termini sono effettivamente trascurabili; Esiste tuttavia un'eccezione per un esperimento di Michelson, che dimostra che il movimento della Terra non ha alcuna influenza sui fenomeni ottici osservati sulla sua superficie e dove risulta che i termini dell'ordine del quadrato dell'aberrazione non sono più trascurabili. Vediamo ora come la teoria di Lorentz spiega questi fenomeni.

## 405. Spiegazione di questi fenomeni mediante la teoria di Lorentz.

Co proponiamo di dimostrare che se si trascurano i termini dell'ordine del quadrato dell'aberrazione il coefficiente di trascinamento dell'onda è  $1 - \frac{1}{n^2}$ .

Supponiamo di riferire il sistema ad assi mobili, trascinati dal moto della Terra; animati di conseguenza da un moto di traslazione uniforme le cui componenti sono  $\xi, \eta, \zeta$ .

Chiamiamo  $x, y, z$  le coordinate di un punto, prese rispetto agli assi fissi e  $x', y', z'$  le coordinate di questo stesso punto, prese rispetto agli assi mobili.

Si ha come relazione tra queste due categorie di coordinate

$$\begin{cases} x' = x - t\xi \\ y' = y - t\eta \\ z' = z - t\zeta \end{cases}$$

Continueremo a designare con  $\frac{d}{dt}$  le derivate prese rispetto al tempo supponendo il punto  $(x, y, z)$  fisso, queste saranno le derivate corrispondenti al moto assoluto del punto, e con  $\frac{\partial}{\partial t}$  le derivate prese rispetto al tempo, ma supponendo che il punto  $(x, y, z)$  sia trascinato nel movimento della Terra: queste saranno le derivate corrispondenti al moto relativo del punto in questione.

Ricordiamo che in quest'ultimo caso si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} + \xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy} + \zeta \frac{d}{dz}$$

Ciò posto, supponiamo di avere, come in precedenza,

$$X = X_0 e^{ip(nz\sqrt{K_0} - t)} \quad (a)$$

Prendendo come variabili  $x', y', z'$ , avremo

$$X = X_0 e^{ip'(n'z'\sqrt{K_0} - t)} \quad (b)$$

e identificando i due esponenti viene,

$$p \left( nz\sqrt{K_0} - t \right) = p' \left( n'z'\sqrt{K_0} - t \right) = p' \left( n'z'\sqrt{K_0} - n'\zeta\sqrt{K_0} - t \right)$$

da cui

$$\begin{aligned} pn &= p'n' \\ p &= p' \left( 1 + n'\zeta\sqrt{K_0} \right) \end{aligned}$$

$\frac{2\pi}{p}$  rappresenterà allora il periodo vibratorio del moto e  $\frac{2\pi}{p'}$  il periodo relativo di una vibrazione come apparirebbe a un osservatore trasportato nel moto della terra. Il principio di Fizeau c'insegna, infatti, che quando un osservatore si trova davanti all'onda il periodo vibratorio gli sembra accorciato e che gli sembra invece aumentato quando cammina nello stesso verso dell'onda.

Ciò premesso, dalle equazioni (a) e (b) si ricava,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -p^2 X \quad (c)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -p'^2 X \quad (d)$$

**406.** Ricordiamo ora le equazioni che abbiamo trovato per un corpo a riposo e per i corpi in movimento. Per i corpi a riposo abbiamo trovato

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} \\ \lambda_K \frac{d^2 Y_K}{dt^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{X}{3} \\ \lambda_k \frac{d^2 Z_K}{dt^2} + \frac{Z_K}{L_K} = h + \frac{X}{3} \end{cases} \quad (e)$$

Per i corpi in movimento è opportuno aggiungere un termine complementare al secondo membro delle equazioni precedenti,

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{\partial^2 X_K}{\partial t^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \\ \lambda_K \frac{\partial^2 Y_K}{\partial t^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\zeta\alpha - \xi\gamma) \\ \lambda_k \frac{\partial^2 Z_K}{\partial t^2} + \frac{Z_K}{L_K} = h + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\xi\beta - \eta\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

Scrivo la derivata rispetto al tempo con il simbolo  $\partial$ . Ricordiamo infatti come abbiamo ottenuto questa equazione.

Siamo partiti dall'equazione dell'equilibrio di una particella

$$\frac{m}{\mu} e \frac{d^2 x}{dt^2} + e(x - x_0) = e^2 \left[ f + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \right]$$

e abbiamo fatto la somma di queste equazioni rispetto alle particelle di tipo  $K$  -esimo, comprese nel volume  $D\tau$ ; abbiamo così trovato,

$$e(x - x_0) = X_K D\tau$$

Se  $e$  è costante e se il moto della particella è uniforme, abbiamo visto che

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

pertanto

$$\sum e \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \frac{d^2}{dt^2} e (x - x_0) = D\tau \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

Ma l'ultima derivata rispetto al tempo è presa rispetto al moto relativo o rispetto al moto assoluto? Notiamo a questo scopo che il simbolo  $\sum$  si estende sempre allo stesso elemento di volume  $D\tau$ , e poiché questa particella  $D\tau$  è trascinata nel movimento della materia, è la derivata con simbolo  $\partial$  che deve essere considerata.

Questo è ciò che volevamo mostrare.

**407.** Abbiamo ancora come equazioni

$$\begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} + \frac{d}{dz} (X\zeta - Z\xi) - \frac{d}{dy} (Y\xi - X\eta) \\ v = \frac{dg}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{d}{dx} (Y\xi - X\eta) - \frac{d}{dz} (Z\eta - Y\zeta) \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \frac{d}{dy} (Z\eta - Y\zeta) - \frac{d}{dx} (X\zeta - Z\xi) \end{cases} \quad (2)$$

Qui non abbiamo più motivo di scrivere le derivate con il simbolo  $\partial$ .

Abbiamo poi

$$\begin{cases} \square F' = -4\pi \left( u - \frac{df}{dt} \right) \\ \square G' = -4\pi \left( v - \frac{dg}{dt} \right) \\ \square H' = -4\pi \left( w - \frac{dh}{dt} \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \square f = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square F' - \frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dx} \square \psi' \\ \square g = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square G' - \frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dy} \square \psi' \\ \square h = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square H' - \frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dz} \square \psi' \end{cases} \quad (4)$$

La prima questione che si pone è quella di sapere se

$$\sum \frac{dX}{dt} = 0$$

cioè se le vibrazioni sono trasversali. La risposta è negativa: l'espressione precedente non è più nulla nel caso attuale (moto traslatorio) ma è ovvio che essendo nulla nel caso dei corpi a riposo, nei corpi in movimento è molto piccola, *dell'ordine dell'aberrazione*.

**408.** Supponiamo ora di avere a che fare con onde piane; le nostre formule si semplificheranno; e se assumiamo inoltre che il piano dell'onda sia perpendicolare all'asse  $z$ , le nostre funzioni dipenderanno solo da  $z$  e  $t$ .

La prima relazione (2) diventa allora,

$$u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} + \zeta \frac{dX}{dz} - \xi \frac{dZ}{dz} \quad (2 \text{ bis})$$

Anche la prima relazione (4) si semplifica e diviene

$$\square f = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square F' \quad (4 \text{ bis})$$

Inoltre, la nostra espressione

$$\sum \frac{dX}{dt}$$

che qui si riduce a

$$\frac{dZ}{dz}$$

è dell'ordine dell'aberrazione; ora essendo  $\xi, \eta, \zeta$  pure dell'ordine dell'aberrazione, l'espressione

$$\xi \frac{dZ}{dz}$$

sarà dell'ordine del quadrato dell'aberrazione; trascureremo quindi questo termine nell'espressione (2 bis), in accordo con la nostra ipotesi. Questa relazione diventa quindi,

$$u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} + \zeta \frac{dX}{dz} \quad (2 \text{ ter})$$

D'altra parte, sviluppiamo l'espressione (4 bis); essa ci dà

$$\square f = \frac{d^2 f}{dz^2} - K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = -\frac{K_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \square F'$$

e sostituendo  $\square F'$  con il suo valore (3)

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = K_0 \frac{d}{dt} \left( u - \frac{df}{dt} \right)$$

o ancora, tenendo conto della (2 ter)

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = K_0 \frac{d^2 X}{dt^2} + K_0 \zeta \frac{d^2 X}{dz dt} \quad (4 \text{ ter})$$

**409.** Valutiamo separatamente ogni termine di questa relazione e per semplicità supponiamo che la luce sia monocromatica, cioè supponiamo che tutte le nostre funzioni contengano come fattore  $e^{ip(nz\sqrt{K_0}-t)}$ .

Avremo allora

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -p^2 X$$

$$\frac{d^2 X}{dz dt} = p^2 n \sqrt{K_0} X$$

D'altra parte

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -n^2 p^2 K_0 f$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -p^2 f$$

La (4 ter) diviene pertanto,

$$-n^2 p^2 K_0 f + K_0 p^2 f = -K_0 p^2 X + K_0 \zeta p^2 n \sqrt{K_0} X$$

o infine,

$$(n^2 - 1) f = X \left( 1 - \zeta n \sqrt{K_0} \right) \quad (5)$$

**410.** Trasformiamo ora le equazioni (1).

Nel caso di un corpo a riposo la prima equazione (e) ci dà

$$X = f \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p^2}$$

nel caso di un corpo in movimento essa deve essere sostituita dall'equazione (1) che ne differisce per due ragioni; prima  $f$  è sostituita da

$$f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta)$$

Poi la derivata  $\frac{d^2 X}{dt^2}$  è sostituita da  $\frac{\partial^2 X_K}{\partial t^2}$ . Bisogna quindi nella formula precedente sostituire  $f$  con  $f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta)$  e  $p$  con  $p'$  e si ottiene:

$$X = \left[ f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \right] \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p'^2} \quad (6)$$

Valutiamo la quantità che compare nella parentesi del secondo membro trascurando i termini dell'ordine del quadrato dell'aberrazione.

Per i corpi a riposo avevamo  $\gamma = 0$ . D'altra parte

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

che diviene ponendo  $\gamma = 0$

$$4\pi u = -\frac{d\beta}{dz}$$

o anche

$$4\pi \left( \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} \right) = -\frac{d\beta}{dz}$$

da cui

$$4\pi (f + X) = n\sqrt{K_0}\beta$$

o, per i corpi a riposo,

$$(n^2 - 1) f = X$$

da cui

$$n^2 f = X + f$$

e di conseguenza

$$4\pi n^2 f = n\sqrt{K_0}\beta$$

di modo che abbiamo in definitiva

$$\gamma = 0 \quad \beta = \frac{4\pi n f}{\sqrt{K_0}}$$

queste equazioni sono vere, lo ripeto, solo se si suppone che non ci sia movimento; sono quindi vere fino ai termini dell'ordine dell'aberrazione. Quindi si ha

$$n\gamma = 0 \quad \zeta\beta = \frac{4\pi n f \zeta}{\sqrt{K_0}}$$

che sono vere fino all'ordine del quadrato dell'aberrazione, che abbiamo concordato di trascurare.

Quindi viene per un corpo in movimento,

$$X = \left( f - f\zeta n\sqrt{K_0} \right) \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p'^2}$$

o infine,

$$X = f \left( 1 - \zeta n\sqrt{K_0} \right) \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p'^2} \quad (7)$$

Moltiplicando le relazioni (5) e (7) membro a membro, viene

$$n^2 - 1 = \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p'^2} \left( 1 - \zeta n\sqrt{K_0} \right)$$

o anche

$$n^2 - 1 = \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p'^2} \left( 1 - 2\zeta n\sqrt{K_0} \right) \quad (8)$$

Indichiamo con  $n_0$  il valore dell'indice di rifrazione per un corpo a riposo ( $\zeta = 0$ ); si ha allora

$$n_0^2 - 1 = \sum \frac{a_K}{p_0^2 - p'^2}$$

di modo che la (8) si può scrivere

$$\frac{n^2 - 1}{n_0^2 - 1} = 1 - 2\zeta n \sqrt{K_0}$$

o ancora

$$\frac{n^2 - n_0^2}{n_0^2 - 1^2} = -2\zeta n \sqrt{K_0} \quad (9)$$

**411.** Calcoliamo ora il coefficiente di trascinamento.

La velocità in un mezzo rifrangente diverso dal corpo in questione è

$$\frac{1}{n_0 \sqrt{K_0}}$$

La velocità nei corpi in movimento

$$\frac{1}{n \sqrt{K_0}}$$

In assenza di trascinamento avremmo

$$\frac{1}{n_0 \sqrt{K_0}} = \frac{1}{n \sqrt{K_0}}$$

se vi fosse trascinamento totale delle onde, avremmo

$$\frac{1}{n \sqrt{K_0}} = \frac{1}{n_0 \sqrt{K_0}} + \zeta$$

e infine se vi è un trascinamento parziale delle onde, con coefficiente  $\varepsilon$ , abbiamo

$$\frac{1}{n \sqrt{K_0}} = \frac{1}{n_0 \sqrt{K_0}} + \zeta \varepsilon$$

Ricaviamo da tutto ciò

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} \left( 1 + \zeta \varepsilon n_0 \sqrt{K_0} \right)$$

e siccome la differenza tra  $n$  e  $n_0$  è dell'ordine dell'aberrazione

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} \left( 1 + \zeta \varepsilon n \sqrt{K_0} \right)$$

da cui

$$n^2 = n_0^2 \left( 1 + \zeta \varepsilon n \sqrt{K_0} \right)^{-2}$$

o, trascurando i termini dell'ordine di  $\zeta^2$

$$n^2 = n_0^2 \left( 1 - 2\zeta \varepsilon n \sqrt{K_0} \right)^{-2}$$

da cui

$$\frac{n^2 - n_0^2}{n_0^2} = -2\zeta \varepsilon n \sqrt{K_0}$$

e infine

$$\varepsilon = \frac{n^2 - n_0^2}{n_0^2 (-2\zeta \varepsilon n \sqrt{K_0})}$$

ora dalla (11)

$$\frac{n^2 - n_0^2}{n_0^2 - 1} = -2\zeta n \sqrt{K_0}$$

pertanto

$$\varepsilon = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} = 1 - \frac{1}{n_0^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Come si voleva dimostrare.

Questo, trascurando i termini dell'ordine del quadrato dell'aberrazione, perché, abbiamo detto, la differenza tra  $n$  e  $n_0$  è dell'ordine dell'aberrazione.

Vediamo quindi che il valore di  $n$  che compare nell'espressione del coefficiente di resistenza non rappresenta l'indice di rifrazione medio come le originarie vedute di Fresnel farebbero prevedere, ma che esso dipende dal colore considerato e non è lo stesso vale per un raggio ordinario o per un raggio straordinario.

La teoria di Lorentz spiega dunque molto bene il fatto paradossale che l'esperienza ci aveva portato ad ammettere, ma che a prima vista sembrava difficile da conciliare con le idee di Fresnel. Chiariamo il significato di questa formula.

Chiariamo meglio il significato di questa formula.

$\frac{1}{n\sqrt{K_0}}$  rappresenta la velocità assoluta di traslazione dell'onda;  $\frac{1}{n_0\sqrt{K_0}}$  rappresenta la velocità con la quale si propagherebbe l'onda se la terra fosse in quiete e se il periodo del moto vibratorio fosse relativo, tenendo conto del principio di Doppler-Fizeau. L'ultimo termine  $\zeta \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  rappresenta il prodotto della velocità di trascinamento  $\zeta$  per il fattore  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ , con  $n$  riferentesi al colore considerato.

**412.** Dimostriamo ora un teorema più generale.

**Teorema.** *Il moto della terra non influisce sui fenomeni ottici se si trascurano i quadrati di  $\xi, \eta, \zeta$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare questo teorema ricordiamo le equazioni da noi utilizzate per spiegare i fenomeni ottici. Queste sono,

$$X = \sum X_K \quad Y = \sum Y_K \quad Z = \sum Z_K \quad (1)$$

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{\partial^2 X_K}{\partial t^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \\ \lambda_K \frac{\partial^2 Y_K}{\partial t^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\zeta\alpha - \xi\gamma) \\ \lambda_K \frac{\partial^2 Z_K}{\partial t^2} + \frac{Z_K}{L_K} = h + \frac{X}{3} + \frac{K_0}{4\pi} (\xi\beta - \eta\alpha) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right) \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{df}{dz} - \frac{dh}{dx} \right) \\ \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} + \frac{d}{dz} (X\zeta - Z\xi) - \frac{d}{dy} (Y\xi - X\eta) \\ v = \frac{dg}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{d}{dx} (Y\xi - X\eta) - \frac{d}{dz} (Z\eta - Y\zeta) \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \frac{d}{dy} (Z\eta - Y\zeta) - \frac{d}{dx} (X\zeta - Z\xi) \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum \frac{df}{dx} + \sum \frac{dX}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} = 0 \quad (7)$$

Operiamo i seguenti cambiamenti di variabili, ponendo

$$\begin{cases} f' = f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \\ g' = g + \frac{K_0}{4\pi} (\zeta\alpha - \xi\gamma) \\ h' = h + \frac{K_0}{4\pi} (\xi\beta - \eta\alpha) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - 4\pi (\eta h - \zeta g) \\ \beta' = \beta - 4\pi (\zeta f - \xi h) \\ \gamma' = \gamma - 4\pi (\xi g - \eta f) \end{cases} \quad (9)$$

e prendiamo come variabili  $x', y', z', t'$  definite da

$$\begin{cases} x' = x - t\xi \\ y' = y - t\eta \\ z' = z - t\zeta \end{cases} \quad (10)$$

$$t' = t - K_0 \sum x\xi \quad (11)$$

□

Diciamo qualche parola sulla nuova variabile  $t'$ : è quella che Lorentz chiama *tempo locale*. In un dato punto  $t$  e  $t'$  differiranno solo per una costante,  $t'$  rappresenterà quindi sempre il tempo, ma l'origine dei tempi sarà diversa nei diversi punti: questo giustifica il suo nome.

Qual è l'ordine di grandezza di questa ora locale? A questo scopo, consideriamo due orologi posti a un chilometro di distanza l'uno dall'altro e trascinati dal moto della Terra. Secondo la definizione di tempo locale di Lorentz ci sarebbe una differenza nelle indicazioni di questi orologi di  $\frac{1}{3 \times 10^9}$  secondi.

Nei calcoli seguenti trascurerò costantemente i quadrati di  $\xi, \eta, \zeta$ .

Dalle relazioni (10) e (11) ricavo,

$$t = t' + K_0 \sum x\xi$$

$$\begin{cases} x = x' + t\xi \\ y = y' + t\eta \\ z = z' + t\zeta \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} + \sum \xi \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + K_0 \xi \frac{d}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} + K_0 \eta \frac{d}{dt} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} + K_0 \zeta \frac{d}{dt} \end{cases}$$

Introducendo questo cambio di variabile, le equazioni fondamentali che abbiamo trascritto sopra diventano,

$$X = \sum X_K \quad Y = \sum Y_K \quad Z = \sum Z_K$$

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{\partial^2 X_K}{\partial t^2} + \frac{X_K}{L_K} = f' + \frac{X}{3} \\ \lambda_K \frac{\partial^2 Y_K}{\partial t^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g' + \frac{X}{3} \\ \lambda_k \frac{\partial^2 Z_K}{\partial t^2} + \frac{Z_K}{L_K} = h' + \frac{X}{3} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha'}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dh'}{dy'} - \frac{dg'}{dz'} \right) \\ \frac{d\beta'}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{df'}{dz'} - \frac{dh'}{dx'} \right) \\ \frac{d\gamma'}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dg'}{dx'} - \frac{df'}{dy'} \right) \end{array} \right.$$

e ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{df'}{dt'} + \frac{dX}{dt'} \\ v' = \frac{dg'}{dt'} + \frac{dY}{dt'} \\ w' = \frac{dh'}{dt'} + \frac{dZ}{dt'} \end{array} \right.$$

viene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'} = 4\pi u' \\ \frac{d\alpha'}{dz'} - \frac{d\gamma'}{dx'} = 4\pi v' \\ \frac{d\beta'}{dx'} - \frac{d\alpha'}{dy'} = 4\pi w' \end{array} \right.$$

$$\sum \frac{df'}{dx'} + \sum \frac{dX}{dx'} = 0$$

$$\sum \frac{d\alpha'}{dx'} = 0$$

Otteniamo quindi le stesse equazioni del caso di quiete, tranne che le lettere sono accentate nel caso attuale.

Quali conclusioni potremmo trarre da ciò? Cosa può vedere un osservatore coinvolto nel movimento della terra? Innanzitutto, sappiamo che negli esperimenti ottici le misure più precise sono quelle di posizione: la posizione di una frangia di interferenza rispetto a un'altra, ecc.; notiamo quindi che in certi punti abbiamo luce e che in altri punti luce si ha l'oscurità. Nelle zone prive di luce si ha che  $f, g, h; \alpha, \beta, \gamma$  si annullano a loro volta; ora  $\alpha', \beta', \gamma'; f', g', h'$  si annullano contemporaneamente a  $\alpha, \beta, \gamma; f, g, h$ : i fenomeni osservati saranno quindi gli stessi sia che lo spostamento elettrico sia  $f, g, h$  o  $f', g', h'$ , sia che la forza magnetica sia  $\alpha, \beta, \gamma$  o  $\alpha', \beta', \gamma'$ . Ora  $x', y', z'$  sono le coordinate prese rispetto agli assi mobili (che seguono il moto della terra) pertanto la conclusione precedente ci dice che i fenomeni ottici sono gli stessi sia che le coordinate siano  $x, y, z$  sia che la terra rimanga a riposo.

Per quanto riguarda la differenza di tempo locale, questa è troppo piccola ( $\frac{1}{3 \times 10^9}$  secondi per chilometro di distanza) per essere apprezzata. I fenomeni ottici non permettono quindi di rilevare il movimento della Terra (trascurando i quadrati di  $\xi, \eta, \zeta$ ).

I fenomeni di riflessione vetrosa, polarizzazione, ecc. possono essere combinati in tutti i modi possibili; non ci sarà nulla. Questo perché nelle nostre equazioni non abbiamo affatto dato per scontato di avere a che fare con un mezzo omogeneo.

**413.** Si potrebbe sollevare un'obiezione alla conclusione appena fatta: si potrebbe dire che se la posizione delle frange non viene modificata, non ne consegue che non lo sia anche la loro intensità; e se potessimo misurare questa variazione di intensità avremmo un mezzo per rilevare il movimento della Terra attraverso fenomeni ottici. Ma vedremo che non è così: è materialmente impossibile misurare una tale variazione di intensità.

Vediamo questo.

L'intensità luminosa è proporzionale all'energia elettrica o magnetica e l'energia elettrica presente in un elemento e  $D\tau$ , riferita all'unità di volume, ha l'espressione,

$$\frac{2\pi}{K_0} \sum f^2$$

Ebbene, confrontiamo questa espressione con la seguente

$$\frac{2\pi}{K_0} \sum f'^2$$

Sostituendo  $f'$  con il suo valore e trascurando i quadrati di  $\xi, \eta, \zeta$ , viene

$$\frac{2\pi}{K_0} \sum f'^2 = \frac{2\pi}{K_0} \sum f^2 + \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

D'altra parte, l'energia magnetica riferita all'unità di volume ha per espressione,

$$\frac{1}{8\pi} \sum \alpha^2$$

confrontiamola con

$$\frac{1}{8\pi} \sum \alpha'^2$$

Quest'ultima espressione vale

$$\frac{1}{8\pi} \sum \alpha'^2 = \frac{1}{8\pi} \sum \alpha^2 + \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

Confrontiamo pertanto le tre quantità seguenti,

$$\frac{2\pi}{K_0} \sum f^2 \quad \frac{1}{8\pi} \sum \alpha^2 \quad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

Se le onde sono piane si trova facilmente che queste tre quantità stanno tra loro come

$$\frac{1}{n^2} \quad 1 \quad \frac{2}{10000} \frac{\cos \varphi}{n}$$

(Essendo  $\varphi$  l'angolo tra la velocità della materia e la direzione di propagazione dell'onda).  
Cos'è il risultato di ciò? È il termine complementare.

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

è molto piccolo; il rapporto tra questo termine e l'intensità totale sarà una frazione molto piccola dell'intensità totale. Ciò rappresenterebbe al massimo  $2/10000$  dell'intensità totale. Ora, è assolutamente impossibile misurare un'intensità luminosa entro  $1/5000$ ; se si fotografano le frange di interferenza, non si può apprezzare sulla lastra fotografica, da un punto all'altro, una differenza di intensità di  $1/2000$ ; si vede quindi che questa variazione di intensità luminosa prevista dalle considerazioni precedenti non è sperimentalmente fattibile.

**414.** Si noti, tuttavia, che le considerazioni precedenti presuppongono che le onde siano piane. In generale, le onde utilizzate in ottica sono piane. Conosco solo l'esperimento di Otto Wiener<sup>46</sup> in cui le onde non sono del tutto piane. Wiener fa interferire due onde ad angolo retto; ottiene frange eccessivamente fini (circa 4 per millesimo di millimetro). In queste condizioni non abbiamo più a che fare con onde piane e  $\frac{2\pi}{K_0} \sum f^2$  può quindi annullarsi senza che il termine complementare (il determinante di cui sopra) si annulli contemporaneamente, di conseguenza senza che  $\frac{2\pi}{K_0} \sum f'^2$  si annulli: le frange potrebbero quindi essere spostate dal movimento della terra di  $1/1000$  del loro valore: tale spostamento è del tutto inapprezzabile; si già molto contenti di poter vedere queste frange, ma non si può cercare di misurare uno spostamento che non superi

<sup>46</sup>OTTO WIENER. *Wied. Ann.*, t. XL.

$1/1000$  della loro larghezza (che è di per sé uguale a  $1/4$  di millimetro): sarebbe una perdita di tempo.

**415.** Nemmeno la differenza rispetto al tempo locale può essere evidenziata. Abbiamo visto, infatti, che secondo Lorentz la differenza tra tempo vero e tempo locale per 1 chilometro di distanza è di  $1/3 \times 10^9$  secondi. Questo tempo è sufficientemente lungo, è vero, rispetto ad un periodo vibratorio, e di conseguenza sembrerebbe poter essere evidenziato dalle interferenze, solo che bisogna ricordare che non si possono osservare direttamente le differenze di fase tra due vibrazioni che si verificano in due punti diversi.

*I fenomeni ottici non possono quindi essere alterati dal movimento della Terra.*

**416.** Da questo punto di vista la teoria di Lorentz è in perfetto accordo con l'esperienza. Ma Michelson fece interferire due raggi luminosi nelle seguenti condizioni: il primo subiva una riflessione su uno specchio unidirezionale posto nell'azimut  $45^\circ$ , poi una riflessione su uno specchio posto nell'azimut  $90^\circ$ ; e poi attraversava lo stesso specchio unidirezionale per trasmissione; il secondo raggio attraversava prima lo stesso specchio e poi veniva riflesso su uno specchio nell'azimut  $0^\circ$  e poi una riflessione sul unidirezionale.

Nelle condizioni dell'esperienza, i termini dell'ordine del quadrato dell'aberrazione avrebbero dovuto diventare osservabili e tuttavia il risultato era ancora negativo. La teoria di Lorentz, come tutte le altre teorie ottiche, prevedeva un risultato positivo.

Si è allora immaginata un'ulteriore ipotesi. Tutti i corpi subirebbero un accorciamento di  $1/2 \times 10^9$  della loro lunghezza nel verso del moto della terra.

Questa strana proprietà sembrerebbe essere una vera e propria "spinta" data dalla natura per impedire che il movimento assoluto della Terra venga rivelato dai fenomeni ottici. Ciò non può soddisfare e credo di dover esprimere qui il mio sentimento: ritengo molto probabile che i fenomeni ottici dipendano solo dai movimenti relativi dei corpi materiali presenti, delle sorgenti luminose o dei dispositivi ottici e *non da grandezze prossime all'ordine della grandezza dell'ordine del quadrato o del cubo dell'aberrazione, ma rigorosamente*. Man mano che gli esperimenti diventeranno più accurati, questo principio verrà verificato con maggiore precisione.

Per ogni approssimazione sarà necessaria una nuova spinta, una nuova ipotesi? Ovviamente no: una teoria ben costruita dovrebbe consentire di dimostrare il principio in tutto il suo rigore, tutto d'un colpo. La teoria di Lorentz non lo fa ancora. Tra tutte quelle proposte, questa è quella che più si avvicina a questo obiettivo. Possiamo quindi sperare di renderla perfettamente soddisfacente sotto questo aspetto senza modificarla troppo in profondità.

# Cap. VII - Influenza del movimento della terra sui fenomeni elettrici propriamente detti

417. Osserviamo ora i fenomeni elettrici propriamente detti che hanno sede nei *conduttori*.

Quali sono le equazioni fondamentali di Lorentz in questo caso? Notiamo innanzitutto che quando si ha a che fare con i conduttori non si ha più alcuna polarizzazione e che di conseguenza l'equazione in  $\lambda$  deve essere sostituita dall'equazione che esprime la legge di Ohm, vale a dire

$$\begin{cases} \lambda p = \frac{K_0}{4\pi} f (\eta\gamma - \zeta\beta) \\ \lambda q = \frac{K_0}{4\pi} g (\zeta\alpha - \xi\gamma) \\ \lambda r = \frac{K_0}{4\pi} h (\xi\beta - \eta\alpha) \end{cases}$$

essendo  $\lambda$  la resistenza specifica.

Quanto alle altre equazioni, si ha

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right) \\ \frac{d\beta}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{df}{dz} - \frac{dh}{dx} \right) \\ \frac{d\gamma}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{df}{dt} + p + \rho\xi \\ v = \frac{dg}{dt} + q + \rho\eta \\ w = \frac{dh}{dt} + \rho\zeta \end{cases}$$

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

Introducendo lo stesso cambio di variabile precedente, queste equazioni diventano

$$\begin{cases} \frac{d\alpha'}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dh'}{dy'} - \frac{dg'}{dz'} \right) \\ \frac{d\beta'}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{df'}{dz'} - \frac{dh'}{dx'} \right) \\ \frac{d\gamma'}{dt'} = -\frac{4\pi}{K_0} \left( \frac{dg'}{dx'} - \frac{df'}{dy'} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'} = 4\pi u' \\ \frac{d\alpha'}{dz'} - \frac{d\gamma'}{dx'} = 4\pi v' \\ \frac{d\beta'}{dx'} - \frac{d\alpha'}{dy'} = 4\pi w' \end{cases}$$

ponendo

$$\begin{cases} u' = \frac{df'}{dt'} + p \\ v' = \frac{dg'}{dt'} + q \\ w' = \frac{dh'}{dt'} + r \end{cases}$$

dove  $\frac{df'}{dt'}$ ,  $\frac{dg'}{dt'}$ ,  $\frac{dh'}{dt'}$  rappresentano la nuova corrente di spostamento e  $(p, q, r)$  la corrente di conduzione.

Quanto al gruppo (1) di equazioni fondamentali di Lorentz, diviene

$$\begin{cases} \lambda p = \frac{K_0}{4\pi} f' \\ \lambda q = \frac{K_0}{4\pi} g' \\ \lambda r = \frac{K_0}{4\pi} h' \end{cases}$$

Poniamo ancora

$$\rho' = \rho - K_0 \sum \xi p$$

dove

$$\sum \xi p = \xi p + \eta q + \zeta r$$

viene allora

$$\begin{aligned} \sum \frac{df'}{dx'} &= \rho' \\ \sum \frac{d\alpha'}{dx'} &= 0 \end{aligned}$$

**418.** Troviamo quindi le stesse equazioni come se la Terra fosse a riposo; tranne per il fatto che le lettere non accentate vengono sostituite dalle stesse lettere accentate. C'è solo una piccola modifica: per quanto riguarda  $\rho$ , che viene sostituito da

$$\rho' = \rho - K_0 \sum \xi p$$

Vediamo allora se questo cambiamento della densità elettrica influisce sui fenomeni elettrostatici.

Notiamo innanzitutto che il principio di conservazione dell'elettricità non viene alterato da questa variazione di  $\rho$ . Abbiamo visto, infatti, che le equazioni fondamentali di Lorentz sono compatibili con questo principio e poiché le equazioni che abbiamo appena ottenuto, supponendo la Terra in movimento, mantengono la stessa forma di quelle per il caso in cui essa sia a riposo, ne deriva che saranno comunque compatibili con il principio di conservazione dell'elettricità.

**419.** Ma ci si potrebbe chiedere se questo cambiamento non influisca sugli effetti meccanici che si osservano.

Per capirlo, consideriamo un conduttore percorso da una corrente permanente e valutiamo le forze a cui sarà sottoposto, rapportandole all'unità di volume.

Questo conduttore sarà soggetto a:

1° Alla forza elettrostatica

$$\begin{cases} \rho \frac{K_0}{4\pi} f \\ \rho \frac{K_0}{4\pi} g \\ \rho \frac{K_0}{4\pi} h \end{cases}$$

2° All'azione elettrodinamica. Questa azione è dovuta a quella del campo magnetico sul conduttore. Il campo magnetico esercita la propria azione sulla corrente di conduzione  $(p, q, r)$  e sulla corrente di convezione  $(\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta)$ . Si avrà quindi per questa azione elettrodinamica

$$\begin{cases} (p + \rho\xi) \beta - (q + \rho\eta) \alpha \\ (q + \rho\eta) \gamma - (r + \rho\zeta) \beta \\ (r + \rho\zeta) \alpha - (p + \rho\xi) \gamma \end{cases}$$

si avrà pertanto in totale

$$\begin{cases} \rho \frac{K_0}{4\pi} f + (q + \rho\eta) \gamma - (r + \rho\zeta) \beta \\ \rho \frac{K_0}{4\pi} g + (r + \rho\zeta) \alpha - (p + \rho\xi) \gamma \\ \rho \frac{K_0}{4\pi} h + (p + \rho\xi) \beta - (q + \rho\eta) \alpha \end{cases}$$

che si può scrivere ancora

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{K_0}{4\pi} f + (\eta\gamma - \zeta\beta) \right] + (q\gamma - r\beta) \\ \rho \left[ \frac{K_0}{4\pi} g + (\zeta\alpha - \xi\gamma) \right] + (r\alpha - p\gamma) \\ \rho \left[ \frac{K_0}{4\pi} h + (\xi\beta - \eta\alpha) \right] + (p\beta - q\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

ciò se la terra fosse in quiete.

Nel caso del movimento si ha

$$\begin{cases} \rho' \frac{K_0}{4\pi} f' + q\gamma' - r\beta' \\ \rho' \frac{K_0}{4\pi} g' + r\alpha' - p\gamma' \\ \rho' \frac{K_0}{4\pi} h' + p\beta' - q\alpha' \end{cases} \quad (2)$$

Valutiamo lo sforzo aggiuntivo, cioè facciamo la differenza tra i due sforzi (1) e (2); si ha, ricordando che

$$\begin{cases} f' = f + \frac{K_0}{4\pi} (\eta\gamma - \zeta\beta) \\ g' = g + \frac{K_0}{4\pi} (\zeta\alpha - \xi\gamma) \\ h' = h + \frac{K_0}{4\pi} (\xi\beta - \eta\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\rho - \rho') \frac{K_0}{4\pi} f + q(\gamma - \gamma') - r(\beta - \beta') \\ (\rho - \rho') \frac{K_0}{4\pi} g + r(\alpha - \alpha') - p(\gamma - \gamma') \\ (\rho - \rho') \frac{K_0}{4\pi} h + p(\beta - \beta') - (q - q') \end{cases}$$

ora

$$\rho' = \rho - K_0 \sum \xi p$$

pertanto

$$\begin{cases} 4\pi f \sum p\xi + q(\gamma - \gamma') - r(\beta - \beta') \\ 4\pi g \sum p\xi + r(\alpha - \alpha') - p(\gamma - \gamma') \\ 4\pi h \sum p\xi + p(\beta - \beta') - (q - q') \end{cases}$$

o ancora, ricordando che

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - 4\pi (\eta h - \zeta g) \\ \beta' = \beta - 4\pi (\zeta f - \xi h) \\ \gamma' = \gamma - 4\pi (\xi g - \eta f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\pi \xi (fp + gq + hr) = 4\pi \xi \sum fp \\ 4\pi \eta (fp + gq + hr) = 4\pi \eta \sum fp \\ 4\pi \zeta (fp + gq + hr) = 4\pi \zeta \sum fp \end{cases}$$

Ora noi abbiamo indicando con  $P, Q, R$  le componenti della forza elettrica

$$\begin{cases} P = \frac{4\pi}{K_0} f \\ Q = \frac{4\pi}{K_0} g \\ R = \frac{4\pi}{K_0} h \end{cases}$$

pertanto

$$\begin{cases} 4\pi \xi \sum fp = K_0 \xi \sum Pp \\ 4\pi \eta \sum fp = K_0 \eta \sum Pp \\ 4\pi \zeta \sum fp = K_0 \zeta \sum Pp \end{cases}$$

Quale è il significato di  $\sum Pp$ ? Abbiamo visto in precedenza parlando della teoria di Hertz, che  $\sum Ppd\tau$ , rappresentava il calore di Joule prodotto nell'elemento di volume  $d\tau$  nell'unità di tempo se in questo elemento di volume non esiste alcuna causa che produce energia elettrochimica o termoelettrica (effetto Peltier, ecc.)<sup>47</sup>

Pertanto, se consideriamo un circuito percorso da una corrente permanente, il calore di Joule speso in questo circuito è uguale all'energia prodotta dalla batteria. Pertanto l'integrale  $\int Pp$  esteso all'intero circuito è nullo: l'integrale della forza addizionale estesa all'intero conduttore, o ciò che è lo stesso, all'intero spazio, è identicamente nulla.

La forza complementare non dà quindi una risultante di traslazione, ma si riduce piuttosto a una coppia.

Lorentz nella sua memoria del 1895<sup>48</sup> giunge invece a dire che questa forza complementare del primo ordine non esiste. Abbiamo visto, tuttavia, che l'analisi precedente ce lo ha dimostrato abbastanza facilmente.

**420.** Per farci un'idea chiara dell'entità di questa forza, citiamo un esempio numerico di Liénard<sup>49</sup>. Egli considera una dinamo da 98 kilowatt e suppone che la sua resistenza esterna sia uguale alla sua resistenza interna.

L'equivalente meccanico del calore rilasciato al secondo nel circuito esterno sarà,

$$\frac{1}{2}100 \times 100 \text{ kgm}$$

La forza supplementare esercitata sul circuito esterno, dove le forze elettromotrici sono nulle, varrà,

$$K_0\xi \frac{1}{2}100 \times 100$$

o

$$K_0\xi = \frac{\xi}{V^2} = \frac{\xi}{V} \cdot \frac{1}{V}$$

$\frac{\xi}{V}$  il rapporto tra la velocità della terra e quella della luce è uguale a  $10^{-4}$  e  $V$  la velocità della luce è uguale a  $3 \times 10^9$ , prendendo per unità di lunghezza il metro.

Si ottiene pertanto

$$K_0\xi \frac{1}{2}100 \times 100 = \frac{10^{-4}}{3 \times 10^9} \cdot \frac{1}{2}10^4 = \frac{1}{6 \times 10^8} \text{ kgr} = \frac{1}{600} \text{ milligr.}$$

cioè una forza completamente trascurabile.

Riassumendo, vediamo che nel caso dei fenomeni elettrostatici, nonostante esistano termini di primo ordine, non esiste alcuna azione che possa essere dimostrata sperimentalmente. La teoria di Lorentz rimane quindi compatibile con i fatti sperimentali.

<sup>47</sup>In quest'ultimo caso sarebbe necessario sottrarre dall'espressione precedente questa energia elettrica dovuta a fenomeni termoelettrici, ecc.

<sup>48</sup>LORENTZ. *Versuch einer Theorie in bewegten Korpfern*. Leiden, 1896..

<sup>49</sup>*Eclairage électrique*, t. XVI, p. 324.

# Capitolo VIII . Polarizzazione rotatoria magnetica e fenomeno di Zeeman

421. Ricordiamo in poche parole in cosa consistono questi fenomeni.

Faraday ha mostrato che certi corpi, quando vengono posti in un campo magnetico intenso e attraversati da un raggio di luce polarizzata, hanno la proprietà di far ruotare il piano di polarizzazione di questo raggio di luce quando il campo magnetico è parallelo al raggio polarizzato considerato. Se il campo è perpendicolare al raggio polarizzato, non si osserva nulla di particolare; infine se il campo è obliquo si ha un'azione che è causata dalla componente del campo parallela al raggio, l'altra componente non avendo influenza: si ottiene quindi lo stesso risultato come se la componente del campo parallela al raggio esistesse da sola.

La spiegazione cinematica di questo fenomeno è la seguente: è necessario e sufficiente che la velocità di propagazione del raggio circolare destro sia diversa dalla velocità di propagazione del raggio circolare sinistro.

Lorentz, applicando la sua teoria a questo ordine di fenomeni, ha previsto nuovi risultati che sono stati verificati sperimentalmente da Zeeman. Riassumiamo questi risultati:

1° Quando il campo magnetico è parallelo al raggio, ogni riga si divide in altre due righe polarizzate. La polarizzazione sarà *totale e circolare destra* per una delle righe e *totale e circolare sinistra* per l'altra riga.

2° Se il campo magnetico è perpendicolare al raggio, si ottiene un tripletto; le tre righe sono polarizzate ma questa volta *rettilinearmente*; il piano di polarizzazione della riga mediana è perpendicolare al campo; il piano di polarizzazione delle altre due righe simmetriche alla riga mediana è parallelo al campo.

Queste sono le scoperte sperimentali di Zeeman.

Ma prima di proseguire, facciamo notare che il fenomeno di Faraday e i fenomeni di Zeeman sono completamente diversi tra loro per quanto riguarda l'azione del campo magnetico sulle onde luminose. Nel primo fenomeno l'azione del campo magnetico si esercita, infatti, sulla velocità di propagazione delle onde luminose che hanno già acquisito il loro regime permanente; nel fenomeno di Zeeman l'azione del campo magnetico sulla sorgente luminosa, dove le onde sono, per così dire, allo stato nascente, si esercita sul periodo vibratorio dell'onda.

422. La scoperta del tripletto Zeeman<sup>50</sup> sembrò per un momento una conferma clamorosa della teoria di Lorentz. Ma subito dopo Cornu<sup>51</sup> scoprì che la maggior parte delle righe non solo si dividono in tre nel campo magnetico, ma anche in quattro componenti simmetriche due a due rispetto alla riga iniziale *a*; le due righe *bb*, le meno separate dalla linea iniziale *a*, sono polarizzate rettilinearmente, solo il loro piano di polarizzazione è parallelo al campo.

Per altri corpi, in senso stretto, si osserva solo un tripletto, solo la riga mediana appare molto allargata e si può concludere che anch'essa è divisa, ma le due componenti non sono sufficientemente separate.

---

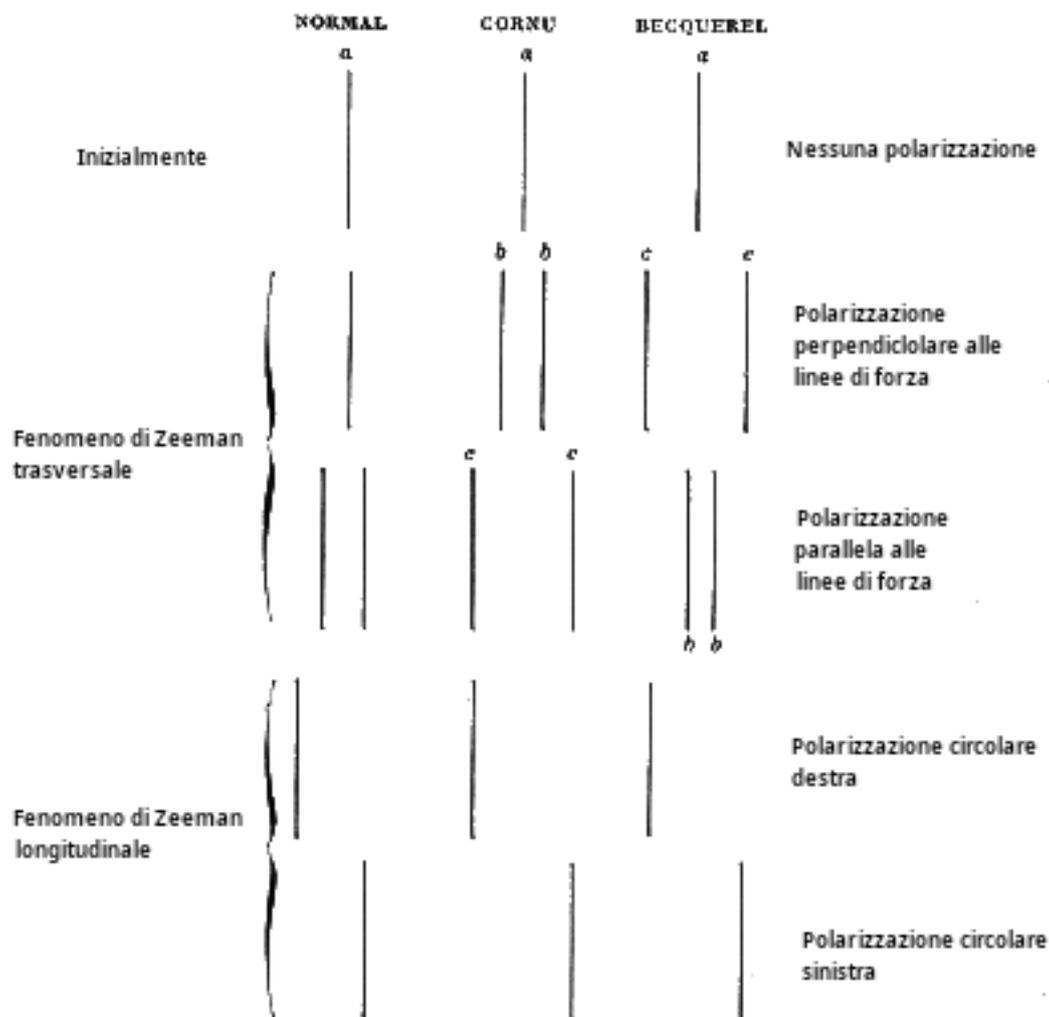
<sup>50</sup>ZEEMAN (P.). L'influenza del magnetismo sulla natura della luce emessa da una sostanza. *Eclair. élect.*, t. XI, pag. 513.

Linee doppie e triple prodotte nello spettro sotto l'influenza di un campo magnetico esterno. *Eclair. élect.*, t. XIII, pag. 274.

<sup>51</sup>CORNU (.A.). Su alcuni nuovi risultati relativi al fenomeno di Zeeman. *Eclair. élect.*, t. XIV, pag. 185.

Infine, ci sono alcune righe del ferro per le quali si ha un tripletto, ma come Becquerel e Deslandres<sup>52</sup> hanno mostrato che la polarizzazione delle righe è invertita: è la riga mediana il cui piano di polarizzazione è parallelo al campo e le due estreme che sono polarizzate perpendicolarmente al campo.

Secondo Michelson<sup>53</sup> questi fenomeni appaiono ancora più complessi.



In breve, vediamo che questi fenomeni sono più complicati di quanto Lorentz supponesse; anche la sua teoria, nella sua forma primitiva, sembrava incapace di spiegare tutti questi fatti. La modificò introducendo l'ipotesi degli ioni complessi, che esamineremo più avanti. La teoria perse così la sua seducente semplicità; è tuttavia necessario esaminare in quale misura essa sia divenuta coerente con i fatti osservati. Questo è l'esame che mi propongo di fare.

### 423. Campo magnetico intenso

Cominciamo studiando l'azione di un campo magnetico intenso. Le equazioni dedotte dalle condizioni di equilibrio delle particelle cariche tenendo conto dell'azione meccanica del campo magnetico su queste particelle sono, come già sappiamo

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} + \varepsilon_0 \left( \frac{dY_K}{dt} \gamma - \frac{dZ_K}{dt} \beta \right) \\ \lambda_K \frac{d^2 Y_K}{dt^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{X}{3} + \varepsilon_0 \left( \frac{dZ_K}{dt} \alpha - \frac{dX_K}{dt} \gamma \right) \\ \lambda_k \frac{d^2 Z_K}{dt^2} + \frac{Z_K}{L_K} = h + \frac{X}{3} + \varepsilon_0 \left( \frac{dX_K}{dt} \beta - \frac{dY_K}{dt} \alpha \right) \end{cases} \quad (1)$$

<sup>52</sup>*Eclair. élect.*, t. XV, p. 173, 23 aprile 1898.

<sup>53</sup>*Phil. mag.*, t. XLIV, p. 109-116, luglio 1897.

Possono presentarsi due casi interessanti:

1° Il campo è parallelo al raggio luminoso,

2° Il campo è perpendicolare al raggio luminoso.

Cominciamo studiando il primo caso.

#### 424. Raggio parallelo al campo

Supponiamo innanzitutto che il campo sia parallelo al raggio, cioè parallelo all'asse  $z$ . Supponiamo in altre parole

$$\alpha = \beta = 0$$

il campo si riduce allora alla sua componente  $\gamma$  e le equazioni (1) divengono

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} + \varepsilon_K \gamma \frac{dY_K}{dt} \\ \lambda_K \frac{d^2 Y_K}{dt^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{X}{3} + \varepsilon_K \gamma \frac{dX_K}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

e abbiamo ancora

$$\begin{cases} (n^2 - 1) f = X \\ (n^2 - 1) g = Y \end{cases} \quad (3)$$

#### 425. Raggio circolare destro

Ora esaminiamo come si propaga un raggio circolare destro. Sappiamo che

$$f = \text{parte reale di } f_0 e^{ip(nz\sqrt{K_0}-t)}$$

Ciò che caratterizza il raggio circolare destro è che  $g$  è la parte immaginaria di questa stessa funzione  $f$ , per cui abbiamo,

$$f + ig = f_0 e^{ip(nz\sqrt{K_0}-t)} \quad (4)$$

Analogamente le espressioni di

$$\begin{aligned} X + iY \\ X_K + iY_K \end{aligned}$$

sono proporzionali a questo stesso esponenziale immaginario. Poniamo allora

$$X_K + iY_K = U_K \quad (5)$$

$$X + iY = U = \sum U_K \quad (6)$$

si ha, tenendo conto della (3),

$$f + ig = \frac{X + iY}{n^2 - 1} = \frac{U}{n^2 - 1} \quad (7)$$

Le nostre equazioni (2) diventano allora,

$$\lambda_K \frac{d^2 U_K}{dt^2} + \frac{U_K}{L_K} = \frac{U}{n^2 - 1} + \frac{U}{3} + i\varepsilon_K \gamma \frac{dU_K}{dt} \quad (8)$$

Inoltre avremo ancora,

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_K}{dt^2} = -p^2 U_K \\ \frac{dU_K}{dt} = -ip U_K \end{cases} \quad (9)$$

Le nostre equazioni (8) si possono pertanto scrivere

$$\frac{U_K}{L_K} - \lambda_K p^2 U_K = \frac{U}{n^2 - 1} + \frac{U}{3} + p \varepsilon_K \gamma U_K \quad (10)$$

Eliminando  $U_K$  tra queste equazioni e ricordando che

$$U = \sum U_K$$

si troverà una relazione tra  $n, p$  e  $\gamma$ ; ciò ci permetterà di costruire la curva di dispersione.

Per fare questa riduzione pongo,

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum \frac{U_K^2}{2L_K} - \frac{U^2}{6} \\ \Phi_1 &= \sum \frac{\lambda_K U_K^2}{2} \\ \Phi_2 &= \frac{U^2}{2} \\ \Phi_3 &= \sum \frac{\varepsilon_K U_K^2}{2} \\ \Theta &= \Phi - p^2 \Phi_1 - \frac{\Phi_2}{n^2 - 1} - p \gamma \Phi_3 \end{aligned}$$

Le nostre equazioni (10) diventano allora,

$$\frac{d\Theta}{dU_K} = 0 \quad (11)$$

$\Phi$  è una forma quadratica omogenea per rispetto alle  $U_K$ ; abbiamo quindi in virtù del teorema delle funzioni omogenee,

$$2\Theta = \sum U_K \frac{d\Theta}{dU_K} \quad (12)$$

e di conseguenza, dalla (11)

$$\Theta = 0 \quad (13)$$

Queste equazioni ci danno dapprima i valori di  $U_K$  ed essi ci danno il valore di  $n$  in funzione di due variabili; in funzione del campo magnetico  $\gamma$  e di  $p$ , cioè in funzione del colore.

Possiamo quindi considerare le  $U_K$  e  $n$  come funzioni di due variabili indipendenti:  $p$  e  $\gamma$ .

Differenziando l'equazione (13) rispetto a  $p$  trovo,

$$\frac{d\Theta}{dp} + \frac{d\Theta}{dn} \frac{dn}{dp} + \sum \frac{d\Theta}{dU_K} \frac{dU_K}{dp} = 0$$

o, tenendo conto della (11)

$$\frac{d\Theta}{dp} + \frac{d\Theta}{dn} \frac{dn}{dp} = 0 \quad (14)$$

Avremo analogamente differenziando rispetto alla seconda variabile  $\gamma$

$$\frac{d\Theta}{d\gamma} + \frac{d\Theta}{dn} \frac{dn}{d\gamma} = 0 \quad (15)$$

L'equazione (14) ci dà  $\frac{dn}{dp}$ : è la dispersione cromatica ordinaria, cioè la variazione dell'indice con il colore. L'equazione (15) ci fornisce il valore di  $\frac{dn}{d\gamma}$  da cui dipende la polarizzazione rotatoria magnetica.

Confrontando queste due espressioni (14) e (15) vediamo che  $\frac{dn}{dp}$  e  $\frac{dn}{d\gamma}$  stanno tra loro come le derivate parziali  $\frac{d\Theta}{dp}$  e  $\frac{d\Theta}{d\gamma}$ .

Calcoliamo queste due derivate parziali. Abbiamo dapprima,

$$\frac{d\Theta}{dp} = -2p\Phi_1 - \gamma\Phi_2$$

ma  $\gamma\Phi_2$  è molto piccolo rispetto al primo termine; lo si può quindi trascurare e viene allora

$$\frac{d\Theta}{dp} = .2p\Phi_1 \quad (16)$$

e inoltre

$$\frac{d\Theta}{d\gamma} = -p\Phi_3 \quad (17)$$

$\frac{dn}{dp}$  e  $\frac{dn}{d\gamma}$  stanno dunque tra loro come  $2\Phi_1$  e  $\Phi_3$ .

Ebbene, se si suppone che le quantità  $\varepsilon_K$  sono proporzionali a  $\lambda_K$  (ipotesi non lontana dal vero) il rapporto  $\frac{\Phi_1}{\Phi_3}$  è allora costante, di conseguenza,

$$\frac{\frac{dn}{dp}}{\frac{dn}{d\gamma}} = C^{te} \quad (18)$$

si potrà quindi dire che  $\frac{dn}{dp}$  è sensibilmente proporzionale a  $\frac{dn}{d\gamma}$ .

Questa legge, enunciata da Becquerel, è verificata a volte in modo approssimativo, a volte con una certa precisione.

#### 426. Righe di assorbimento

Per ottenere le righe di assorbimento, dobbiamo cercare gli asintoti della curva di dispersione; dobbiamo quindi porre nell'equazione di questa curva  $n = \infty$  e considerare  $p$  come una funzione di  $\gamma$ . Si trova così

$$\frac{d\Theta}{dp} \frac{dp}{d\gamma} + \frac{d\Theta}{d\gamma} = 0$$

da cui tenendo conto delle relazioni (16) e (17),

$$\frac{dp}{d\gamma} = -\frac{\frac{d\Theta}{d\gamma}}{\frac{d\Theta}{dp}} = -\frac{\Theta_3}{2\Theta_1} \quad (19)$$

formula che ci permette di conoscere lo spostamento della riga di assorbimento dovuto all'azione del campo magnetico assumendo una polarizzazione circolare destra.

#### 427. Raggio circolare sinistro

Supponiamo ora di avere a che fare con un raggio circolare sinistro. In questo caso, non è più  $f + ig$  e  $X + iY$  che sono uguali al prodotto di un esponenziale per un fattore costante, ma bensì  $f - ig$  e  $X - iY$ ; è la condizione che caratterizza un raggio circolare sinistro. Dobbiamo quindi porre:

$$X_K - iY_K = U_K$$

e, ripetendo i calcoli che abbiamo fatto prima, torneremo all'equazione (8) con il solo cambiamento di segno del termine in  $\gamma$ . Otterremo quindi gli stessi risultati di cui sopra, tranne il cambiamento dei segni di  $\frac{dn}{d\gamma}$  e di  $\frac{dp}{d\gamma}$ .

La differenza di indice dei due raggi, destro e sinistro, è quindi

$$2\gamma \frac{dn}{d\gamma}$$

di conseguenza, la polarizzazione rotatoria è proporzionale a  $p \frac{dn}{d\gamma}$  o ancora tenendo conto della (18), essa sarà sensibilmente proporzionale a

$$p \frac{dn}{dp}$$

è la legge recentemente enunciata da H. Becquerel<sup>54</sup>. Ma questa formula di dispersione non è l'unica proposta. Sono state avanzate anche le seguenti formule, che hanno avuto comunque meno successo di quella di Becquerel:

$$\frac{n^2 p^2 \left( n + p \frac{dn}{dp} \right)}{p^2 \left( n + p \frac{dn}{dp} \right) \left( n + p \frac{dn}{dp} \right)}$$

La riga di assorbimento che corrisponde al numero  $p_K$  si scomporrà in altre due che corrisponderanno ai numeri

$$p_K - \frac{\Phi_{3\gamma}}{2\Phi_1} \quad p_K + \frac{\Phi_{3\gamma}}{2\Phi_1}$$

e che saranno polarizzate circolarmente, la prima a destra, la seconda a sinistra; è il *doppietto* di Zeeman.

*La teoria di Lorentz. è quindi soddisfacente nel caso in cui il raggio luminoso è parallelo al campo magnetico: ciò fornisce una buona spiegazione dei fenomeni osservati.*

#### 428. Raggio perpendicolare al campo

Supponiamo ora che il raggio sia perpendicolare al campo, il che comporta

$$\beta = \gamma = 0$$

Le nostre equazioni (1) diventano in questo caso

$$\begin{cases} \lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3} \\ \lambda_K \frac{d^2 Y_K}{dt^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{X}{3} + \varepsilon_0 \alpha \frac{dZ_K}{dt} \\ \lambda_k \frac{d^2 Z_K}{dt^2} + \frac{Z_K}{L_K} = h + \frac{X}{3} + \varepsilon_0 \alpha \frac{dY_K}{dt} \end{cases} \quad (20)$$

Si avrà inoltre

$$\begin{cases} (n^2 - 1) f = X \\ (n^2 - 1) g = Y \end{cases} \quad (21)$$

ma la relazione tra  $h$  e  $Z$  sarà diversa; non si avrà  $(n^2 - 1) h = Z$ . Abbiamo infatti

$$\sum \frac{df}{dx} + \sum \frac{dX}{dx} = 0$$

se l'onda è piana, le derivate prese rispetto a  $x$  e a  $y$  sono nulle e questa equazione si riduce a

$$\frac{dh}{dz} + \frac{dZ}{dz} = 0 \quad (22)$$

e siccome  $h$  e  $Z$  devono essere funzioni periodiche di  $z$ ,

$$h + Z = 0$$

da cui

$$h = -Z \quad (23)$$

Cosa dovremmo osservare secondo Lorentz? In primo luogo, per la prima equazione (20), non c'è spostamento; la riga perpendicolare al campo non dovrebbe quindi muoversi. Per quanto riguarda le altre righe, ecco cosa dovrebbe accadere:

<sup>54</sup>H. BECQUEREL, C. R., 1898 et 1899.

1° Quando non c'è alcun campo ( $\alpha = 0$ ), si ha

$$Z = h = Z_K = 0$$

cioè le vibrazioni delle particelle come quelle dell'etere sono trasversali.

2° Se il campo è del primo ordine (e un campo di 30.000 unità C.G.S. che produce lo sdoppiamento, ma uno sdoppiamento molto debole, può ancora, per questo motivo, essere considerato come molto piccolo) le quantità  $h$ ,  $Z$  e  $Z_K$  saranno molto piccole del primo ordine, il termine in  $\varepsilon_K$  sarà quindi del secondo ordine e potrà essere trascurato, e si avrà quindi,

$$\begin{aligned} \lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} &= f + \frac{X}{3} \\ \lambda_K \frac{d^2 Y_K}{dt^2} + \frac{Y_K}{L_K} &= g + \frac{X}{3} \end{aligned}$$

il che significa che il campo non avrà alcuna azione sulle righe. Tuttavia, non è affatto questo ciò che si osserva. L'esperienza ci insegna che in questo caso non solo il campo ha ancora un'azione, ma anche che la polarizzazione delle righe è invertita.

*Per questo motivo, la teoria di Lorentz nella sua forma originaria non sarebbe quindi in grado di spiegare il tripletto di Zeeman più di quanto non lo sia il quadrupletto di Cornu.*

**429.** Ricordiamo il ragionamento approssimato utilizzato per spiegare il tripletto di Zeeman; si poneva nelle formule (20)

$$f = g = h = 0$$

Questo perché si credeva di poter considerare le "vibrazioni proprie" di uno ione o di un sistema di ioni tralasciando l'azione dell'etere; di conseguenza, per avere le righe di assorbimento, si poneva nell'equazione della curva di dispersione  $n = \infty$ ; ne risultava

$$f = g = 0$$

ponendo inoltre  $h = 0$ , si ritrovava il tripletto di Zeeman. Ma si ha il diritto di porre  $h = 0$ ? No, perché l'equazione

$$h = -Z$$

è un'equazione vera di legame tra i movimenti dell'etere e quelli degli ioni;  $h$  può annullarsi solo contemporaneamente a  $Z$ .

**430.** Era quindi necessario modificare la teoria di Lorentz immaginando ulteriori ipotesi. Questo è ciò che fece lo stesso Lorentz quando formulò la teoria degli ioni complessi, che è solo una generalizzazione della sua prima teoria.

Devo aggiungere che in un lavoro recente, Lorentz ha cercato di spiegare il tripletto e di sfuggire alle precedenti obiezioni. Per fare ciò, ha formulato ipotesi specifiche circa l'entità dei coefficienti. Il ragionamento precedente rimane e per un campo infinitamente piccolo la suddivisione della riga è ancora infinitamente piccola di ordine superiore; ma il tripletto può verificarsi per un campo finito e si possono fare ipotesi perfettamente ammissibili per le quali un campo di 20.000 – 30.000 unità darebbe un tripletto osservabile.

Non ci è permesso porre  $h = 0$ , poiché si ha  $h = -Z$ ; ma l'azione dell'etere sulla materia, grazie alle ipotesi fatte, è abbastanza debole da poter essere trascurata in prima approssimazione, cosicché tutto accade come se si avesse  $h = 0$ .

La teoria di Lorentz spiegherebbe quindi il tripletto; ma poiché l'esperienza ci ha insegnato che non esiste un tripletto, ma un quadrupletto, dobbiamo comunque ricorrere agli ioni complessi.

Non è quindi necessario soffermarsi ulteriormente su queste ipotesi. Esamineremo ora questa teoria degli ioni complessi per vedere fino a che punto concorda con i fatti osservati.

## Teoria degli ioni complessi

**431.** Gli ioni semplici che abbiamo considerato finora si comportavano come punti materiali; abbiamo considerato solo il loro moto traslazionale. Supponiamo ora che questi ioni, anziché essere semplici, siano formati da un sistema dinamico più complicato comprendente diversi punti materiali che possono essere soggetti a qualsiasi movimento.

Per rappresentare lo stato del sistema, sceglierò delle coordinate generalizzate qualsiasi che indicherò con  $T_K$ .

Sia  $H$  la forza viva degli ioni: sarà una forma quadratica omogenea rispetto alla  $\frac{dT}{dt}$ .

Sia  $P_2$  l'energia potenziale dovuta alle azioni mutue degli ioni: a causa della piccolezza degli spostamenti, questa sarà ancora una forma quadratica omogenea rispetto alle  $T_K$ .

Sia  $-P_1$  l'energia potenziale dovuta all'azione elettrostatica dell'etere sugli ioni; possiamo supporre

$$P_1 = fX + gY + hZ$$

$X, Y, Z$  rappresentano sempre le componenti della polarizzazione elettrica e avranno forme lineari rispetto alle  $T_K$ .

Sia infine

$$\sum V_K \delta T_K$$

il lavoro virtuale delle forze dovuto all'azione del campo magnetico sugli ioni, quando questi subiscono spostamenti virtuali  $\delta T_K$ .

Le equazioni di Lagrange si scrivono allora,

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{dP_2}{dT_K} = \frac{dP_1}{dT_K} + V_K \quad (1)$$

e, siccome abbiamo sempre le equazioni

$$\begin{aligned} (n^2 - 1)f &= X \\ (n^2 - 1)g &= Y \\ h &= -Z \end{aligned}$$

il valore di  $dP_1$  si può scrivere

$$dP_1 = fdX + gdY + hdZ = \frac{XdX + YdY}{n^2 - 1} - Zdz = d\left(\frac{X^2 + Y^2}{2(n^2 - 1)} - \frac{Z^2}{2}\right) \quad (2)$$

La nostra equazione (1) diviene allora

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{dP_2}{dT_K} = \frac{d}{dT_K} \left( \frac{X^2 + Y^2}{2(n^2 - 1)} - \frac{Z^2}{2} \right) + V_K$$

o anche

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{d}{dT_K} \left( P_2 - \frac{X^2 + Y^2}{2(n^2 - 1)} + \frac{Z^2}{2} \right) = V_K$$

Per avere le righe di assorbimento, bisogna porre  $n = \infty$ , ciò che dà

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{d}{dT_K} \left( P_2 + \frac{Z^2}{2} \right) = V_K \quad (3)$$

Consideriamo quindi due forme quadratiche  $H$  e  $P_2 + \frac{Z^2}{2}$  e scegliamo le coordinate  $T_K$  in modo tale che queste due forme quadratiche si riducano ad una somma di quadrati, in modo che

$$\begin{aligned} H &= \sum \frac{1}{2} \left( \frac{dT_K}{dt} \right)^2 \\ P_2 + \frac{Z^2}{2} &= \sum \frac{p_K^2}{2} T_K \end{aligned}$$

La nostra equazione (3) assumerà la forma

$$\frac{d^2 T_K}{dt^2} + p_K^2 T_K = V_K \quad (4)$$

Ma cos'è  $V_K$ ?

Abbiamo visto che  $V_K \delta T_K$  rappresenta il lavoro virtuale delle forze dovute all'azione del campo magnetico sugli ioni quando questi subiscono spostamenti virtuali  $\delta T_K$ ; ora, le forze magnetiche sono proporzionali da un lato alle velocità degli ioni e dall'altro al campo magnetico. Le quantità  $V_K$  sono quindi bilineari rispetto a  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\frac{dT_K}{dt}$ . Ma non è tutto; l'azione di un campo magnetico su una corrente è sempre perpendicolare a questa corrente; nel caso del movimento degli ioni, dove si tratta di una corrente convettiva, questa azione del campo sarà perpendicolare alla velocità dello ione: il suo lavoro sarà quindi nullo. Si avrà pertanto identicamente,

$$\sum V_K \frac{dT_K}{dt} = 0 \quad (5)$$

### 432. Luce monocromatica

Consideriamo ora una luce monocromatica; si avrà in questo caso,

$$\begin{cases} \frac{dT_K}{dt} = -ipT_K \\ \frac{d^2 T_K}{dt^2} = -p^2 T_K \end{cases} \quad (6)$$

Ecco il significato della prima di queste equazioni:  $T_K$  è la parte reale del prodotto di un fattore costante per un esponenziale immaginario. Questo prodotto soddisferà le equazioni di  $T_K$ . Le nostre equazioni includono quindi una soluzione immaginaria che è più facile da trattare della soluzione reale e dalla quale è facile dedurre questa soluzione reale.

Sostituiamo questa soluzione immaginaria con la soluzione reale utilizzando un noto artificio.

Indichiamo con  $W_K$  ciò che  $V_K$  diventa quando sostituiamo le quantità  $\frac{dT}{dt}$  con le  $T$ ;  $W_K$  sarà quindi una forma bilineare da un lato rispetto ad  $\alpha, \beta, \gamma$  e dall'altro rispetto a  $T_K$ . Si avrà quindi

$$\sum W_K T_K = 0$$

e poi

$$V_K = -ipW_K$$

da cui

$$(p_K^2 - p^2) T_K = -ipW_K \quad (7)$$

### 433. Spostamento delle righe

Cerchiamo ora lo spostamento delle righe. Possono verificarsi due casi:

1° *Il campo magnetico è nullo.* Se non c'è campo magnetico, avremo una certa equazione le cui radici saranno

$$p = p_K$$

e ciascuna delle radici  $p_K$  corrisponderà una riga dello spettro; ma a causa della presenza, nel secondo membro, del termine in  $i$ , le righe possono raddoppiare e persino triplicare.

Supponiamo che le equazioni che ci danno  $p^2$  possano avere radici multiple, si ha allora

$$(p_K^2 - p^2) T_K = -ipW_K \quad (K = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (8)$$

es e il campo è nullo

$$(p_K^2 - p^2) T_K = 0 \quad \text{per } K \leq n \quad (9)$$

e

$$(p_K^2 - p^2) T_K = 0 \quad \text{per } K > n \quad (10)$$

ciò, lo ripeto, supponendo che tra le  $p_K$  ce ne siano  $n$ :  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  che uguali tra loro, di modo che

$$\begin{aligned} p &= p_1 & (K \leq n) \\ p_K &\geq p_1 & (K > n) \end{aligned}$$

Ora se  $p = p_1$  (per  $K \leq n$ ) l'equazione è soddisfatta di per sé; ma la (10) esige per  $p_K \geq p_1$  (per  $K > n$ ) che

$$T_K = 0$$

Quindi, quando non c'è campo magnetico, tutte le coordinate  $T_K$  si annullano, tranne le prime  $n$ .

#### 434. 2° Campo magnetico debole

Quando il campo magnetico, senza essere nullo, è molto debole, tutte le quantità  $T_K$  sono allora molto piccole, eccetto le prime  $n$ . Pertanto, in  $W_K$ , i termini che contengono  $T_1, T_2, \dots, T_n$  saranno del primo ordine, e gli altri termini, a partire da  $T_n$ , cioè  $T_{n+1}, T_{n+2}, \dots$  saranno di secondo ordine. Trascuriamo questi termini di secondo ordine nelle nostre equazioni e chiamiamo  $W'_K$  ciò che  $W_K$  diventa quando trascuriamo questi termini.

Le nostre equazioni diventano allora

$$(p_K^2 - p^2) T_K = -ipW_K \quad (K = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (8 \text{ bis})$$

Poniamo

$$\frac{p_1^2 - p^2}{-ip} = S$$

Se pongo inoltre

$$p_1 = p + \delta p$$

poiché  $\delta p$  sarà molto piccolo,  $S$  sarà molto sensibilmente

$$S = -\frac{2\delta p}{i}$$

e di conseguenza

$$\delta p = -\frac{i}{2} S$$

$S$  farà quindi conoscere lo spostamento delle righe. Affinché  $\delta p$  sia reale, è necessario che  $S$  sia puramente immaginario.

Le nostre equazioni diventano

$$ST_K = W_K \quad (11)$$

$W_K$  soddisfano alla condizione

$$\sum W_K T_K = 0 \quad (K = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (12)$$

Queste sono equazioni lineari e omogenee tra le  $n$  variabili.

$$T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$$

Uguagliando a zero il determinante di queste equazioni si avrà un'equazione in  $S$  algebrica e del  $n$ -esimo ordine; alle  $n$  radici di questa equazione corrisponderanno  $n$  righe che deriveranno dallo sdoppiamento della riga  $p = p_1$ .

Questa equazione in  $S$  avrà una forma del tutto particolare, e ciò perché  $W'_K$  che soddisfa all'identità

$$\sum W_K T_K = 0 \quad (13)$$

**435.** Per farlo comprendere scriviamo completamente questa equazione supponendo  $n = 4$ ; si ha:

$$\begin{vmatrix} S & a & b & c \\ -a & S & d & e \\ -b & -d & S & f \\ -c & -e & -f & S \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Affermo che le radici di questa equazione sono puramente immaginarie; consideriamo infatti il sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\frac{dT_K}{dt} = W'_K \quad (a)$$

questo sistema si integra immediatamente e otteniamo come soluzione particolare

$$T_K = \sum A_K e^{St}$$

Moltiplichiamo le equazioni (a) per  $T_K$  e sommiamo, viene:

$$\sum T_K \frac{dT_K}{dt} = \sum W'_K T_K$$

o, tenendo conto della (12)

$$\sum T_K \frac{dT_K}{dt} = 0$$

da cui:

$$\sum T_K^2 = \text{costante}$$

Supponiamo ora che  $S$  sia reale o complesso, ma non un immaginario puro; supponiamo per esempio

$$S = S_1 + iS_2$$

con  $S_1$  non nullo.

Se  $S$  è immaginario, la soluzione particolare è essa stessa immaginaria, solo la sua parte reale soddisfa l'equazione differenziale e quindi questa parte reale è una soluzione reale dell'equazione.

Consideriamo questa soluzione reale.

Supponiamo innanzitutto che  $S_1$  sia positivo; in questo caso se si pone  $t = -\infty$ , allora

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{parte reale di } e^{St} = 0$$

di conseguenza  $\sum A_K e^{St}$  tenderà a zero. Tutte le  $T_K$  tenderanno pertanto a zero e di conseguenza

$$\lim \sum T_K^2 = 0$$

Poiché  $\sum T_K^2$  è una costante, essa è nulla, il che può verificarsi solo se tutte le  $T_K$  sono identicamente nulle.

Ora, se  $S_1$  è negativo, si avrà ancora

$$\lim \sum T_K^2 = 0$$

per  $t = \infty$  e quindi ancora

$$\sum T_K^2 = 0$$

La parte reale di  $S$  non può quindi essere né positiva né negativa. Gli  $n$  valori di  $S$  sono quindi immaginari puri; gli  $n$  valori di  $\delta p$  saranno quindi reali, per cui le  $n$  righe dello sdoppiamento esisteranno realmente. Inoltre, le radici dell'equazione in  $S$  (essendo immaginarie coniugate a due a due) devono essere uguali a due a due e di segno opposto; vale a dire che le righe sdoppiate dovranno essere simmetriche a due a due rispetto alla linea originaria. Se  $n$  è dispari una delle radici deve essere nulla e di conseguenza una delle righe sdoppiate coincide con la riga originaria. In definitiva, è sufficiente porre  $n = 3$  per trovare il tripletto di Zeeman e  $n = 4$  per trovare il quadrupletto di Cornu.

Questa è la teoria degli ioni complessi concepita dal signor Lorentz.

### 436. Isotropia nel piano dell'onda

Per rendere conto di tutti i fenomeni osservati è necessario vedere se non sia possibile soddisfare le condizioni di simmetria imposte dall'isotropia del mezzo considerato.

Supponiamo che, mantenendo il piano dell'onda fisso (perpendicolare all'asse  $z$ ), si faccia ruotare gli assi  $x$  e  $y$  attorno all'asse  $z$  di un angolo qualunque. Le nostre equazioni devono rimanere le stesse per questi nuovi assi a causa dell'isotropia del mezzo. Siamo quindi portati a distinguere due diverse categorie tra le coordinate  $T_K$ :

1° Le *coordinate vettoriali* che saranno le componenti dei vettori fissi nello spazio, ma le cui proiezioni sugli assi varieranno secondo le leggi ordinarie quando questi assi vengono ruotati e:

2° Le *coordinate scalari*, che non varieranno al ruotare degli assi.

Prendiamo il caso  $n = 4$  e supponiamo di avere due coordinate vettoriali componenti  $X_K$  e  $Y_K$  dello stesso vettore, e due coordinate scalari che designerò con  $T_K$  e  $T'_K$ . Le nostre equazioni (11) diverranno:

$$\begin{cases} SX_K.W'_1 = 0 \\ SY_K.W'_2 = 0 \\ ST_K.W'_3 = 0 \\ ST'_K.W'_4 = 0 \end{cases} \quad (11 \text{ bis})$$

Quando gli assi ruoteranno di un angolo  $\varphi$ , le quantità  $X_K + iY_K$ ,  $\alpha + i\beta$  saranno moltiplicate per  $e^{i\varphi}$  e le quantità coniugate per  $e^{-i\varphi}$ . Pertanto  $W'_1 + iW'_2$  deve essere moltiplicato per  $e^{i\varphi}$ ;  $W'_3, W'_4$  non devono cambiare.

Concluderò che si possono sempre scegliere le due coordinate scalari in modo tale che la nostra equazione in  $S$  sia della forma:

$$\begin{vmatrix} S & a\gamma & b\alpha & c\beta \\ -a\gamma & S & b\beta & -c\alpha \\ -b\alpha & -b\beta & S & d\gamma \\ -c\beta & c\alpha & -d\gamma & S \end{vmatrix} = 0 \quad (13 \text{ bis})$$

Se vogliamo quindi soddisfare le condizioni di isotropia del mezzo, l'equazione in  $S$  deve essere di questa forma.

Ma non è tutto; il mezzo non è solo isotropo, è anche simmetrico. Le nostre equazioni quindi non devono cambiare quando si sostituisce il nostro sistema di assi con un sistema simmetrico (il piano di simmetria è ad esempio il piano  $xz$ ).

Siamo così portati a distinguere, tra le coordinate vettoriali, quelle della prima e della seconda specie, a seconda che il vettore corrispondente mantenga il segno o lo cambi quando si passa da un sistema di assi a quello simmetrico e distingueremo analogamente tra coordinate scalari quelle della prima specie, che mantengono il segno e quelle della seconda specie che lo cambiano.

Supponiamo quindi che la nostra equazione sia della forma (13 bis): quando  $y$  cambia segno,  $\gamma, \alpha, Y_K, T_K$ , devono cambiare segno, vale a dire che  $X_K$  e  $Y_K$  sono coordinate vettoriali della

prima specie,  $T'_K$  una coordinata scalare del primo tipo,  $T_K$  una coordinata scalare del secondo tipo.

Sviluppando il determinante (13 bis), si trova:

$$S^4 + S^2 (\alpha^2 \gamma^2 + b^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \alpha^2 + c^2 \beta^2 + d^2 \gamma^2) + (ad\gamma^2 + bc\alpha^2 + bc\beta^2)^2 = 0$$

Considereremo quattro casi significativi:

$$a = b \quad d = c$$

o

$$a = c \quad d = b$$

o

$$a = -b \quad d = -c$$

o

$$a = -c \quad d = -b$$

in ciascuno di questi casi le radici dell'equazione in  $S$  appena scritta dipenderanno solo dalla somma

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

che rappresenta l'intensità del campo. Queste radici non dipenderanno quindi dalla direzione di questo campo, e di conseguenza  $\delta p$ , cioè la spaziatura delle righe sdoppiate, sarà lo stesso sia che il campo sia parallelo o perpendicolare al raggio. È davvero così?

L'esperienza, in ogni caso, non appare sfavorevole a questa ipotesi, ma a mia conoscenza non credo che esistano misure sufficientemente precise su questo argomento che possano quindi risolvere la questione.

### 437. Polarizzazione delle righe

Supponiamo ora

$$\beta = \alpha$$

e studiamo le condizioni di polarizzazione delle righe.

Bisogna per prima cosa determinare il rapporto  $\frac{Y_K}{X_K}$  per i quattro valori di  $S$ .

Affinché la polarizzazione sia rettilinea, essendo il piano di polarizzazione perpendicolare alla componente del campo normale al raggio,  $Y_K$  deve annullarsi. Facendo,

$$Y_K = 0$$

si trova

$$S^2 + b^2 \alpha^2 + d^2 \gamma^2 = 0$$

in accordo con la (13 bis) se si pone

$$a = c \\ d = b$$

Affinché la polarizzazione sia rettilinea, essendo il piano di polarizzazione parallelo alla componente del campo normale al raggio, è necessario porre  $X_K = 0$ , da cui

$$S^2 + c^2 \alpha^2 + d^2 \gamma^2 = 0$$

in accordo con la (13 bis) se si suppone

$$a = b \\ d = c$$

In entrambi i casi si hanno due righe (*righe medie*) la cui polarizzazione è sempre rettilinea, e che scompaiono per  $\alpha = 0$  e due righe (*righe estreme*) la cui polarizzazione è rettilinea per  $\gamma = 0$ , ellittica in generale e circolare per  $\alpha = 0$ .

Nella prima ipotesi ( $a = c, d = b$ ) la polarizzazione delle righe medie è perpendicolare al campo; quella delle righe parallele estreme.

Nella seconda ipotesi ( $a = b, c = d$ ) deve verificarsi il contrario.

È quindi la prima ipotesi che l'esperimento sembra confermare.

### 438. Isotropia nello spazio

Finora abbiamo considerato solo l'isotropia nel piano dell'onda e questa non soddisfa tutte le condizioni imposte per la simmetria del mezzo. Infatti, essendo il nostro mezzo isotropo, le equazioni precedenti devono rimanere le stesse qualunque sia l'orientazione del piano d'onda; inoltre, non dovrebbero cambiare quando il sistema di assi viene sostituito da un sistema simmetrico rispetto all'origine, poiché il mezzo non solo è isotropo senza simmetria (come ad esempio la trementina) ma è *isotropo e simmetrico*.

Siamo quindi portati a distinguere due tipi di coordinate:

1° *Le coordinate del vettore* che chiamerò  $X_K, Y_K, Z_K$  e che saranno le componenti di un vettore; e,

2° *Le coordinate scalari* che chiamerò  $T_K$  e che saranno completamente indipendenti dalla scelta degli assi.

L'introduzione di queste coordinate scalari non dovrebbe sorprenderci. Giustificiamo infatti con un'immagine meccanica l'uso di queste coordinate. Consideriamo una sfera pulsante di Bjerknæs, suscettibile di un moto di traslazione; per definire la situazione del sistema servono quattro coordinate: il raggio della sfera, che sarà una coordinata scalare, e le coordinate cartesiane del centro della sfera, che saranno coordinate vettoriali.

Ciò premesso, in virtù della simmetria del mezzo:

1° Il sarà una combinazione lineare di varie espressioni di una delle seguenti forme

$$\frac{dX_K}{dt} \frac{dX_i}{dt} + \frac{dY_K}{dt} \frac{dY_i}{dt} + \frac{dZ_K}{dt} \frac{dT_i}{dt}$$

( $i$  può essere uguale a  $K$ )

2°  $P_2$  sarà una combinazione lineare di espressioni di una delle forme seguenti

$$X_K X_i + Y_K Y_i + Z_K Z_i$$

$$T_K T_i$$

3°  $P_1$  che vale

$$P_1 = fX + gY + hZ$$

sarà una combinazione lineare di espressioni della forma

$$fX_K + gY_K + hZ_K$$

4° L'espressione di  $\delta J$

$$\delta J = \sum W_K \delta T_K$$

sarà una combinazione lineare di espressioni della forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X_K & Y_K & Z_K \\ \delta X_i & \delta Y_i & \delta Z_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X_i & Y_i & Z_i \\ \delta X_K & \delta Y_K & \delta Z_K \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} T_i & \alpha X_K + \beta Y_K + \gamma Z_K \\ \delta T_i & \alpha \delta X_K + \beta \delta Y_K + \gamma \delta Z_K \end{vmatrix}$$

Si vede che in  $P_2$  e  $H$  i termini che dipendono da  $X$ , quelli che dipendono da  $Y$ , quelli che dipendono da  $Z$ , quelli che dipendono da  $T$ , sono completamente separati tra loro.

Siano

$$\begin{matrix} P_x & P_y & P_z & P_t \\ H_x & H_y & H_z & H_t \end{matrix}$$

questi otto insiemi di termini dove  $P_x$  rappresenta l'insieme dei termini di  $P_2$  che dipendono da  $x$ , ecc.

Per il teorema delle forme quadratiche possiamo scegliere le  $X_K$  e le  $T_K$ , tali che

$$\begin{aligned} H_x &= \sum \frac{1}{2} \left( \frac{dX_K}{dt} \right)^2 \\ H_t &= \sum \frac{1}{2} \left( \frac{dT_K}{dt} \right)^2 \\ P_x &= \sum \frac{1}{2} p_K^2 X_K^2 \\ P_t &= \sum \frac{1}{2} q_K^2 T_K^2 \end{aligned}$$

e allora si vedrà che  $H_y$  e  $P_y$  sono formati con le  $Y$  e  $H_z$  e  $P_3$  con le  $Z$ , come  $H_x$  e  $P_x$  lo sono con  $X$ .

Si otterrà così una serie di equazioni analoghe alle equazioni

$$(p_K^2 - p^2) T_K = -ipW_K \quad (a)$$

ottenute in precedenza.

Ecco questa serie di equazioni

$$\begin{cases} (p_K^2 - p^2) X_K = \xi_K \\ (p_K^2 - p^2) Y_K = \eta_K \\ (p_K^2 - p^2) Z_K + Z \frac{dZ}{dZ_K} = \zeta_K \\ (q_K^2 - q^2) T_K = \tau_K \end{cases} \quad (b)$$

dove  $\xi_K, \eta_K, \zeta_K, \tau_K$  sono quantità che svolgono rispetto a  $X_K, Y_K, Z_K, T_K$  lo stesso ruolo di  $-ipW$  rispetto a  $T_K$  nelle equazioni (a).

**439.** Tratteremo le equazioni (b) come abbiamo fatto con le (a). I secondi membri delle equazioni (b) che come quelle delle equazioni (a) sono molto piccoli. Annuliamoli in prima approssimazione e poniamo  $p = p_1$ ; otterremo una serie di equazioni lineari tra le quantità  $X_K, Y_K, Z_K, T_K$ . In virtù di queste equazioni alcune di queste quantità si annulleranno a vicenda. Ad esempio,  $X_K$  si annullerà se  $p_K$  non è uguale a  $p_1$  e  $T_K$  si annullerà anche se  $q_K$  non è uguale a  $p_1$ . Inoltre, quelle di queste quantità che non si annulleranno potrebbero non rimanere indipendenti, ma presentarsi tra loro in alcune relazioni lineari.

Per meglio evidenziare il fatto, distinguerò tra le  $Z_K$  due categorie: quelle per le quali  $\frac{dZ}{dZ_K}$  sarà nulla e che chiamerò  $Z'_K$ ; quelle per le quali questa derivata non sarà nulla e che chiamerò  $Z''_K$ . Chiamerò  $X'_K$  e  $Y'_K$  le  $X_K$  e  $Y_K$  che corrispondono alle  $Z'_K$  e  $X''_K$  e  $Y''_K$  quelle che corrispondono agli  $Z''_K$ .

Porrò

$$Z = \sum l_K Z_K$$

e indicherò con  $p'_K$  e  $l'_K$  i valori dei coefficienti  $p_K$  e  $l_K$  che corrispondono a  $Z'_K$ , con  $p''_K$  quelli che corrispondono alle  $Z''_K$ ; da questa definizione e da quella delle  $Z'_K$  segue che tutti gli  $l'_K$  sono nulli.

Le nostre equazioni (b) senza i secondi membri saranno quindi scritte quando si porrà  $p = p_1$

$$\begin{cases} (p_K'^2 - p_1^2) X_K' = 0 \\ (p_K''^2 - p_1^2) X_K'' = 0 \\ (p_K'^2 - p_1^2) Y_K' = 0 \\ (p_K''^2 - p_1^2) Y_K'' = 0 \\ (p_K'^2 - p_1^2) Z_K' = 0 \\ (p_K''^2 - p_1^2) Z_K'' + l_K'' Z = 0 \end{cases} \quad (b')$$

con

$$Z = \sum l_K'' Z_K''$$

Si può sempre supporre che al massimo delle  $p_K''$  sia uguale a  $p_1$ ; il caso in cui ce ne fossero più di una si ridurrebbe immediatamente a quello in cui ce ne fosse una sola.

Se nessun delle  $p_K''$  è uguale a  $p_1$ , tutti le  $X_K''$  sono nulle.

Se uno delle  $p_K''$  che chiamerò ad esempio  $p_i''$  è uguale a  $p_1$ , l'equazione (b') relativa a  $Z_i''$  mostra che  $Z$  è nullo; le equazioni relative alle altre  $Z_K''$  mostrano quindi che tutte queste  $Z''$  sono nulle; l'equazione  $Z = \sum l_K'' Z_K''$  mostra infine che  $Z_i'' = 0$ .

È quindi impossibile che una delle  $X_K''$  e una delle  $Z_K''$  siano diverse da zero allo stesso tempo.

**440.** Si può generalizzare l'ipotesi; non supponiamo più

$$P_1 = fX + gY + hZ$$

abbandoniamo questa ipotesi troppo restrittiva e supponiamo sempre

$$P_1 = \sum l_K'' (fX_K'' + gY_K'' + hZ_K'')$$

ma invece di avere

$$Z = \sum l_K Z_K = \sum l_K'' Z_K''$$

si avrà

$$Z = \sum m_K Z_K$$

essendo i coefficienti  $m_K$  diversi dai coefficienti  $l_K$ .

Possiamo supporre allora

$$\begin{aligned} p_i'' &= p_1 \\ l_i'' &\geq 0 \\ m_i'' &= 0 \end{aligned}$$

e si potrà avere entrambi

$$\begin{aligned} X_i'' &\geq 0 \\ Y_i'' &\geq 0 \end{aligned}$$

In virtù delle equazioni (b') alcune delle nostre coordinate si annulleranno; le altre si esprimeranno linearmente utilizzando un certo numero tra di esse che rimarranno indipendenti e che svolgeranno il ruolo delle coordinate  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$  nelle equazioni (8 bis). Sostituiamo i valori così dedotti dalle equazioni (b), cosa che possiamo fare trascurando i termini del secondo ordine; otterremo equazioni lineari analoghe alle equazioni (8 bis) e, uguagliando a zero il determinante di queste equazioni lineari, otterremo un'equazione analoga all'equazione (13).

## 441. Discussione

Se vogliamo rendere conto del quadrupletto, questa equazione deve essere di quarto grado; per questo è necessario che quattro e solo quattro delle nostre coordinate non si annullino tra loro in virtù delle equazioni (b').

Supponiamo innanzitutto che i coefficienti chiamati sopra  $m_K$  siano uguali ai coefficienti  $l_K$ . Allora, le coordinate che non si annullano potrebbero essere tre coordinate vettoriali  $X'_1, Y'_1, Z'_1$  e una coordinata scalare  $T_K$ .

L'espressione

$$\frac{i}{p} \sum (\xi_K \delta X_K + \eta_K \delta Y_K + \zeta_K \delta Z_K + \tau_K \delta T_K)$$

che svolge lo stesso ruolo dell'espressione

$$\sum W_K \delta T_K$$

rispetto alle equazioni (8) sarà della forma

$$a \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ \delta X'_1 & \delta Y'_1 & \delta Z'_1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} T_K & \alpha X'_1 & \beta Y'_1 & \gamma Z'_1 \\ \delta T_K & \alpha \delta X'_1 & \beta \delta Y'_1 & \gamma \delta Z'_1 \end{vmatrix}$$

La nostra equazione in  $S$  si scrive allora

$$\begin{vmatrix} S & -a\gamma & a\beta & b\alpha \\ a\gamma & S & -a\alpha & b\beta \\ a\beta & a\alpha & S & b\gamma \\ -b\alpha & -b\beta & b\gamma & S \end{vmatrix} = 0$$

che corrisponde alla (13 bis) nell'ipotesi  $a = c, b = d$ .

Il problema sembra quindi risolto in modo soddisfacente.

Tuttavia, non è ancora così. Prendiamo l'equazione da cui dipende

$$(p_1^2 - p^2) X'_1 = \xi'_1$$

È stata tratta da un'equazione differenziale (che scrivo eliminando il secondo membro che dipende dal campo magnetico ed è molto piccolo).

$$\frac{d^2 X'_1}{dt^2} + p_1^2 X'_1 = l'_1 f$$

Ma dalla definizione stessa di  $X'_K$ , il coefficiente  $l'_1$  deve essere nullo. Rimane quindi

$$\frac{d^2 X'_1}{dt^2} + p_1^2 X'_1 = 0$$

Osserviamo che in questa equazione differenziale lo spostamento elettrico non interviene.

La coordinata  $X'_1$  potrà quindi subire oscillazioni, ma *queste oscillazioni non verranno comunicate all'etere*. La soluzione di cui sopra è quindi illusoria.

Siamo quindi ridotti a supporre

$$\begin{aligned} l_K &\geq m_K \\ p''_i &= p_1 \\ l'_i &\geq 0 \\ m''_i &= 0 \end{aligned}$$

Siano allora,  $X''_i, Y''_i, Z''_i, T_k$  le coordinate che non si annullano; l'espressione di  $\delta J$  sarà della forma,

$$a \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X'' & Y''_1 & Z''_1 \\ \delta X'' & \delta Y''_1 & \delta Z''_1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} T_K & \alpha X''_1 & \beta Y''_1 & \gamma Z''_1 \\ \delta T_K & \alpha \delta X''_1 & \beta \delta Y''_1 & \gamma \delta Z''_1 \end{vmatrix}$$

e riavremo l'equazione

$$\begin{vmatrix} S & -a\gamma & a\beta & b\alpha \\ a\gamma & S & -a\alpha & b\beta \\ -a\beta & a\alpha & S & b\gamma \\ -b\alpha & -b\beta & b\gamma & S \end{vmatrix} = 0$$

analoga alla (13 bis) nell'ipotesi  $a = c$  e  $b = d$ .

Inoltre l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 X'_1}{dt^2} + p_1^2 X''_1 = l''_1 f$$

contiene lo spostamento elettrico e siamo al sicuro dall'obiezione che ho sollevato prima.

Si vede quindi che è strettamente possibile spiegare il quadrupletto di Cornu con la teoria di Lorentz generalizzata.

Tralascio i casi più complicati in cui si avrebbero sestupletti o fenomeni ancora più complessi.

Sebbene la natura artificiale di queste ipotesi sia evidente, è quindi opportuno mantenere *per il momento la teoria di Lorentz generalizzata che, sola, finora, consente di collegare tra loro i fatti osservati.*

## **Parte IV.**

### **A proposito della teoria di Larmor**



# A proposito della teoria di Larmor

442. Quest'ultima parte del nostro corso non può essere considerata né un'esposizione né una critica del lavoro che Larmor ha recentemente presentato alla Royal Society di Londra con il seguente titolo: *Una teoria dinamica del mezzo elettrico e luminifero*<sup>55</sup>. Contrerà semplicemente un riassunto delle riflessioni che la lettura di questa importante comunicazione mi ha suggerito e che spesso mi allontaneranno dalla teoria di Larmor. Questo è ciò che giustifica il titolo che ho scelto per questo capitolo.

## Teorie ottiche

443. E per prima cosa sono portato, come lo stesso Larmor, a iniziare con un riassunto delle varie teorie proposte dagli scienziati che si sono occupati di ottica: gli esperimenti di ottica fisica hanno evidenziato l'importanza di due vettori che qui introdurrò senza fare alcuna ipotesi sul loro significato teorico. Nei mezzi isotropi, ai quali mi limiterò sempre per non complicare questa esposizione, il primo di questi vettori è perpendicolare al piano di polarizzazione; designerò le sue componenti con  $(P, Q, R)$  e lo chiamerò *vettore di Fresnel*. Il secondo vettore è perpendicolare al raggio luminoso e parallelo al piano di polarizzazione. Lo chiamerò *vettore di Neumann* e lo indicherò con  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Esistono relazioni molto semplici tra questi due vettori, in un mezzo isotropo e trasparente. Se indichiamo con  $1/K_0$  l'inverso del quadrato della velocità della luce nel vuoto e con  $K$  il quadrato dell'indice di rifrazione, si avrà,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_0} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \\ \frac{1}{K_0} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \\ \frac{1}{K_0} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \\ \frac{1}{K_0} K \frac{dP}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \\ \frac{1}{K_0} K \frac{dQ}{dt} = \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} \\ \frac{1}{K_0} K \frac{dR}{dt} = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} \end{array} \right. \quad (1)$$

cioè la derivata rispetto al tempo di ciascun vettore è proporzionale al "rotore" dell'altro vettore, per usare l'espressione inglese.

È facile vedere che le equazioni (1) riassumono, per così dire, i principali risultati sperimentali relativi all'ottica e ciò indipendentemente da qualsiasi teoria.

È nell'interpretazione teorica che iniziano le divergenze. Per Fresnel la velocità di una molecola di etere è rappresentata in modulo, direzione e verso dal vettore  $(P, Q, R)$ ; per Maccullagh e Neumann, è rappresentata dal vettore  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . In altre parole, per Fresnel la vibrazione è perpendicolare al piano di polarizzazione, per Neumann è parallela a questo piano.

In tutte le teorie meccaniche della luce, le vibrazioni dell'etere sono attribuite alla sua elasticità; ma su questa elasticità si possono fare diverse ipotesi; Il modo più semplice è supporre che sia analogo a quelle dei solidi che tendono a riprendere la loro forma primitiva quando una forza esterna li ha allontanati. Per forzare le molecole di etere ad uscire dalla loro situazione di equilibrio è quindi necessario compiere una certa quantità di lavoro che viene immagazzinata

<sup>55</sup>LARMOR, *Proceedings of Royal Society*, t. LIV, p. 438: " dicembre 1803, *La Lumière électrique*, t. LII, p. 351.

nel fluido e che esso ripristina quando, rientrato in se stesso, torna in equilibrio. Ecco come una molla diventa un contenitore di energia. Il lavoro così immagazzinato è ciò che viene chiamato energia elastica dell'etere.

Nell'ipotesi di Fresnel, la forza viva dell'etere vale

$$\frac{1}{8\pi} \int K (P^2 + Q^2 + R^2) \quad (2)$$

e la sua energia potenziale

$$\frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad (3)$$

Le integrazioni sono estese a tutti gli elementi di volume  $d\tau$  dello spazio. Ciò equivale a dire che la densità dell'etere è proporzionale a  $K$ ; la massa dell'elemento  $d\tau$  è quindi proporzionale a  $Kd\tau$ ; poiché la velocità, nell'ipotesi di Fresnel, è rappresentata dal vettore  $(P, Q, R)$ , la forza viva dell'elemento  $d\tau$  è proporzionale a

$$Kd\tau (P^2 + Q^2 + R^2)$$

D'altro canto, tutto accadrà come se l'energia potenziale presente in un elemento  $d\tau$  molto piccolo, fosse proporzionale al volume di questo elemento moltiplicato per il quadrato del vettore di Neumann.

Nell'ipotesi di Neumann, al contrario, è l'espressione (2) a rappresentare l'energia potenziale e l'espressione (3) la forza viva.

Il quadrato della velocità è, in questa ipotesi  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ; l'espressione della forza viva mostra che la densità dell'etere è considerata costante.

Per quanto riguarda l'energia potenziale localizzata in un elemento molto piccolo dello spazio, essa è proporzionale al quadrato del vettore di Fresnel moltiplicato per il fattore  $K$  che rappresenta quindi l'elasticità dell'etere.

Nell'ipotesi di Neumann, l'elasticità è quindi variabile e la densità costante; nella teoria di Fresnel avviene l'opposto.

Questa variabilità dell'elasticità dà origine a una difficoltà specifica della teoria di Neumann e Mac-Cullagh. La pressione dell'etere nello stato di equilibrio non può essere nulla, cosa che l'altra ipotesi avrebbe permesso di supporre. Non può nemmeno essere costante, deve dipendere da  $K$  e quindi non è la stessa in due mezzi diversi. Affinché l'equilibrio venga mantenuto nonostante questa differenza di pressione, bisogna ammettere che sulla superficie di separazione dei due mezzi l'etere è sottoposto ad una forza particolare che richiamerebbe in una certa misura la capillarità dei liquidi. Questa è chiamata "*forza di Kirchhoff*".

Si può evitare questa ipotesi aggiuntiva, che non è molto problematica, adottando le idee di Lord Kelvin sull'elasticità.

L'asse di una trottola tende a rimanere in posizione verticale; se lo allontaniamo, descriverà un piccolo cono attorno alla verticale, come fa il filo di un pendolo conico sotto l'azione della gravità che tende a riportarlo nella sua posizione di equilibrio. Per un osservatore ignaro del suo moto rotatorio, la parte superiore sembrerebbe obbedire a una sorta di forza elastica. Si possono immaginare dispositivi più complessi che riproducono ancora più esattamente le proprietà dei corpi elastici, ed è ciò che fece Lord Kelvin. Supponiamo sistemi articolati in cui alcune parti, che fungono da giostati, sono azionate da una rapida rotazione. In questi sistemi non è in gioco alcuna forza; e tuttavia si comporteranno come se fossero dotati di elasticità. A quanto pare, vi si può immagazzinare energia potenziale; ma in realtà possiedono solo energia cinetica. Ci si può quindi chiedere se l'etere non sia costituito in questo modo; se un osservatore, dotato di mezzi sufficientemente potenti da penetrare tutte le delicatezze della sua intima struttura, non scoprisse che tutta la sua energia è dovuta alla forza viva dei vortici infinitesimali che vi sono

racchiusi. La sua elasticità, che la teoria ordinaria spiega con le attrazioni a distanza esercitate tra le molecole, sarebbe allora dovuta a semplici forze apparenti di inerzia, analoghe in una certa misura alla forza centrifuga.

Esiste tuttavia una differenza tra l'elasticità ordinaria, quella dei solidi, e l'*elasticità rotazionale* di Lord Kelvin. Quando deformiamo un solido, entra in gioco la sua elasticità; ma non è più così quando lo ruotiamo cambiandone l'orientazione nello spazio, ma senza modificarne la forma. Questo non è il caso dei sistemi articolati di Lord Kelvin. Il loro orientamento non può essere modificato senza dover superare una qualche resistenza elastica.

Si può quindi, con questo nuovo modo di vedere, supporre che le varie parti dell'etere tendano a conservare la loro orientazione, che non si possa allontanarle da essa senza spendere lavoro e che vi ritornino quando la forza esterna cessa di agire.

L'ipotesi di Lord Kelvin può essere innestata sia sulla teoria di Fresnel che su quella di Neumann. In entrambi i casi l'energia totale è rappresentata dalla somma delle espressioni (2) e (3) ed è interamente cinetica.

Soltanto, nell'ipotesi di Fresnel, l'espressione (2) rappresenta la forza viva delle vibrazioni dell'etere che sono relativamente movimenti d'insieme; l'espressione (3) rappresenta la forza viva di moti vorticosi molto più intimi (o meglio la parte variabile di questa forza viva). Nell'ipotesi di Neumann è il contrario; non dobbiamo più supporre l'esistenza della forza di Kirchhoff.

In entrambi i casi possiamo chiamare energia potenziale apparente la parte dell'energia totale dovuta ai moti vorticosi intimi.

È sorprendente che partendo da due punti di iniziali così diversi si arrivi alla stessa espressione di energia. Nella teoria ordinaria, la rotazione senza deformazione non dà origine a resistenza elastica, mentre nella teoria di Lord Kelvin sì. Come mai l'energia totale ha lo stesso valore in entrambi i casi? Si tratta di qualcosa che a prima vista risulta un po' difficile da spiegare.

Lo si comprende osservando che l'etere è un mezzo indefinito; una perturbazione può raggiungere solo una parte finita di questo mezzo, mentre le parti più distanti rimangono a riposo. È facile vedere che in un tale mezzo una parte non può ruotare senza deformarsi, senza che altre parti subiscano una deformazione. Se, ad esempio, si supponesse un cilindro che ruotasse attorno al proprio asse mentre il resto dell'etere rimanesse a riposo, ci sarebbe una discontinuità che non potremmo ammettere; bisogna supporre tra il cilindro che gira con velocità angolare uniforme e l'etere esterno in quiete uno strato di passaggio, che può essere del resto sottile quanto si vuole, e dove la velocità diminuirà in modo continuo man mano che ci si dirige verso l'esterno. Questo strato di passaggio sarebbe in ogni caso la sede delle deformazioni.

## Teorie elettriche

444. Le equazioni che riassumono le leggi osservate dei fenomeni elettrici presentano una notevole analogia con quelle dell'ottica. Maxwell fu il primo a notare questa analogia, che sarebbe stato il suo eterno titolo di gloria.

In un mezzo non magnetico e dielettrico, queste quantità saranno legate da equazioni identiche alle equazioni (1), avendo il coefficiente  $\frac{1}{K_0}$  lo stesso valore numerico nelle equazioni elettro-ottiche.

In un mezzo magnetico e conduttore, le equazioni sono un po' più complicate e devono essere introdotti altri due parametri; vale a dire il coefficiente di permeabilità  $\mu$  e il coefficiente di

conduttività  $\lambda$ . Le equazioni (1) assumono quindi la seguente forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_0} \mu \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \\ \frac{1}{K_0} \mu \frac{d\beta}{dt} = \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \\ \frac{1}{K_0} \mu \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \\ \frac{1}{K_0} K \frac{dP}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} - \frac{4\pi}{K_0} \lambda P \\ \frac{1}{K_0} K \frac{dQ}{dt} = \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} - \frac{4\pi}{K_0} \lambda Q \\ \frac{1}{K_0} K \frac{dR}{dt} = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} - \frac{4\pi}{K_0} \lambda R \end{array} \right. \quad (4)$$

Le equazioni (4) contengono le equazioni (1) come caso particolare e si ottengono questi ultimi facendo

$$\mu = 1 \quad \lambda = 0$$

Nel seguito, ci sarà consentito supporre  $\mu = 1$ . Possiamo infatti adottare l'ipotesi di Ampère. Quindi i mezzi che a noi sembrano magnetici dovrebbero apparire, a un osservatore dotato di sensi sufficientemente sviluppati, privi di magnetismo, ma attraversati da un numero molto elevato di correnti particellari.

L'identità di luce ed elettricità sembra fuori dubbio da queste considerazioni, confermate dagli esperimenti, e per prima cosa abbiamo cercato una nuova spiegazione dei fenomeni ottici, destinata a farci dimenticare le vecchie spiegazioni meccaniche.

Poi si è cercata una spiegazione meccanica comune della luce e dell'elettricità, e l'idea più naturale è stata quella di tornare alle teorie elastiche di cui ho parlato sopra e che per tanto tempo ci erano sembrate del tutto soddisfacenti. Poiché tenevano conto della luce, si trattava di adattare alla spiegazione dell'elettricità.

L'adattamento sarebbe stato immediato se le equazioni dell'elettricità non fossero state, come abbiamo appena visto, più generali di quelle dell'ottica. Sfortunatamente le equazioni (1) sono solo casi particolari delle equazioni (4).

Questa circostanza non deve però scoraggiarci; prendiamo una qualsiasi delle teorie ottiche, quella di Fresnel è una di queste; in essa la velocità dell'etere è rappresentata dal vettore  $(P, Q, R)$ ; Supponiamo quindi che la velocità dell'etere sia rappresentata dalla forza elettrica. Riprendiamo le equazioni (4) e interpretiamole di conseguenza; esse esprimeranno alcune proprietà dell'etere; saranno queste le proprietà che dovranno essere attribuite a questo fluido, se vogliamo preservare la teoria di Fresnel.

Invece di applicare il processo di adattamento alla teoria di Fresnel, possiamo applicarlo a quella di Neumann e Mac-Cullagh, ed è ciò che ha fatto Larmor. In entrambi i casi siamo portati ad attribuire all'etere proprietà del tutto strane, che a prima vista potrebbero sorprenderci. In ogni caso, è opportuno insistere su queste stranezze, sia che si voglia familiarizzare con esse le menti, sia che le si consideri come ostacoli insormontabili che non consentono di adottare queste spiegazioni.

## Adattamento della teoria di Fresnel

La teoria elettromagnetica della luce, ormai confermata dall'esperienza, ci insegna che ciò che in ottica viene chiamato vettore di Fresnel non è altro che la forza elettrica, e che il vettore di Neumann è identico alla forza magnetica. Se vogliamo quindi mantenere la teoria di Fresnel, dobbiamo ammettere che la velocità dell'etere è rappresentata in modulo, direzione e verso dalla forza elettrica.

Ma questa ipotesi porta a conseguenze singolari. Consideriamo una piccola sfera elettrizzata; la forza elettrica è ovunque diretta lungo il raggio vettore che va al centro della sfera; tale dovrebbe quindi essere anche la direzione della velocità dell'etere.

Ciò significherebbe che una sfera elettrizzata positivamente, ad esempio, assorbirebbe costantemente etere, mentre una sfera elettrizzata negativamente lo emetterebbe costantemente.

E questo assorbimento o emissione dovrebbe durare finché la sfera mantiene la sua carica.

In altre parole, le parti dello spazio in cui diciamo che c'è elettricità positiva o negativa sarebbero quelle in cui la densità dell'etere aumenta costantemente o diminuisce costantemente.

Sembra molto difficile ammetterlo; come è possibile che la densità dell'etere possa variare per così tanto tempo sempre nello stesso verso, senza che le proprietà di questo etere appaiano modificate? Dobbiamo quindi supporre che la densità sia molto elevata e la sua velocità in un campo elettrico molto piccola, cosicché, nonostante la durata dell'elettrizzazione, le variazioni relative della densità siano evidenti?

Continuiamo comunque il nostro esame. Vediamo se questa indefinita comprimibilità dell'etere non sia, se non più intelligibile, almeno più conforme alle ipotesi usuali di quanto non sembri a prima vista.

Un gas non trasmette le vibrazioni trasversali; questo perché uno scorrimento interno tra gli strati di gas non provoca resistenza elastica; anche se il gas fosse privo di viscosità, il moto di scorrimento, una volta iniziato, continuerebbe indefinitamente.

Allo stesso modo, l'etere non trasmette vibrazioni longitudinali, il che può essere spiegato in due modi: si può supporre che sia assolutamente incomprimibile; si può immaginare, ed è questa l'ipotesi che Fresnel è costretto a fare per spiegare la riflessione, che esso sia al contrario incapace di resistere alla compressione.

La compressione nell'etere, come lo scorrimento nei gas, non deve quindi causare resistenza elastica; e poi quando una particella di etere ha iniziato a contrarsi o espandersi, questa contrazione o espansione continuerà indefinitamente.

Le ipotesi precedentemente accettate portavano quindi già a questa conseguenza che consideriamo inverosimile; eppure le abbiamo accettate perché si credeva che fossero solo approssimate; per adattare la teoria di Fresnel ai fenomeni elettrici, al contrario, è necessario supporre che esse siano molto vicine ad essere rigorosamente realizzate, ed è da qui che nasce la difficoltà.

Non proverò a sollevarlo; ma non posso passare sotto silenzio l'analogia tra le considerazioni precedenti e le sfere pulsanti di Bjerknæs. Mentre una di queste sfere si contrae, il moto nel liquido circostante è esattamente lo stesso che la teoria precedente attribuisce all'etere nelle vicinanze di una carica elettrica positiva. Quando questa sfera si espande, al contrario, è simile ad una massa elettrica negativa.

È noto che la rappresentazione dei fenomeni elettrostatici mediante le sfere di Bjerknæs è solo imperfetta, per due motivi. Il primo, che è stato particolarmente sottolineato, è che il segno dei fenomeni è cambiato.

Il secondo non è meno importante. Bjerknæs fa agire l'una sull'altra due sfere le cui pulsazioni hanno lo stesso periodo, inoltre le pulsazioni hanno sempre la stessa fase, oppure fase opposta, in modo tale che la differenza di fase sia sempre uguale a 0 o a  $\pi$ .

Limitandolo in questo modo, si rappresentano i fenomeni elettrici a meno di un segno; si sarebbe giunti senza ciò a leggi molto più complesse; supponiamo, per esempio, tre sfere pulsanti A, B e C aventi lo stesso periodo, ma aventi rispettivamente per fase 0,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ ; A non agirebbe su B, né B su C; ma A agirebbe su C. Non si ha più la riproduzione delle leggi dell'elettrostatica.

Ora, se ammettiamo che l'elettricità è dovuta a oscillazioni simili, si potrà supporre a rigore che queste oscillazioni abbiano sempre lo stesso periodo; ma non c'è alcun motivo perché la differenza di fase sia sempre 0 o  $\pi$ .

Bjerknæs fu costretto a dare alle sue sfere un moto alternato, ma l'etere indefinitamente comprimibile della teoria adattata di Fresnel ci fornisce l'immagine di sfere pulsanti la cui contrazione o espansione durerebbe indefinitamente e, per così dire, di sfere pulsanti di periodo infinito.

Le attrazioni elettrostatiche sarebbero quindi immediatamente spiegate, se non rimanesse la difficoltà del cambiamento di segno. Non è un problema insormontabile e ci torneremo sopra.

Ora ecco il significato delle equazioni (4); adottando l'ipotesi di Ampère suppongo  $\mu = 1$ . Da dove deriva il termine in  $\lambda$  che si introduce nei mezzi conduttori? L'interpretazione è semplice; nei conduttori che sono sede di una corrente voltaica, c'è effettivamente una corrente continua di etere; c'è anche attraverso i dielettrici in un campo elettrico come ho detto sopra; ma mentre l'etere potrebbe muoversi attraverso i dielettrici senza subire alcun attrito, strofinerebbe contro il materiale dei conduttori e sarebbe la forza viva distrutta da questo attrito a trasformarsi in calore e a riscaldare il circuito voltaico.

Tra i movimenti di cui l'etere può essere sede, ve ne sono alcuni che non provocano alcuna resistenza elastica; sono moti di questo tipo che si verificano in prossimità di un circuito percorso da una corrente voltaica permanente. Ma non si può passare direttamente dalla quiete ad un movimento analogo o viceversa; esiste necessariamente una fase di transizione in cui avvengono altri movimenti, che sono trasversali e devono mettere in gioco l'elasticità dell'etere. Sarebbe questa reazione elastica a produrre i fenomeni di induzione.

Torneremo su tutti questi punti in dettaglio più avanti.

## Teoria di Larmor

**446.** La teoria di Larmor non è altro che l'adattamento della teoria di Neumann. La velocità dell'etere è quindi rappresentata in modulo, direzione e verso dal vettore di Neumann, cioè dalla forza magnetica. Siccome supponiamo  $\mu = 1$  si ha ovunque,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$$

e l'etere appare come incompressibile.

Se si considera un filo rettilineo percorso da una corrente voltaica, nelle vicinanze di questo filo ruota l'etere; ogni molecola descrive una circonferenza che ha come asse quello del filo; la velocità angolare di rotazione è inversamente proporzionale al quadrato del raggio di questa circonferenza. I fenomeni di induzione elettromagnetica sono dovuti semplicemente all'inerzia dell'etere.

L'etere è dotato di elasticità rotazionale come compreso da Lord Kelvin; non si può quindi spostare una particella di etere dalla sua orientazione iniziale senza compiere lavoro. Ma questa resistenza non è sempre della stessa natura.

Nei dielettrici vi è una resistenza elastica e una particella di etere, rimossa dalla sua orientazione iniziale, vi ritorna non appena viene lasciata a se stessa; nei conduttori vi è una resistenza analoga alla viscosità dei liquidi: questa particella non tende a ritornare spontaneamente alla sua condizione iniziale e tutto il lavoro impiegato per rimuoverla si è trasformato in calore.

Purtroppo le cose non sono così semplici e c'è una difficoltà che merita attenzione. La coppia, che in questa teoria tende a riportare una particella di etere alla sua orientazione, è rappresentata in modulo, direzione e verso dal vettore di Fresnel, cioè dalla forza elettrica  $(P, Q, R)$ .

Se l'elasticità rotazionale di Lord Kelvin rimanesse inalterata, almeno nei dielettrici, si dovrebbe avere a meno di un fattore costante,

$$\begin{cases} \frac{1}{K_0} KP = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \\ \frac{1}{K_0} KQ = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \\ \frac{1}{K_0} KR = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} \end{cases}$$

$\xi, \eta, \zeta$  indicano le componenti dello spostamento di una molecola di etere a partire dalla sua posizione iniziale.

Ne consegue che il flusso di forza elettrica attraversa una qualsiasi superficie chiusa nel dielettrico dovrà essere nullo; in altre parole, la carica totale su un conduttore isolato dovrà essere nulla.

È quindi necessario introdurre una profonda modifica nella teoria e questa necessità non è sfuggita a Larmor che spiega questo punto in poche righe (*Proceedings*, 7 dicembre 1893, p. 447, righe 7-24).

Per vedere qual è la modifica appropriata c'è solo una cosa da fare; riprendiamo le equazioni (4), interpretiamole nel linguaggio della teoria di Larmor e vediamo cosa significano.

Poniamo,

$$\frac{1}{K_0} K P' = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}$$

la seconda equazione (4) diverrà

$$\frac{1}{K_0} K \frac{d(P - P')}{dt} = -\frac{4\pi}{K_0} \lambda P \quad (5)$$

Se  $\lambda$  fosse costantemente nullo, avremmo  $P = P'$ , cioè la coppia sviluppata dall'elasticità dell'etere tenderebbe a riportare ogni particella di etere alla sua orientazione primitiva.

Supponiamo ora che  $\lambda$  sia variabile; inizialmente nullo, questo coefficiente assumerebbe un valore positivo per un certo tempo, per poi ritornare nullo. Questo è più o meno ciò che accade nel caso di una scarica distruttiva; l'aria, inizialmente isolante, cessa di esserlo per qualche istante al momento della scarica e poi perde nuovamente le sue proprietà conduttrici.

Qual è allora il significato dell'equazione (5)? Si avrà

$$P - P' = -\frac{4\pi}{K} \int \lambda P dt$$

dovendo l'integrale essere esteso a tutta la durata della scarica, ed essendo pertanto proporzionale alla quantità di elettricità che è passata durante questa scarica; posso quindi scrivere

$$P - P' = ks$$

dove  $k$  è un coefficiente e  $s$  questa quantità di elettricità.

Dopo la scarica, la coppia elastica non tende più a riportare la particella di etere alla sua orientazione primitiva, cioè ad una orientazione tale che  $P = 0$ , ma tale che  $P = ks$ .

Durante la scarica il dielettrico perde la propria elasticità rotazionale; dopo la scarica la recupera, *ma profondamente modificata dal passaggio della corrente elettrica*.

L'elasticità dei solidi ci offre fenomeni molto simili. Una barra d'acciaio sottoposta a tensione si allunga, ma ritorna alla sua lunghezza originale non appena la tensione cessa. Se viene riscaldata fino a raggiungere al rosso, perde la propria elasticità e diventa duttile; sotto trazione, dopo essersi allungata, conserverà la lunghezza acquisita anche quando questa trazione sarà cessata. Se poi viene raffreddata, riacquisterà l'elasticità, seppur modificata, perché non tenderà a riportare la barra alla lunghezza di prima di tutte queste operazioni, ma alla lunghezza che aveva nel momento in cui ha recuperato l'elasticità.

Cosa succede quindi nell'etere che circonda un corpo elettrizzato?

Ogni particella è sottoposta ad una coppia elastica che tende a riportarla ad una orientazione data, diversa (almeno per quelle che sono state attraversate dalla elettricità durante la carica) da quella che aveva prima dell'elettrizzazione. Poiché le particelle sono attaccate le une alle altre, le orientazioni che tendono ad assumere sono generalmente incompatibili. Si verifica quindi un equilibrio in cui ciascuna di queste particelle è paragonabile a una piccola molla allungata. Il lavoro delle forze elettrostatiche non è altro che l'energia immagazzinata in queste piccole molle.

Questa spiegazione non mi soddisfa ancora del tutto, poiché non abbiamo considerato la scarica distruttiva, perché abbiamo tralasciato il caso in cui, per modificare le cariche di due conduttori, questi vengono messi in comunicazione con l'ausilio di un filo metallico, e poi isolati nuovamente allontanando il filo.

Ma qui abbiamo a che fare con corpi in movimento e la difficoltà è maggiore. Invece delle equazioni (4) che sono quelle di Hertz (*Grundgleichungen der Electrodynamik für ruhende Körper*, *Wiedemann Annalen*, 40, p. 577, e *La Lumière électrique*, t. XXXVII, p. 137, 188, 239) dobbiamo considerare le equazioni molto più complicate della seconda memoria di Hertz sui corpi in movimento (*Grundgleichungen der Electrodynamik für ruhende Körper*, *Wiedemann Annalen*, e *Lumière électrique*, t. XXXVIII, p. 488 e 542). Studierò queste equazioni un po' più a fondo e cercherò di capire quale sia il loro significato quando vengono interpretate nel linguaggio della teoria di Fresnel adattata o nel linguaggio della teoria di Larmor.

Avrò così contemporaneamente la spiegazione, in entrambe le teorie, dei fenomeni meccanici di cui è sede un campo elettromagnetico, cioè delle attrazioni elettrostatiche e delle azioni reciproche delle correnti.

Per completare lo schema delle questioni che intendo affrontare in seguito, vorrei richiamare l'attenzione su altre due difficoltà che dovremo esaminare in dettaglio. Generalmente nella ricerca sull'elettricità si suppone che le deformazioni dei corpi elastici siano molto piccole; qui un'ipotesi simile non è più ammessa; in un campo magnetico costante anche la velocità dell'etere è costante secondo l'ipotesi di Larmor e sempre nello stesso verso. Dopo un certo tempo, le molecole dell'etere devono aver subito spostamenti percettibili, anche supponendo questa piccolissima velocità costante; poiché nei corpi magnetici si deve supporre l'esistenza di correnti particellari permanenti che devono durare dall'origine del mondo, sebbene esse si manifestino solo quando il corpo viene "magnetizzato", cioè quando tutte queste piccole correnti vengono riportate da una causa esterna a una orientazione comune. Per quanto piccola sia la velocità dell'etere, un movimento che si è sempre verificato nello stesso verso fin dall'origine del mondo ha necessariamente prodotto spostamenti considerevoli.

In secondo luogo, in un campo magnetico, si suppone che l'etere sia in movimento e che trascini con sé le onde luminose.

Larmor dice a questo proposito alla fine del suo lavoro:

"Il professor O. Lodge è stato così gentile da esaminare l'effetto di un campo magnetico sulla velocità della luce; ma non è stato in grado di rilevarne alcuno, sebbene i mezzi da lui impiegati fossero estremamente delicati; ciò porterebbe, secondo la nostra teoria, a far sì che il movimento in un campo magnetico sia molto lento e, di conseguenza, che la densità del mezzo sia molto grande."

Questo movimento era quindi così lento che gli esperimenti di O. Lodge, pur essendo molto precisi, non lo erano ancora abbastanza da evidenziarlo. Per dirla senza mezzi termini, credo che anche se questi esperimenti fossero stati cento o mille volte più precisi, il risultato sarebbe stato comunque negativo.

Devo solo esporre le ragioni a sostegno di questa opinione; se il risultato fosse stato positivo, si sarebbe potuta misurare la densità dell'etere e, se il lettore mi perdonerà la volgarità di questa espressione, mi disgiusta pensare che l'etere sia arrivato fin qui.

## **Elettrodinamica dei corpi in movimento**

**447.** Come ho detto prima, non posso far altro che proseguire l'esame della teoria di Larmor esaminando cosa passa in un campo elettromagnetico dove vi sono corpi in movimento.

La soluzione più semplice sembra essere quella di prendere come punto di partenza le equazioni di Hertz (*Grundgleichungen der Electrodynamik für bewegte Körper*, *Wiedemann Annalen*, 41) e poi tradurle nel linguaggio della teoria di Fresnel adattata o in quello della teoria di Larmor.

Ma sorge spontanea una prima domanda. Queste equazioni, che si basano solo su poche audaci induzioni, possono essere accettate così come sono; ciò è molto dubbio.

Abbiamo visto infatti in precedenza (n° 319) che le onde luminose devono essere trascinate *interamente* da un mezzo dielettrico in movimento.

Ciò è assolutamente contrario alla celebre esperienza di Fizeau che ci insegna che il trascinamento è solo parziale; si dovrebbe avere

$$V = \pm \sqrt{\frac{K_0^2}{K}} + \zeta \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

essendo  $\xi, \eta, \zeta$  le componenti della velocità della materia.

Le equazioni di Hertz devono quindi essere modificate. Ma quale modifica bisognerebbe apportare? Potrebbe essere un po' difficile rispondere a questa domanda.

## Teorie di Hertz

448. Immaginiamo due mezzi che si compenetrano, l'etere e la materia; sia  $\rho$  la densità dell'etere,  $\rho_1$  quella della materia; siano  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  le componenti dello spostamento dell'etere;  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  quelle dello spostamento della materia.

Una particella di etere è soggetta a due forze: una dovuta all'azione dell'etere circostante e che è la stessa come se la materia non esistesse; sia  $L, M, N$  questa forza; l'altra dovuta all'azione della materia sull'etere e le cui componenti saranno

$$B(\xi_2 - \xi_1) \quad B(\eta_2 - \eta_1) \quad B(\zeta_2 - \zeta_1)$$

Una particella di materia è pure sottoposta a due forze; una è la reazione dell'etere sulla materia e ha come componenti

$$B(\xi_1 - \xi_2) \quad B(\eta_1 - \eta_2) \quad B(\zeta_1 - \zeta_2)$$

L'altra è una sorta di attrito del quale Helmholtz non spiega molto bene l'origine e che ha per componenti

$$-C \frac{d\xi_2}{dt} \quad -C \frac{d\eta_2}{dt} \quad -C \frac{d\zeta_2}{dt}$$

$B$  e  $c$  sono costanti che dipendono dalla natura del corpo. Le equazioni del moto diventano allora,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= L + B(\xi_2 - \xi_1) \\ \rho \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} &= (\xi_1 - \xi_2) - C \frac{d\xi_2}{dt} \end{aligned}$$

È con l'aiuto di queste equazioni che Helmholtz rende conto della dispersione. Ma questo non è il nostro obiettivo; al contrario, vogliamo attenerci al primo grado di approssimazione dove si trascura la dispersione, e per questo bisogna supporre che  $B$  sia molto grande, si ha  $\xi_1 = \xi_2$ .

Sommando le due equazioni precedenti e prendendo  $\xi_1 = \xi_2$ , si ha

$$(\rho + \rho_1) \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = L - C \frac{d\xi_1}{dt} \quad (5)$$

Resta da vedere cosa succede se si suppone l'etere immobile (tranne che per il suo movimento vibrazionale, ovviamente) e che la materia in movimento.

Indicheremo con  $\xi, \eta, \zeta$  le componenti della velocità della materia.

Rappresentiamo con  $\frac{\partial \xi_1}{\partial t}$  e con  $\frac{\partial \xi_2}{\partial t}$  la proiezione sull'asse  $x$  della velocità e dell'accelerazione di una molecola materiale, di modo che

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{d\xi_1}{dt} + \xi \frac{d\xi_1}{dx} + \eta \frac{d\xi_1}{dy} + \zeta \frac{d\xi_1}{dz}$$

e trascurando i quadrati e le derivate di  $\xi, \eta, \zeta$

$$\frac{\partial \xi_1^2}{\partial t^2} = \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + 2\xi \frac{d^2 \xi_1}{dx dt} + 2\eta \frac{d^2 \xi_1}{dy dt} + 2\zeta \frac{d^2 \xi_1}{dz dt}$$

L'equazione (5) diviene allora,

$$\rho \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = L - C \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \quad (5 \text{ bis})$$

È facile vedere innanzitutto che la (5 bis) rende conto dell'esperienza di Fizeau. Immaginiamo che il mezzo sia un dielettrico perfetto (quindi  $C = 0$ ) e che le onde luminose siano piane, con il piano dell'onda parallelo al piano  $xy$ ; allora  $\xi_1$  è una funzione di  $z$  e di  $t$  soltanto e si ha:

$$L = \lambda \frac{d^2 \xi_1}{dt^2}$$

dove  $\lambda$  è un coefficiente costante.

Supponiamo inoltre che la velocità della materia sia costante e parallela all'asse  $z$ , di modo che

$$\frac{\partial \xi_1^2}{\partial t^2} = \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + 2\xi \frac{d^2 \xi_1}{dz dt} + \zeta^2 \frac{d^2 \xi_1}{dz^2}$$

Si ha inoltre

$$\lambda = \rho K_0^2$$

Essendo  $K_0^2$  la velocità della luce nel vuoto, e l'equazione (5 bis) diviene:

$$\rho \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \rho_1 \left( \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + 2\zeta \frac{d^2 \xi_1}{dz dt} + \zeta^2 \frac{d^2 \xi_1}{dz^2} \right) = \rho K_0^2$$

da cui, se si indica per un istante  $U$  la velocità di propagazione dell'onda:

$$(\rho + \rho_1) U^2 + 2\zeta \rho_1 U + \zeta^2 \rho_1 = \rho K_0^2$$

da cui trascurando il quadrato di  $\zeta$

$$U = K_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho + \rho_1}} - \frac{\rho_1 \zeta}{\rho + \rho_1}$$

È chiaro che,

$$\frac{\rho + \rho_1}{\rho} = K$$

si ha quindi infine

$$U = K \sqrt{\frac{1}{K}} - \zeta \left( 1 - \frac{1}{K} \right)$$

Si vede quindi che questa teoria spiega bene il trascinarsi parziale delle onde osservate da Fizeau.

Ma cesserà di apparire soddisfacente se la si vuole applicare ai fenomeni elettrici.

Riprendiamo le equazioni (5 bis) assumendo  $C = 0$ , si ottiene,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} &= L \\ \rho \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} &= M \\ \rho \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} &= N \end{aligned}$$

Poiché si ha

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0$$

se si pone

$$\theta = \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy} + \frac{d\zeta_1}{dz}$$

verrà

$$\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + \rho_1 \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Le  $d$  ordinarie rappresentano sempre le derivate prese rispetto a  $t$  assumendo il punto  $x, y, z$  fisso e le  $\partial$ , supponendo il punto  $x, y, z$  trasportato dalla materia.

Per comprendere il significato di questa equazione, facciamo riferimento a quanto detto sopra a proposito della teoria di Fresnel adattata. Abbiamo visto che, in questa teoria, nei punti in cui è presente elettricità positiva, la densità dell'etere aumenta costantemente.

Ora, secondo una formula ben nota,  $\theta$  rappresenta la condensazione dell'etere, cioè l'eccesso della sua densità attuale rispetto alla sua normale densità. In questo modo, la densità dell'elettricità libera sarebbe proporzionale a  $\frac{d\theta}{dt}$ .

Potrebbero sorgere dubbi nel caso in cui i corpi elettricamente carichi sian in movimento. Ci si può quindi chieder se la densità dell'elettricità debba essere rappresentata da  $\frac{d\theta}{dt}$  o da  $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ ; ma il risultato che ho in mente non cambierà.

Supponiamo che  $\xi = \eta = 0$ ,  $\zeta$  costante; l'equazione (6) diviene

$$(\rho + \rho_1) \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\rho_1\zeta \frac{d^2\theta}{dt dz} + \zeta^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0 \quad (6 \text{ bis})$$

D'altra parte  $\frac{\partial\theta}{\partial t}$  e  $\frac{d\theta}{dt}$  soddisferanno come  $\theta$  l'equazione (6 bis).

Questa equazione è contraddetta dall'esperienza, l'elettricità dovrebbe essere trasportata con la stessa velocità della materia poiché rimane attaccata ai corpi che ne sono carichi e si dovrebbe avere,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\zeta^2 \frac{d^2\theta}{dt dz} + \rho_1\zeta^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0 \quad (6 \text{ ter})$$

Questa nuova teoria non è quindi più soddisfacente della prima.

Ma non è questa la forma a cui Helmholtz si è fermato; alla teoria della dispersione che abbiamo appena discusso e che aveva sviluppato prima del trionfo della dottrina di Maxwell, ne ha sostituito un'altra che ha esposto verso la fine della sua vita nel *volume XLVIII des Annales de Wiedemann (Electromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung)*. A questa memoria di Helmholtz si ricollega un lavoro di Reif /Wied. Ann, I, L. *Fortpflanzung des Lichtes*), che esamina le conseguenze della teoria di Helmholtz, esattamente dal punto di vista che ci interessa, cioè di quello del trascinamento parziale delle onde da parte di un mezzo in movimento. Helmholtz suppone che nei dielettrici la polarizzazione elettrica sia divisa in due parti; la polarizzazione dell'etere, i cui componenti indicheremo con  $X, Y, Z$ , e la polarizzazione della materia, che indicheremo con  $f, g, h$ , e che lo scienziato tedesco attribuisce a una specie di elettrolisi incompleta.

La corrente di spostamento totale ha allora per componenti:

$$\frac{dX}{dt} + \frac{df}{dt} \quad \frac{dY}{dt} + \frac{dg}{dt} \quad \frac{dZ}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

L'energia elettrostatica localizzata nel volume  $d\tau$  è invece la somma di tre termini, un termine in  $X^2 + Y^2 + Z^2$ , un termine in  $f^2 + g^2 + h^2$  e un termine in  $Xf + Yg + Zh$ . Sulla base di queste ipotesi, Helmholtz spiega le leggi della dispersione; ma Reif ha voluto vedere come si potesse spiegare, nello stesso modo, l'esperimento di Fizeau ripetuto da Michelson e Morley.

Egli ha riconosciuto che sarebbe stato necessario supporre che la materia trasportasse con sé l'elettricità che genera la seconda componente  $f, g, h$  della polarizzazione, mentre l'etere è trasportato parzialmente portando con sé l'elettricità che genera la prima componente  $X, Y, Z$ .

Reif ha pensato quindi di modificare l'ipotesi di Helmholtz eliminando il termine  $Xf + Yg + Zh$  dall'energia elettrostatica. Il risultato è quindi molto più semplice. Il trascinamento dell'etere è quindi nullo.

Trascrivo le equazioni di Helmholtz [*Sitzungsberichte de Berlin*, 1892, LIII, p. 1098 equivalenti.  $12^b, 12^c, 12^d$ ] solo ho indicato con  $X, Y, Z; f, g, h$  ciò che Helmholtz rappresenta con le lettere gotiche  $X, Y, Z, x, y, z$ ; inoltre assumerò  $\mu = K = 1$ ; rappresenterò infine con  $\alpha, \beta, \gamma$  ciò che Helmholtz rappresenta con le lettere gotiche  $L, M, N$ . Si ottiene così

$$\frac{1}{K_0} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(Z-h)}{dy} - \frac{d(Y-g)}{dz} \quad (7)$$

$$\frac{1}{K_0} \frac{d}{dt} (X+f) = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \quad (8)$$

con le equazioni che si dedurranno per simmetria.

Con l'ipotesi di Reif, è necessario nell'equazione (7) e in quelle da essa dedotte per simmetria sostituire  $F-f, G-g, H-h$  con  $F, G, H$ .

Purtroppo c'è un ostacolo da cui Reif non esce meglio di Helmholtz.

Se il mezzo è in movimento, la componente  $f, g, h$  viene trasportata dalla materia e l'equazione (8) diventa,

$$\frac{1}{K_0} \frac{dZ}{dt} + \frac{1}{K_0} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}$$

Se ne deduce:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) = 0$$

L'espressione

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

è proporzionale alla densità dell'elettricità  $\sigma$ .

D'altra parte Helmholtz trova

$$X = a^2 f + m \frac{d^2 f}{dt^2} + k \frac{df}{dt}$$

essendo  $a^2, m$  e  $k$  coefficienti costanti.

Se i moti sono troppo lenti, i due ultimi termini scompaiono e rimane

$$X = a^2 f$$

da cui

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = a^2 \sigma$$

da cui infine

$$a^2 \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Se  $\xi = \eta = 0$ , cioè se la velocità della materia è parallela all'asse  $z$ , viene

$$(a^2 + 1) \frac{d\sigma}{dt} + \gamma \frac{d\sigma}{dz} = 0$$

il che significa che le cariche elettriche non vengono trasportate insieme alla materia come richiesto dal principio di conservazione dell'elettricità, ma che vengono trasportate con una velocità minore uguale a

$$\frac{\zeta}{a^2 + 1}$$

e la teoria di Helmholtz conduce allo stesso risultato di quella di Reif; mi sembra che entrambe debbano essere respinte.

## Teoria di Lorenz

**449.** Lorentz ha immaginato una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento, basata su principi completamente diversi e, sotto certi aspetti, più soddisfacente. L'abbiamo esposta in precedenza.

Questa teoria spiega, come abbiamo visto, il principio della conservazione dell'elettricità, poiché l'ipotesi fondamentale non è altro, in fin dei conti, che una traduzione di questo principio stesso.

Essa spiega anche il trascinamento parziale delle onde.

Purtroppo rimane una difficoltà grave: non c'è più uguaglianza tra azione e reazione. Questo è ciò che abbiamo dimostrato in precedenza. Per rendersene conto, senza entrare nei dettagli dei calcoli, ci basterebbe del resto un esempio semplice. Consideriamo un piccolo conduttore A carico positivamente e circondato dall'etere. Supponiamo che l'etere sia attraversato da un'onda elettromagnetica e che, in un certo momento, questa onda raggiunga A. La forza elettrica dovuta alla perturbazione agirà sulla carica di A e produrrà una forza ponderomotrice che agisce sul corpo A. Questa forza ponderomotrice non sarà controbilanciata, dal punto di vista del principio di azione e reazione, da alcuna forza agente sulla materia ponderabile. Infatti, tutti gli altri corpi ponderabili possono essere considerati molto lontani e al di fuori della regione dell'etere che è perturbata.

Si potrebbe uscire da questa difficoltà dicendo che c'è una reazione del corpo A sull'etere; tuttavia, rimane il fatto che si potrebbe, se non realizzare, almeno concepire un esperimento in cui il principio di reazione sembrerebbe venire meno, poiché lo sperimentatore può agire solo sui corpi ponderabili e non potrebbe raggiungere l'etere.

Questa conclusione sembrerà difficile da accettare.

La teoria di Hertz non dava luogo a questa difficoltà ed era in perfetto accordo con il principio della reazione. In questa teoria e nell'esempio che ci ha interessato prima si avrebbe una reazione del corpo A non solo sull'etere, ma anche sull'aria in cui si trova questo etere; e per quanto rarefatta possa essere quest'aria, ci sarebbe perfetta uguaglianza tra l'azione subita da A e la reazione di A su quest'aria.

Questo perché, secondo la teoria di Hertz, l'etere era trasportato interamente dalla materia; nella teoria di Lorentz, al contrario, non è la stessa cosa, la reazione subita dall'aria è solo una piccolissima frazione dell'azione subita dal corpo A, e questa frazione è tanto più piccola quanto più l'aria è rarefatta.

Riflettendo su questo punto, si vede che la difficoltà non è specifica della teoria di Lorentz e che si avrà grande difficoltà a spiegare il trascinamento parziale delle onde senza violare il principio di uguaglianza di azione e reazione. Vedremo più avanti se la conciliazione sarà possibile.

## Teoria di Thomson

**450.** Nelle sue "*Recent Researches*", J. J. Thomson dedica un paragrafo alla propagazione della luce in un dielettrico in movimento (§ 440, p. 543). Questo lavoro è stato analizzato in dettaglio

da M. Blondin in *Lumière électrique* del 4 novembre 1893, p. 201, e non ci tornerò più.

Mi limiterò a ricordare i risultati principali.

Sia  $V$  la velocità di propagazione della luce nel dielettrico a riposo; sia  $v$  la velocità della materia del dielettrico, o meglio la proiezione di questa velocità sulla direzione di propagazione dell'onda; sia  $v_0$  la velocità dell'etere nel dielettrico che sarebbe nulla se non ci fosse trascinamento, che sarebbe uguale a  $v$  se il trascinamento fosse totale e che avrebbe valori intermedi se il trascinamento fosse parziale. La velocità della luce nel dielettrico in movimento sarà

$$V + v_1 + v_2$$

dove  $v_1$  e  $v_2$  possono avere valori diversi a seconda delle ipotesi.

In un conduttore in movimento possono verificarsi due tipi di forze elettromotrici di induzione, la prima derivante dalla variazione del campo magnetico, la seconda derivante dal movimento del conduttore in questo campo. Allo stesso modo, in un dielettrico in movimento, si deve sviluppare una forza elettromotrice di induzione a causa del movimento di questo dielettrico; dipenderà ovviamente dalla velocità di questo dielettrico; ma è la velocità della materia del dielettrico o la velocità dell'etere in esso contenuto? si possono fare entrambe le ipotesi. Nel primo caso  $v_1$  sarà uguale a  $\frac{v}{2}$ , nel secondo a  $\frac{v_0}{2}$ .

D'altro canto, se un dielettrico si sposta in un campo elettrico, sia che passi attraverso una regione in cui l'intensità del campo è maggiore o minore, la sua polarizzazione varierà; ci si può chiedere se questa variazione di polarizzazione produrrà una corrente di spostamento in grado di agire su un ago magnetizzato. A questo proposito si possono formulare diverse ipotesi.

Si può supporre che quando la polarizzazione elettrica in uno *stesso punto dello spazio* rimane costante, non vi sia corrente di spostamento, anche se il dielettrico, durante lo spostamento passasse in una regione in cui questa polarizzazione è diversa.

In altre parole le componenti della corrente di spostamento sarebbero,

$$\frac{df}{dt} \quad \frac{dg}{dt} \quad \frac{dh}{dt}$$

essendo  $f, g, h$  le componenti dello spostamento in un punto dato invariabilmente legato alla materia del dielettrico mobile.

Si può supporre infine che le componenti della corrente sono  $\frac{df}{dt} \quad \frac{dg}{dt} \quad \frac{dh}{dt}$  e che  $f, g, h$  sono le componenti dello spostamento in un punto dato invariabilmente legato all'etere parzialmente trascinato dal dielettrico mobile.

Nel primo caso,  $v_2$  è uguale a zero, nel secondo a  $\frac{v}{2}$ , nel terzo a  $\frac{v_0}{2}$ .

La discussione di J. J. Thomson lascia quindi spazio a un gran numero di ipotesi, ma nessuna è soddisfacente; l'unica che concorda con l'esperimento di Fizeau ( $v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2}$ ) solleverebbe le stesse difficoltà delle teorie di Helmholtz-Reif e Lorentz.

Si vede quindi quanto è difficile spiegare tutti i fatti osservati utilizzando la stessa teoria; le contraddizioni che tutte le ipotesi possono incontrare sembrano essere dovute a una causa profonda. In ogni caso è necessario un esame più attento e su questo tornerò più avanti.

## Discussione della teoria di Hertz

**451.** Abbiamo visto in precedenza le condizioni alle quali apparentemente dovrebbe soddisfare qualsiasi teoria elettrodinamica dei corpi in movimento.

1° *Dovrebbe spiegare gli esperimenti di Fizeau, cioè il trascinamento parziale delle onde luminose o, il che è lo stesso, delle onde elettromagnetiche trasversali.*

2° *Deve rispettare il principio di conservazione dell'elettricità e del magnetismo.*

3° *Deve essere compatibile con il principio di uguaglianza di azione e reazione.*

Abbiamo visto che nessuna delle teorie proposte finora soddisfa simultaneamente queste tre condizioni: la teoria di Hertz soddisfa le ultime due, ma non la prima; quella di Helmholtz non soddisfa la seconda; la teoria di Lorentz soddisfa i primi due requisiti, ma non l'ultimo.

Ci si può chiedere se ciò sia dovuto al fatto che queste teorie sono incomplete o se queste tre condizioni non siano realmente compatibili o lo diventerebbero solo attraverso una profonda modifica delle ipotesi ammesse.

## Discussione delle altre teorie

**452.** Pertanto la teoria di Hertz soddisfa le ultime due condizioni; resta da vedere se è la sola a soddisfarla.

Qualunque sia l'ipotesi da cui partiamo, arriveremo sempre a due gruppi di tre equazioni alle derivate parziali, analoghe a quelle di Hertz che devono soddisfare i due vettori  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e  $(P, Q, R)$ .

Osserviamo che le equazioni di Hertz soddisfano le tre condizioni seguenti:

1° Esse sono lineari ed omogenee rispetto a  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e  $(P, Q, R)$  e alle loro derivate;

2° Esse sono lineari ma non omogenee rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$  e alle loro derivate;

3° Esse contengono solo derivate di primo ordine sia rispetto a  $t$  che rispetto a  $x, y, z$ .

Dico che si può sempre supporre che le equazioni che si deve sostituire a quelle di Hertz soddisfano queste stesse condizioni:

1° Si può supporre che sono lineari rispetto alle componenti della forza elettrica e della forza magnetica; se effettivamente non lo fossero e se le perturbazioni elettromagnetiche fossero molto piccole, i termini di ordine superiore scomparirebbero prima dei termini di primo ordine; se dunque queste equazioni fossero compatibili con i principi di azione e reazione e di conservazione dell'elettricità e del magnetismo, i loro termini non cesserebbero di esserlo quando le si riducessero ai loro termini del primo ordine rispetto a  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e  $(P, Q, R)$ .

2° Si può supporre che siano lineari rispetto alle componenti della velocità  $\xi, \eta, \zeta$ ; se, infatti, si suppone che queste componenti di grado superiore sono molto piccole, i termini di secondo grado e di grado superiore in  $\xi, \eta, \zeta$  saranno trascurabili; se dunque queste quantità fossero compatibili con i principi, non cesserebbero di esserlo quando le riducessimo ai loro termini di ordine 0 e 1 rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$ ;

3° Si può supporre che contengano solo derivate del primo ordine; se infatti si suppone che la perturbazione vari molto lentamente, cioè che sia a lunghezza d'onda molto grande, le derivate di ordine superiore saranno trascurabili: se dunque le equazioni fossero compatibili con i principi, non cesserebbero di esserlo quando le riducessimo a quei loro termini che dipendono dalle derivate del primo ordine.

Supponiamo quindi che siano soddisfatte le tre condizioni sopra indicate.

Per formare le nuove equazioni, riprenderemo le equazioni di Hertz e aggiungeremo rispettivamente ai primi membri delle tre equazioni del primo gruppo i termini complementari,

$$AR_1 \quad AR_2 \quad AR_3$$

Allo stesso modo aggiungeremo i termini complementari ai primi membri delle tre equazioni del secondo gruppo.

$$AS_1 \quad AS_2 \quad AS_3$$

Abbiamo ottenuto il principio di conservazione del magnetismo operando sulle equazioni del primo gruppo, differenziandole rispettivamente rispetto a  $x, y, z$  e sommando. Operando in questo modo troveremo l'equazione per la conservazione del magnetismo, ma con il termine complementare

$$A \left( \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} \right)$$

il principio di conservazione del magnetismo richiede quindi che

$$\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0$$

così come il principio di conservazione dell'elettricità richiede che

$$\frac{dS_1}{dx} + \frac{dS_2}{dy} + \frac{dS_3}{dz} = 0$$

Queste equazioni mostrano che si può porre

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d\zeta_2}{dy} - \frac{d\eta_2}{dz} \\ R_2 &= \frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \\ R_3 &= \frac{d\eta_2}{dx} - \frac{d\xi_2}{dy} \\ S_1 &= \frac{dn_1}{dy} - \frac{dm_1}{dz} \\ S_2 &= \frac{dl_1}{dz} - \frac{dn_1}{dx} \\ S_3 &= \frac{dm_1}{dx} - \frac{dl_1}{dy} \end{aligned}$$

Se vogliamo, come ipotizzato sopra, che le equazioni contengano solo derivate del primo ordine, allora le nuove funzioni ausiliarie  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; l_1, m_1, n_1$  dipendono solo da  $\alpha, \beta, \gamma; P, Q, R$  e non dalle loro derivate.

Queste funzioni saranno inoltre lineari e omogenee rispetto a  $\alpha, \beta, \gamma; P, Q, R$ , poiché le equazioni devono essere lineari e omogenee rispetto a queste componenti e alle loro derivate.

Esse saranno inoltre lineari e omogenee rispetto a  $\xi, \eta, \zeta$ ; infatti le equazioni devono contenere solo termini di ordine 0 e di ordine 1 rispetto a queste componenti e alle loro derivate; è evidente inoltre che  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; l_1, m_1, n_1$  devono scomparire nelle equazioni relative all'elettrodinamica dei corpi a riposo, non contenendo termini di grado 0 in  $\xi, \eta, \zeta$ .

Resta da vedere se queste equazioni possono essere compatibili con il principio della reazione. Per questo ricordo come abbiamo ottenuto nella teoria di Hertz il principio di conservazione dell'energia. Eravamo arrivati a un'equazione

$$\frac{dJ}{dt} + \mathcal{T} = K \quad (5)$$

dove  $J$  rappresenterà l'energia elettromagnetica,  $\mathcal{T}$  il lavoro delle forze esterne,  $K$  il calore di Joule.

Operando allo stesso modo sulle equazioni trasformate otterremo:

$$\frac{dJ}{dt} + \mathcal{T} + \mathcal{T}_1 = K \quad (5 \text{ bis})$$

$\mathcal{T}$  figura già nell'equazione (5);  $K$  è il calore di Joule; infine  $\mathcal{T}_1$  è un termine complementare proveniente dai termini complementari  $R_1, R_2, \dots, S_2$ .

Si avrà pertanto

$$\mathcal{T}_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[ \sum \alpha \left( \frac{d\zeta_2}{dy} - \frac{d\eta_2}{dz} \right) + \sum P \left( \frac{dn_1}{dy} - \frac{dm_1}{dz} \right) \right]$$

Il simbolo  $\sum$  rappresenta sempre una somma di tre termini e se ne deducono le ultime due dalla prima permutando circolarmente  $x, y, z; \alpha, \beta, \gamma; P, Q, R; \xi_1, \eta_1, \zeta_1; l_1, m_1, n_1$ .

L'integrazione per parti ci dà

$$\mathcal{T}_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi} \sum \left( \eta_2 \frac{d\alpha}{dz} - \zeta \frac{d\alpha}{dy} + m_1 \frac{dP}{dz} - n_1 \frac{dP}{dy} \right)$$

Siano  $a, b, c$  le componenti della forza ponderomotrice nella teoria di Hertz; siano  $a + a_1, b + b_1, c + c_1$  le componenti di questa stessa forza nella teoria trasformata.

Il termine  $\mathcal{T}_1$  rappresenterà allora il lavoro della forza ponderomotrice  $(a_1, b_1, c_1)$ .

Siccome la forza della teoria di Hertz  $(a, b, c)$  soddisfa al principio di reazione, bisogna che la forza complementare  $(a_1, b_1, c_1)$  lo soddisfi pure e di conseguenza che si abbia

$$\int a_1 d\tau = \int b_1 d\tau = \int c_1 d\tau = 0$$

Queste condizioni si possono anche enunciare diversamente: *è necessario che  $\mathcal{T}_1$  sia nullo quando si assegnano a  $\xi, \eta, \zeta$  valori costanti.*

Se quindi assegniamo a  $\xi, \eta, \zeta$  valori costanti qualunque, e sostituiamo  $\alpha, \beta, \gamma; P, Q, R$  con funzioni qualsiasi di  $x, y, z$  che si annullano all'infinito, l'integrale  $\mathcal{T}_1$  dovrà annullarsi.

Ma  $\mathcal{T}_1$  si può ancora scrivere sotto forma di una somma di termini ponendo:

$$\mathcal{T}_1 = U + V + W$$

e

$$\begin{cases} U = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left( \zeta_2 \frac{d\beta}{dx} - \eta_2 \frac{d\gamma}{dx} + n_1 \frac{dQ}{dx} - m_1 \frac{dR}{dx} \right) \\ V = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left( \xi_2 \frac{d\gamma}{dy} - \zeta_2 \frac{d\alpha}{dy} + l_1 \frac{dR}{dy} - n_1 \frac{dP}{dy} \right) \\ W = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left( \eta_2 \frac{d\alpha}{dz} - \xi_2 \frac{d\beta}{dz} + m_1 \frac{dP}{dz} - l_1 \frac{dQ}{dz} \right) \end{cases}$$

Dico che i tre termini  $U, V, W$  si devono annullare tutti.

Infatti, sostituiamo le sei componenti  $\alpha, \beta, \gamma; P, Q, R$  con sei funzioni qualsiasi di  $x, y, z$ ; la somma  $U + V + W$  si dovrà annullare.

Sostituiamo ora queste stesse componenti con le sei stesse funzioni di  $\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z$ ; (essendo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tre coefficienti costanti arbitrari).  $U$  si cambierà in  $\frac{U}{\lambda_2 \lambda_3}$ ,  $V$  in  $\frac{V}{\lambda_1 \lambda_3}$ ,  $W$  in  $\frac{W}{\lambda_1 \lambda_2}$ . E siccome  $\mathcal{T}_1$  rimane sempre nullo, si dovrà avere

$$\frac{U}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{V}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{W}{\lambda_1 \lambda_2} = 0$$

e questo qualunque siano i coefficienti  $\lambda$ ; si deve quindi avere separatamente

$$U = V = W = 0$$

In  $U$ , la funzione sotto il segno di integrale è lineare, da un lato rispetto a  $\alpha, \beta, \gamma; P, Q, R$ , dall'altro rispetto alle derivate di queste sei componenti prese rispetto a  $x$ .

Consideriamo un integrale della forma

$$\int d\tau \left( A\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + B\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} + C\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + D\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right)$$

Qual è la condizione perché questo integrale si annulli, qualunque siano le funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  che dovranno annullarsi all'infinito?

Dico che la condizione necessaria è che la quantità sotto il segno di integrale sia una derivata esatta. Infatti, da quanto abbiamo prima detto, la condizione è evidentemente sufficiente e si ha in particolare

$$\int \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} d\tau = \int \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} d\tau = \int \left( \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right) d\tau = 0$$

L'integrale proposto si riduce quindi a

$$(B - C) \int \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} d\tau$$

Siccome  $\varphi_2$  è una funzione arbitraria di  $x, y, z$  il prodotto  $\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx}$  sarà pure una funzione assolutamente arbitraria di queste variabili e l'integrale si annullerà solo se

$$B = C$$

cioè se

$$A\varphi_1 d\varphi_1 + B\varphi_2 d\varphi_1 + C\varphi_1 d\varphi_2 + D\varphi_2 d\varphi_2$$

è un differenziale esatto.

La condizione è pertanto necessaria.

Consideriamo ora un integrale la cui funzione sotto il segno di integrale sarà lineare, da un lato rispetto a  $n$  funzioni arbitrarie,

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$$

dall'altro rispetto alle loro derivate

$$\frac{d\varphi_1}{dx}, \frac{d\varphi_2}{dx}, \dots, \frac{d\varphi_n}{dx}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché questo integrale si annulli sempre sarà che la quantità sotto il segno di integrale sia una derivata esatta.

La condizione è ovviamente sufficiente. Dico che è anche necessaria.

Infatti, essendo le funzioni  $\varphi$  arbitrarie, l'integrale dovrà essere nullo, in particolare quando tutte queste funzioni saranno identicamente nulle, tranne due; se quindi uguagliamo a zero tutte le funzioni  $\varphi$ , tranne due, la quantità sotto il segno di integrale deve essere una derivata esatta; i termini  $\varphi_i \frac{d\varphi_K}{dx}$  e  $\varphi_K \frac{d\varphi_i}{dx}$  devono quindi avere lo stesso coefficiente: ciò vuol dire che le condizioni di integrabilità devono essere soddisfatte.

Applichiamo questa regola al caso in esame. Vedremo che,

$$\begin{aligned} \zeta_1 d\beta - \eta_2 d\gamma + n_1 dQ - m_1 dR \\ \xi_1 d\gamma - \zeta_2 d\alpha + l_1 dR - n_1 dP \\ \eta_1 d\alpha - \xi_2 d\beta + m_1 dP - l_1 dQ \end{aligned}$$

devono essere differenziali esatti.

La prima di queste espressioni, dove non figurano né  $d\alpha$  né  $dP$  devono essere il differenziale di una funzione indipendente di  $\alpha$  e di  $P$ .

Pertanto,  $\xi_2, \eta_2, n_1$  e  $m_1$  non dipendono né da  $\alpha$  né da  $P$ ; e analogamente  $\xi_2, \zeta_2, l_1, n_1$  non dipendono né da  $P$  né da  $Q$ ;  $\eta_2, \xi_2, m_1$  e  $l_1$  non dipendono né da  $\gamma$  né da  $R$ .

Risulta da ciò che  $\xi_2$  e  $l_1$  possono dipendere solo da  $\alpha$  e da  $P$ ;  $\eta_2$  e  $m_1$  solo da  $\beta$  e da  $Q$ ;  $\zeta_2$  e  $n_1$  solo da  $\gamma$  e da  $R$ .

Le condizioni di integrabilità ci danno poi

$$\frac{d\zeta_2}{d\gamma} = -\frac{d\eta_2}{d\beta} \quad \frac{d\xi_2}{d\alpha} = -\frac{d\zeta_2}{d\gamma} \quad \frac{d\eta_2}{d\beta} = -\frac{d\xi_2}{d\alpha}$$

da cui

$$\frac{d\xi_2}{d\alpha} = \frac{d\eta_2}{d\beta} = \frac{d\zeta_2}{d\gamma} = 0$$

Si troverà analogamente

$$\frac{dl_1}{dP} = \frac{dm_1}{dQ} = \frac{dn_1}{dR} = 0$$

Così  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, l_1, m_1, n_1$  potranno dipendere rispettivamente solo da  $\alpha, \beta, \gamma; P, Q, R$ .

Le condizioni di integrabilità danno infine,

$$\frac{d\xi_2}{dP} = \frac{d\eta_2}{dQ} = \frac{d\zeta_2}{dR} = -\frac{dl_1}{d\alpha} = -\frac{dm_1}{d\beta} = -\frac{dn_1}{d\gamma}$$

cioè che  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2, l_1, m_1, n_1$  si dovranno ridurre a meno di uno stesso fattore a  $P, Q, R; -\alpha, -\beta, -\gamma$ .

Questo fattore costante dovrà inoltre essere una funzione lineare e omogenea di  $\xi, \eta, \zeta$ .

Ma se introduciamo una nuova condizione, quella dell'*isotropia*, vedremo che questo fattore costante deve essere nullo; perché se questo fattore fosse scritto per esempio.

$$\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \lambda_3\gamma$$

la direzione i cui coseni direttori sono proporzionali a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  svolgeranno un ruolo preponderante.

*La teoria di Hertz è quindi l'unica compatibile con il principio di conservazione dell'elettricità e del magnetismo e con quello dell'uguaglianza di azione e reazione.*

## Conclusioni provvisorie

453. Da tutto quanto precede risulta che nessuna teoria può soddisfare contemporaneamente tutte e tre le condizioni poste all'inizio del n. 451; perché la teoria di Hertz è l'unica che soddisfa le ultime due e non soddisfa la prima.

Potremmo quindi solo sperare di sfuggire a questa difficoltà modificando profondamente le idee generalmente accettate; inoltre, non è chiaro in quale direzione vada effettuata questa modifica.

Bisogna quindi rinunciare a sviluppare una teoria perfettamente soddisfacente e attenerci temporaneamente a quella meno difettosa che sembra essere quella di Lorentz. Ciò basterà al mio scopo che è quello di approfondire la discussione delle idee di Larmor.

In quali forme possiamo mettere questa teoria di Lorentz?

Queste forme sono diverse e dobbiamo scegliere l'una o l'altra a seconda dell'obiettivo che ci si propone.

In questa teoria, immaginiamo una moltitudine di particelle cariche mobili, che circolano attraverso un etere immobile mantenendo una carica invariabile.

L'etere è attraversato anche da perturbazioni elettromagnetiche.

Possiamo allora mantenere le equazioni di Hertz, ma dando alle quantità che vi entrano valori molto diversi, a seconda che il punto  $xyz$  si trovi in una particella carica o nell'etere.

Nell'etere si avrà

$$\xi, \eta, \zeta$$

poiché si suppone che l'etere non trascini materia.

Si avrà d'altra parte

$$K = \mu = 1 \quad \beta = \sigma = 0 \quad u = v = w = 0$$

In una particella carica si avrà

$$\rho = C^{te} \quad \sigma = 0 \quad u = v = w = 0 \quad \mu = 1$$

poiché la carica rimane costante e queste particelle non sono sede di correnti di conduzione.

Da questo punto di vista non esiste alcun magnetismo propriamente detto da nessuna parte e il magnetismo apparente è dovuto solo alle correnti delle particelle di Ampère.

In questa forma i fenomeni elettromagnetici vengono visti, per così dire, al microscopio e scomparse le apparenze, si vede solo la realtà, o meglio ciò che Lorentz considera tale. Siamo

quindi in possesso di uno strumento che può essere utile per la discussione che abbiamo in mente.

Ma le equazioni in questa forma non si prestano bene ad applicazioni in cui le apparenze, cioè i fenomeni medi, sono le uniche cose che contano.

Da questo punto di vista, possiamo scrivere le equazioni come segue; si manterranno le equazioni di Hertz, solo nelle equazioni (1) e (2), si modificheranno i termini:

$$\frac{d\zeta_1}{dy} - \frac{d\eta_1}{dz} \quad \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz}$$

di coefficienti costanti che dipenderanno dalla natura del mezzo, che saranno uguali a 0 per l'etere, a 1 per i conduttori perfetti e avranno valori intermedi per i dielettrici diversi dall'aria.

Non è necessario aggiungere che questa teoria, se può renderci certi servigi per il nostro scopo, fissando un po' le nostre idee, non può soddisfarci pienamente, né può essere considerata definitiva.

Mi sembra molto difficile ammettere che il principio di reazione sia violato, anche solo in apparenza, e che non sia più vero se consideriamo solo le azioni subite dalla materia ponderabile e se tralasciamo la reazione di questa materia sull'etere.

Sarà quindi necessario, prima o poi, modificare le nostre idee su qualche punto importante e rompere lo schema in cui cerchiamo di adattare sia i fenomeni ottici che quelli elettrici.

Ma anche limitandoci ai fenomeni ottici propriamente detti, quanto detto finora per spiegare il trascinarsi parziale delle onde non è molto soddisfacente.

L'esperienza ha rivelato una serie di fatti che possono essere riassunti nella seguente formula: è impossibile rendere manifesto il movimento assoluto della materia, o meglio il movimento relativo della materia ponderabile in relazione all'etere; tutto ciò che può essere dimostrato è il movimento della materia ponderabile rispetto alla materia ponderabile.

Le teorie proposte spiegano bene questa legge, ma a condizione che:

Il quadrato dell'aberrazione deve essere trascurato;

Ma questo non basta; la legge sembra essere vera anche senza queste restrizioni, come ha dimostrato un recente esperimento di Michelson.

Anche qui c'è quindi una lacuna che forse non è estranea a quella che questo paragrafo intende evidenziare.

E in effetti, l'impossibilità di dimostrare un moto relativo della materia rispetto all'etere, e l'uguaglianza che senza dubbio si verifica tra azione e reazione senza tener conto dell'azione della materia sull'etere, sono due fatti la cui connessione sembra evidente.

Forse entrambe le lacune verranno colmate contemporaneamente.

## Imitazioni idrodinamiche

Ho già parlato in precedenza delle sfere pulsanti di Bjerknæs e dell'imitazione da parte di queste sfere dei fenomeni elettrostatici. Ho messo in evidenza l'analogia tra i movimenti che si riproducono nell'acqua in prossimità di sfere pulsanti e quelli che si verificherebbero nell'etere in prossimità di un corpo elettrizzato nella teoria di Fresnel adattata.

Purtroppo, come ho detto sopra, l'analogia non è completa; i movimenti delle sfere pulsanti e quelli che esse eccitano nei liquidi sono alternati e periodici. Con la teoria di Fresnel adattata, al contrario, i movimenti che regnano nell'etere devono essere continui.

Bjerknæs fu portato ad adottare movimenti periodici a causa di necessità meccaniche; ma ne conseguì, come ho detto sopra, che la sua imitazione è imperfetta; due sfere pulsanti la cui fase è la stessa sono simili a due conduttori che trasportano elettricità con lo stesso nome; due sfere la cui fase è diversa sono simili a due conduttori che trasportano elettricità con nomi opposti; *ma due sfere la cui differenza di fase non è né 0 né  $\pi$  non sono paragonabili a nulla.*

L'imitazione sarebbe molto più perfetta se il movimento delle sfere fosse continuo invece che alternato; se il raggio di ciascuna sfera variasse sempre nella stessa direzione con velocità uniforme. Servirebbe solo che il raggio delle sfere fosse sufficientemente grande, la velocità di pulsazione sufficientemente lenta, la durata dell'esperimento sufficientemente breve affinché durante tale periodo le variazioni del raggio fossero trascurabili. Queste condizioni sono difficili da raggiungere se si vuole che le azioni reciproche delle sfere siano sensibili. Se così fosse, però, ci avvicineremmo alle condizioni della teoria di Fresnel adattata e ci libereremmo dalla relativa difficoltà della fase che ho appena evidenziato.

Tuttavia, resterebbe ancora una grande difficoltà; gli effetti idrodinamici sono effettivamente l'immagine degli effetti elettrostatici, ma ne sono un'*immagine capovolta*.

Due sfere della stessa fase si attraggono, mentre due corpi che trasportano elettricità con lo stesso nome si respingono. C'è un'*inversione*.

I fenomeni elettrodinamici, come quelli elettrostatici, sono suscettibili di imitazione idrodinamica. Lord Kelvin, nelle sue *Popular Lectures*, parla di un progetto di modello idrocinetico di cui vorrei brevemente ricordare i principi.

Immaginiamo che due corpi solidi C e C' siano immersi in un liquido indefinito, la cui forma sarà anulare; ciascuno di questi corpi sarà formato da un filo sottile che sarà curvato in modo che le sue due estremità si incontrino; otteniamo così una sorta di anello chiuso.

Siano  $u, v, w$  le componenti della velocità di una molecola liquida e consideriamo l'integrale

$$\int (udx + vdy + wdz)$$

preso lungo qualsiasi contorno chiuso. Distinguiamo tre tipi di contorni chiusi ai quali si possono ridurre tutti gli altri.

Quelli del primo tipo saranno quelli che non si intrecciano con i corpi anulari C e C'; possono essere ridotti a un punto mediante deformazione continua e senza cessare di essere completamente immersi nel liquido, senza mai toccare C o C'.

Quelli del secondo tipo si intrecciano una volta con C. Questo sarebbe, ad esempio, il perimetro della sezione del filo che forma il corpo C.

Quelli del terzo tipo si intrecciano una volta con C''.

È chiaro che ogni contorno può essere considerato come la combinazione di vari contorni appartenenti a uno di questi tre tipi.

Suppongo che all'origine del tempo si abbia:

$$\int (udx + vdy + wdz) = 0$$

per un contorno del primo tipo,

$$\int (udx + vdy + wdz) = 4\pi i$$

per un contorno del secondo tipo

$$\int (udx + vdy + wdz) = 4\pi i'$$

per un contorno del terzo tipo.

In virtù del teorema di Helmholtz sui vortici, queste equazioni, vere all'origine del tempo, non cesseranno mai di esserlo. Le lettere  $i$  e  $i'$  indicano quindi delle costanti.

Ma se si ricordano le leggi secondo cui un campo magnetico è generato da una corrente, percepiremo immediatamente la seguente conseguenza.

La velocità  $u, v, w$  del liquido rappresenta in modulo, direzione e verso la forza magnetica generata da due correnti, una di intensità  $i$  lungo il filo  $C$ , l'altra di intensità  $i'$  che segue il filo  $C'$ .

Pertanto, nel modello di Lord Kelvin, la velocità del liquido è diretta lungo la forza magnetica, mentre nel modello di Bjerknæs è diretta lungo la forza elettrica. In altre parole, nel modello di Lord Kelvin la velocità del liquido è la stessa di quella dell'etere nella teoria di Larmor: nel modello di Bjerknæs è la stessa della teoria di Fresnel adattata.

Lord Kelvin ha mostrato che i due corpi  $C$  e  $C'$  immersi in un liquido in movimento esercitano reciprocamente delle azioni meccaniche apparenti, e che queste azioni sono le stesse, in un senso prossimo a quelle che si eserciterebbero tra le due correnti che ho appena definito, che seguono una il filo  $C$  con intensità  $i$ , l'altra il filo  $C'$  con intensità  $i'$ .

Le azioni meccaniche di origine idrodinamica seguono assolutamente le stesse leggi delle azioni di origine elettrodinamica: solo che c'è inversione; se le prime sono repulsioni, le seconde saranno attrazioni e viceversa.

È chiaro che la spiegazione delle azioni elettrostatiche nella teoria di Fresnel adattata deve essere collegata agli esperimenti di Bjerknæs; e che d'altra parte la spiegazione delle azioni reciproche delle correnti nella teoria di Larmor deve essere collegata al modello di Lord Kelvin. Ma la difficoltà nasce dall'inversione. Innanzitutto dobbiamo capire le ragioni di questa inversione.

## Cause dell'inversione

Per questo è necessario risalire ai principi generali della meccanica. Consideriamo un sistema la cui situazione sia definita da un certo numero di parametri

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

che chiamerò le sue coordinate.

Siano  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$  le derivate di queste quantità rispetto al tempo; è ciò che chiamerò le *velocità*.

Sia  $T$  l'energia cinetica del sistema,  $U$  la sua energia potenziale dovuta alle forze interne. Sia infine

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2, \dots + Q_n \delta q_n$$

i lavori virtuali delle forze esterne al sistema per variazioni virtuali  $\delta q_i$  delle coordinate  $q_i$ .

Le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'_i} - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = Q_i \quad (1)$$

Seguendo l'esempio di Helmholtz nella sua teoria dei sistemi monociclici, distingueremo due tipi di coordinate.

Le coordinate a variazione lenta e che chiamerò  $q_a$ .

Le coordinate rapidamente variabili che designerò con  $q_b$  e che si distinguono dalla prima per due condizioni:

$T$  e  $U$  non dipendono dalle  $q_b$  ma solo dalle loro derivate.

Le velocità  $q'_b$  sono molto più grandi delle  $q'_a$ .

Così  $U$  dipende solo dalle  $q_b$ ;  $T$  dipende dalle  $q_a$ , dalle  $q'_a$  e dalle  $q'_b$ , è omogeneo e di grado doppio rispetto alle  $q'_a$  e alle  $q'_b$ .

Le equazioni di Lagrange si riducono allora, per quanto riguarda le  $q_a$ , a

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'_a} = Q^a \quad (2)$$

Porremo,

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i$$

e le quantità  $p_i$  si chiameranno i *momenti* del sistema.

Vi sono così tre tipi di quantità da considerare in meccanica, le coordinate, le velocità e i momenti.

L'equazione (2) diviene

$$\frac{dp_b}{dt} = Q_b$$

Supporrò che  $Q_b$  sia nullo e ciò dà

$$p_b = C^{te} \quad (3)$$

se quindi non esiste una forza esterna che tende a far variare la velocità delle coordinate  $q_b$  in variazione rapida, i momenti corrispondenti sono costanti. Suppongo ora che le forze esterne  $Q_a$  siano scelte in modo da mantenere  $q_a$  costante. Le  $q'_a$  sono allora nulle e le equazioni (3) i cui primi membri dipendono dai  $q'_b$ , dalle  $q_a$  che sono costanti e dalle  $q'_a$  che sono nulle, queste equazioni, il cui numero è uguale a quello delle  $q'_b$ , mostrano che le  $q'_b$  sono costanti.

Il sistema si trova quindi in una sorta di moto stazionario, cioè in equilibrio apparente, e le  $Q_a$  ci fanno conoscere le forze esterne che devono essere applicate ad esso per mantenere questo equilibrio apparente. Siccome  $\frac{dT}{dq'}$  dipende solo dalle  $q_a$ , dalle  $q'_a$  e dalle  $q'_b$  che sono nulle o costanti, questa quantità è pure una costante, di modo che

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'_a} = 0$$

Se, inoltre, si suppone che non vi siano forze esterne nel sistema, cioè che  $U = 0$ , l'equazione di Lagrange relativa alle  $q_a$  si riduce a

$$-\frac{dT}{dq_a} = Q_a \quad (4)$$

Le  $q'_a$  essendo nulle,  $T$  dipende solo dalle  $q_a$  e dalle  $q'_b$ , è omogeneo e del secondo ordine rispetto alle  $q'_b$  di modo che si ha

$$2T = \sum q'_b \frac{dT}{dq'_b} \quad q_b = \sum p_b q'_b$$

Essendo le  $p_b$  costanti, sembrerà naturale fare un cambio di variabili ed esprimere  $T$  in funzioni di  $q_a$  e  $p_b$ ; ma per evitare ogni confusione, scriveremo con la  $d$  ordinaria le derivate

$$\frac{dT}{dq_a} \quad \frac{dT}{dq'_b}$$

prese rispetto alle vecchie variabili e con  $\partial$  le derivate

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} \quad \frac{\partial T}{\partial q'_b}$$

prese rispetto alle nuove variabili.

Si avrà allora

$$\begin{cases} dT = \sum \frac{dT}{dq_a} dq_a + \sum \frac{dT}{dq'_b} dq'_b = \sum \frac{dT}{dq_a} dq_a + \sum p_b dq'_b \\ dT = \sum \frac{\partial T}{\partial q_a} dq_a + \sum \frac{\partial T}{\partial p_b} dp_b \\ 2dT = \sum p_b dq'_b + \sum q'_b dp_b \end{cases} \quad (5)$$

Il confronto tra la prima e l'ultima delle equazioni (5) dà

$$dT = \sum q'_b dp_b - \sum \sum \frac{dT}{dq_a} dq_a$$

Il confronto dell'equazione così ottenuta con la secondo delle (5) Dà

$$q'_b = \frac{\partial T}{\partial p_b} \frac{\partial T}{\partial q_a} = -\frac{dT}{dq_a}$$

di modo che la (1) diviene

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a \quad (6)$$

Queste equazioni sono vere quando si suppone che  $q_a$  e  $q'_a$  siano costanti; ma lo sono ancora approssimativamente se si suppone che le  $q_a$  varino in modo eccessivamente lento. Allora le  $q_b$  varieranno in modo eccessivamente lento, ma varieranno; mentre le  $p_b$  saranno rigorosamente costanti e le  $Q_b$  saranno nulle.

Supponiamo ora che le  $Q_b$  non siano nulle, ma abbiano valori tali che le  $q'_b$  rimangano strettamente costanti, mentre le  $p_b$  e le  $q_a$  varieranno in modo eccessivamente lento. È quindi opportuno prendere per variabili non le  $p_b$  e le  $q_a$  ma le  $q'_b$  e le  $q_a$  e ritornare all'equazione (4)

$$-\frac{dT}{dq_a} = Q_a$$

In questo stato di moto stazionario o quasi stazionario, in questo stato di equilibrio apparente, il sistema sembra soggetto a certe forze apparenti, uguali e contrarie alle forze esterne che si è obbligati ad applicare per mantenere l'equilibrio.

Quando si danno alle  $q_a$  incrementi virtuali  $\delta q_a$  il lavoro virtuale di queste forze esterne sarà

$$\sum Q_a \delta q_a$$

Questa è la definizione stessa delle  $Q_a$ . Il lavoro virtuale delle forze apparenti che fanno equilibrio sarà quindi

$$-\sum Q_a \delta q_a$$

Se i momenti  $p_b$  sono mantenuti costanti, l'equazione (6) dà per questo lavoro virtuale

$$-\sum \frac{\partial T}{\partial q_a} \delta q_a = -\delta T$$

Ciò significa che queste forze apparenti tendono a diminuire l'energia  $T$  del sistema (e del resto non si può supporre il contrario senza ammettere il moto perpetuo).

Se invece sono le velocità  $q'_b$  ad essere mantenute costanti, l'equazione (4) ci fornisce per questo lavoro virtuale,

$$\sum \frac{dT}{dq_a} = \delta T$$

Ciò significa che queste forze apparenti tendono ad aumentare l'energia  $T$  del sistema; ciò non è contrario al principio di conservazione dell'energia e, anzi, per mantenere costante le  $q'_b$ , le  $Q_b$  non deve essere nulle, quindi serve far intervenire una forza esterna, che può comportare un lavoro.

Prima di applicare questi principi all'elettricità, può essere utile chiarirli con un semplice esempio meccanico. Sceglierò il regolatore a forza centrifuga.

Avremo un parametro  $q_a$  a variazione lenta che sarà la spaziatura delle due sfere e un parametro a variazione rapida, la cui derivata  $q'_b$  sarà la velocità di rotazione del regolatore.

L'energia cinetica  $T$  sarà (essendo  $A$  un fattore costante)

$$T = \frac{1}{2} A q_a^2 q'^2_b \quad (7)$$

e il momento sarà

$$p_b = Aq_a^2 q_b'$$

questo sarà il momento di rotazione. Si ha quindi

$$T = \frac{p_b^2}{2Aq_b^2} \quad (8)$$

La forza apparente è qui la forza centrifuga che tende ad allontanare le due sfere; essa è uguale a

$$-Q_a = \frac{dT}{dq_a} = -\frac{\partial T}{\partial q_a}$$

Tende ad aumentare le  $q_a$ . Se quindi non vi è alcuna coppia esterna tendente a mantenere costante la velocità di rotazione, il momento di rotazione è costante e la forza centrifuga tende a *diminuire*  $T$  perché nell'equazione (8) (dove si suppone  $p_b$  costante)  $q_a$  è al denominatore. Se invece è presente una coppia esterna che mantiene costante la velocità di rotazione, la forza centrifuga tende ad *aumentare*  $T$ , perché nell'equazione (7) (dove si suppone costante  $q_b'$ )  $q_a$  è al numeratore. Tuttavia, quando le sfere si allontanano, è necessario compiere del lavoro che viene ricavato dalla coppia esterna.

## Applicazione all'elettrostatica

**455.** Nella teoria di Larmor, l'energia elettrostatica è considerata energia potenziale; in un campo elettrico costante, si ha quindi

$$T = 0$$

o, se si indica con  $E$  l'energia totale  $T + U$

$$E = U$$

Se questo campo è generato da due piccole sfere elettrizzate, questa energia  $U$  dipende dalle cariche delle due sfere che sono *costanti* e dalla loro distanza, che sarà il nostro parametro lentamente variabile e che chiamerò  $q_a$ .

Queste due sfere eserciteranno un'attrazione o una repulsione reciproca che dovrà essere controbilanciata da una forza esterna se si vuole mantenere l'equilibrio. Indico questa forza esterna con  $Q_a$ , in accordo con le notazioni adottate; se  $Q_a$  è positivo, le due sfere si attraggono e la forza esterna che deve controbilanciare questa attrazione deve tendere ad allontanare le due sfere l'una dall'altra.

Poiché  $T$  è nulla, l'equazione di Lagrange si riduce a

$$\frac{dU}{dq_a} = Q_a$$

o

$$\frac{dE}{dq_a} = 0 \quad (9)$$

Passiamo all'imitazione idrodinamica di Bjerknes, che modificherò leggermente, per evitare la difficoltà derivante dalle differenze di fase.

La distanza tra le due sfere  $q_a$  sarà il nostro parametro a variazione lenta.

I loro raggi  $q_b$  e  $q_c$  saranno i nostri parametri a rapida variazione. Supporrò che le velocità  $q_b'$  e  $q_c'$  siano *costanti*, ma assai basse affinché, per tutta la durata dell'esperimento,  $q_b$  e  $q_c$  non subiscano variazioni apprezzabili.

Quindi, se considero  $q_b$  e  $q_c$  come parametri "a rapida variazione", non è perché le loro derivate  $q'_b$  e  $q'_c$  siano molto grandi in senso assoluto (sono, al contrario, molto piccole), ma perché sono molto più grandi di  $q'_a$ .

Come nell'imitazione di Bjerknæs, sono queste due velocità  $q'_b$  e  $q'_c$  a corrispondere alle cariche delle sfere e devono essere mantenute costanti. L'equazione (4) ci dà quindi,

$$-\frac{dT}{dq_a} = Q_a$$

e poiché

$$U = 0 \quad T = E$$

si può scrivere

$$-\frac{dE}{dq_a} = Q_a \quad (10)$$

Confrontando le equazioni (9) e (10) si nota che esiste un'*inversione*. Osserviamo inoltre che se la vibrazione delle sfere non fosse mantenuta da una forza esterna, le velocità  $q'_b$  e  $q'_c$  non rimarrebbero costanti al variare della distanza  $q_a$ . Per mantenere costanti queste velocità (o ipotizzando pulsazioni periodiche, come nell'esperimento condotto da Bjerknæs, per mantenere costante l'ampiezza delle vibrazioni) è necessario un intervento esterno, mentre per mantenere le cariche di due sfere elettrizzate quando si allontanano o si avvicinano non è necessario alcun intervento. Anche in questo caso si tratta di una differenza tra il fenomeno elettrico e la sua imitazione idrodinamica, una differenza che, peraltro, come vedremo, è intimamente legata all'*inversione*.

Supponiamo ora di aver effettuato un'altra imitazione dinamica che coinvolga un sistema dipendente da 3 parametri  $q_a, q_b, q_c$ , il primo a variazione lenta, gli altri due a variazione rapida. Il primo sarebbe la distanza tra i due corpi che svolgerebbe la funzione delle due sfere elettriche.

Ma suppongo che le cariche di queste due sfere, invece di essere rappresentate dalle velocità  $q'_b$  e  $q'_c$ , siano rappresentate dai momenti corrispondenti  $p_b$  e  $p_c$ .

Suppongo inoltre che la forza viva  $T = E$  del sistema sia uguale all'energia elettrostatica delle due sfere.

Accadrà innanzitutto che, *senza alcun intervento esterno*, questi momenti rimarranno costanti, così come le cariche elettriche che essi rappresentano.

Inoltre, poiché questi momenti sono costanti, l'equazione (6) ci darà:

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a$$

o

$$\frac{\partial E}{\partial q_a} = Q_a$$

*Quindi non c'è più inversione.*

Ho detto sopra che, tra le grandezze che siamo portati a considerare in meccanica, bisogna distinguere coordinate, velocità e momenti, e si può riassumere la discussione precedente dicendo che *l'inversione nell'esperimento di Bjerknæs deriva dal fatto che si sono rappresentato le cariche elettriche con velocità, mentre si avrebbe dovuto rappresentarle con momenti.*

## Applicazioni all'elettrodinamica

**456.** Applichiamo gli stessi principi al dispositivo di Lord Kelvin e, per farlo, ricordiamo innanzitutto quali devono essere le basi di qualsiasi teoria dinamica del campo elettrodinamico. Basti fare riferimento a un celebre capitolo del grande trattato di Maxwell sull'elettricità, Parte 4, Capitolo VI, Articolo 568.

Conviene supporre che l'energia elettromagnetica del campo rappresenti la forza viva  $T$  dell'etere; lo stato del sistema è definito da un numero di parametri  $q_a$  a variazione lenta che definiscono la posizione relativa dei due circuiti, e da due parametri  $q_b$  e  $q_c$  a variazione rapida.

L'ipotesi ammessa da Maxwell è che le intensità delle due correnti non siano altro che le derivate  $q'_b$  e  $q'_c$  di questi parametri. Queste sono le velocità.

Esprimeremo quindi  $T$  in funzione delle intensità e della  $q_a$ , cioè di  $q'_b$  di  $q'_c$  e di  $q_a$ ; l'equazione (4) ci darà allora

$$-\frac{dT}{dq_a} = Q_a \quad (4)$$

D'altro canto,  $q'_b$  e  $q'_c$  essendo velocità e non momenti, non rimarranno costanti senza un intervento esterno. Le intensità delle correnti non possono quindi rimanere costanti se una causa esterna non le mantiene; e questo è effettivamente ciò che accade; questa causa esterna necessaria per mantenere l'intensità della corrente è l'energia fornita dalla batteria.

Preciso ulteriormente il mio pensiero; anche se la posizione relativa dei due circuiti non variasse, le correnti potrebbero essere mantenute solo ottenendo energia dalla batteria. Questa energia destinata a vincere la resistenza dei circuiti si trova sotto forma di calore Joule.

Ma non è tutto ciò che intendo. Se i circuiti fossero conduttori perfetti, l'intensità delle correnti potrebbe rimanere costante anche senza il contributo della batteria, a patto che la posizione di questi circuiti non vari.

Se invece la posizione dei circuiti varia (anche se li supponiamo assolutamente privi di resistenza), l'intensità non può rimanere costante senza l'intervento della batteria. Infatti, l'equazione di Lagrange ci dà,

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq'_b} = Q_b$$

e qui,

$$Q_b = E_b - R_b i_b$$

essendo  $E_b$  la forza elettromotrice della pila del primo circuito,  $i_b = q'_b$  l'intensità corrispondente,  $R_b$  la resistenza del circuito. Se il circuito è un conduttore perfetto e se la pila non interviene, si avrà

$$E_b = R_b = 0$$

da cui

$$Q_b = 0$$

e di conseguenza

$$\frac{dT}{dq'_b} = p_b = C^{te}$$

Anche  $p_c$  sarà una costante. I momenti  $p_b$  e  $p_c$  dipendono da  $q'_b$  e  $q'_c$  e dalle  $q_a$ ; se questi momenti sono costanti e se la  $q_a$  variano, anche le  $q'_b$  e le  $q'_c$  dovranno a loro volta variare.

Nel caso reale, i circuiti hanno una resistenza finita e bisogna sempre avere energia dalla batteria, solo che se i circuiti non si muovono tale energia è uguale al calore Joule; se si muovono è maggiore o minore perché la forza elettromotrice di induzione si somma a quella della batteria.

Passiamo ora all'apparato di Lord Kelvin.

Le intensità sono rappresentate dagli integrali della forma

$$\frac{1}{4\pi} \int (u dx + v dy + w dz)$$

Per il teorema di Helmholtz, questi integrali rimangono costanti senza l'intervento di alcuna forza esterna.

Ciò ci avverte già che gli integrali che rappresentano le intensità sono momenti e non velocità.

Con le nostre notazioni, conviene quindi designarli con  $p_b$  e  $p_c$  di modo che se l'energia  $T$  è espressa in funzione delle intensità e della  $q_b$ ,  $T$  sarà una funzione di  $p_b$ ,  $p_c$  e delle  $q_a$ .

L'equazione (b) diviene allora

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a \quad (6)$$

Questo risultato è, del resto, una semplice conseguenza del principio di conservazione dell'energia. Sia infatti  $\delta q_a$  l'incremento virtuale di  $q_a$ , il lavoro virtuale delle forze esterne sarà

$$\sum Q_a \delta q_a$$

Si dovrà quindi avere

$$\sum Q_a \delta q_a = \delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial T}{\partial p_b} \delta p_b + \frac{\partial T}{\partial p_c} \delta p_c$$

Ma siccome gli integrali  $p_b$  e  $p_c$  sono costanti per il teorema di Helmholtz,  $\delta p_b$  e  $\delta p_c$  sono nulli e rimane

$$\sum Q_a \delta q_a = \sum \frac{\partial T}{\partial q_a} \delta q_a$$

o identificando

$$Q_a = \frac{\partial T}{\partial q_a}$$

Il confronto delle equazioni (4) e (6) mostra che vi è inversione, da cui la conclusione seguente:

*Se c'è un'inversione nel dispositivo di Lord Kelvin, è perché le intensità sono rappresentate da momenti, mentre avrebbero dovuto essere rappresentate da velocità.*

Nell'esperimento di Bjerknes e in quello di Lord Kelvin la causa dell'inversione è analoga, ma per così dire inversa.

## Forma definitiva della teoria di Larmor

Le righe precedenti sono la riproduzione quasi letterale di quattro articoli pubblicati su *L'Eclairage Électrique* (vol. III, nn. 14 e 20; vol. V, nn. 40 e 48). Le notazioni sono state modificate solo per armonizzarle con quelle utilizzate nel presente volume; e d'altro canto sono stati eliminati i passaggi che avrebbero potuto creare ridondanza.

Da quando sono apparsi questi articoli, il signor Larmor ha completato la sua teoria e le ha dato la sua forma definitiva. Lo fece appropriandosi delle ipotesi del signor Lorentz e combinandole con le proprie.

Torniamo alle equazioni di Lorentz,

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi \left( \rho\xi + \frac{df}{dt} \right) \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi \left( \rho\eta + \frac{dg}{dt} \right) \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi \left( \rho\zeta + \frac{dh}{dt} \right) \end{cases} \quad (1)$$

che esprimono ciò che avviene all'interno di uno ione e che nel vuoto (cioè per  $\rho = 0$ ) si confondono con quelle di Maxwell.

In queste equazioni  $\rho$  rappresenta la densità dello dell'elettricità trasportata dallo ione;  $\xi, \eta, \zeta$  la velocità dello ione;  $\alpha, \beta, \gamma$  la forza magnetica (cioè, secondo Larmor, la velocità dell'etere);  $f, g, h$  lo spostamento elettrico (cioè, secondo Larmor, la coppia sviluppata nell'etere dall'elasticità rotazionale di Lord Kelvin).

L'energia magnetica

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad (2)$$

rappresenta sempre la forza viva dell'etere.

Abbiamo poi le tre equazioni di Lorentz

$$\begin{cases} 4\pi V^2 \left( \frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy} \right) = \frac{d\alpha}{dt} \\ 4\pi V^2 \left( \frac{dh}{dx} - \frac{df}{dz} \right) = \frac{d\beta}{dt} \\ 4\pi V^2 \left( \frac{df}{dy} - \frac{dg}{dx} \right) = \frac{d\gamma}{dt} \end{cases} \quad (3)$$

e l'equazione che definisce l'energia elettrica

$$U = 2\pi V^2 \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau \quad (4)$$

la quale non è altro che l'energia dovuta all'elasticità rotazionale.

Siano  $X, Y, Z$  le componenti dello spostamento dell'etere in modo tale che

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dX}{dt} \\ \beta &= \frac{dY}{dt} \\ \gamma &= \frac{dZ}{dt} \end{aligned}$$

e poniamo

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 4\pi L \\ \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 4\pi M \\ \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 4\pi N \end{cases}$$

$L, M, N$  sono proporzionali alla rotazione di una piccola massa di etere attorno al punto trasportato.

Nella teoria dell'etere girostatico di Lord Kelvin nella sua forma primitiva, la coppia  $f, g, h$  causata dalla rotazione era proporzionale a questa rotazione, cioè a  $L, M, N$ .

Ponendo allora,

$$\begin{aligned} f &= L \\ g &= M \\ h &= N \end{aligned}$$

si trova,

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2 Z}{dydt} - \frac{d^2 Y}{dzdt} = 4\pi \frac{dL}{dt} = 4\pi \frac{df}{dt}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi \frac{dg}{dt} \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

cioè ritroviamo le equazioni (1) *nell'etere libero*.

Ma consideriamo una superficie chiusa situata interamente nell'etere libero ma contenente al suo interno ioni e di conseguenza cariche elettriche la cui somma algebrica non è nulla; formiamo l'integrale,

$$\int (lf + mg + nh) d\omega \quad (5)$$

ed estendiamo a tutti gli elementi  $d\omega$  di questa superficie, essendo  $l, m, n$  i coseni direttori dell'elemento  $d\omega$ .

Questo integrale dovrebbe essere nullo se avessimo tutto l'etere libero

$$\begin{cases} f = L \\ g = M \\ h = N \end{cases}$$

D'altra parte, non può essere nullo, poiché è proporzionale alla carica elettrica totale contenuta al suo interno e abbiamo supposto questa carica diversa da zero.

È questa difficoltà, come abbiamo visto, che obbliga Larmor a modificare la teoria primitiva di Lord Kelvin per adattarla ai fenomeni elettrici.

Supponiamo allora

$$\begin{cases} f = L - L_0 \\ g = M - M_0 \\ h = N - N_0 \end{cases}$$

dove  $L_0, M_0, N_0$  sono costanti; allora la coppia  $(f, g, h)$  causata dall'elasticità rotazionale non tende più a riportare la piccola massa di etere, su cui è esercitata, alla sua orientazione iniziale (orientazione che sarebbe definita dalle equazioni  $L = 0, M = 0, N = 0$ ) ma ad una orientazione diversa che si può chiamare la nuova orientazione di equilibrio (e che è definita dalle equazioni  $L = L_0, M = M_0, N = N_0$ ).

Questa coppia non è più proporzionale all'angolo di cui questa massa devia dalla sua orientazione iniziale, ma all'angolo di cui devia dalla sua nuova orientazione di equilibrio.

L'energia elastica mantiene ovviamente la stessa espressione. Si avrà ancora,

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2Z}{dydt} = 4\pi \frac{dL}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d^2Z}{dzdt} = 4\pi \frac{dM}{dt} \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d^2Y}{dxdt} = 4\pi \frac{dN}{dt} \end{cases}$$

di modo che le (1) diventano,

$$\begin{cases} \frac{dL}{dr} = \rho\xi + \frac{df}{dt} \\ \frac{dM}{dt} = \rho\eta + \frac{dg}{dt} \\ \frac{dN}{dt} = \rho\zeta + \frac{dh}{dt} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \rho\xi = \frac{dL_0}{dt} \\ \rho\eta = \frac{dM_0}{dt} \\ \rho\zeta = \frac{dN_0}{dt} \end{cases}$$

da cui si conclude:

*Nell'etere libero la "nuova orientazione di equilibrio" non varia; né varia in uno ione a riposo; ma varia negli ioni in movimento.*

Non dev'essere tornare alle equazioni (3) che esprimono, secondo il modo di vedere di Larmor, che l'accelerazione dell'etere è proporzionale alla forza prodotta dall'azione delle coppie elastiche.

Ma si deve ritornare all'integrale (5); questo integrale è uguale a

$$- \int (lL_0 + mM_0 + nN_0) d\omega$$

essa varia quindi al variare di  $L_0, M_0, N_0$ , cioè quando uno ione portatore di elettricità attraversa la superficie a cui è esteso l'integrale; cioè infine quando si fa variare la carica elettrica totale situata all'interno della superficie. Questo spiega come l'integrale possa essere proporzionale a questa carica.

In sintesi, secondo l'ipotesi di Larmor, il passaggio degli ioni attraverso l'etere modifica le condizioni di elasticità rotazionale di questo etere.

Questa azione dello ione sull'etere deve essere accompagnata da una reazione dell'etere sullo ione. È probabilmente questa reazione a dare origine alle forze meccaniche a cui è sottoposta la materia in un campo elettromagnetico.

Resta da spiegare in dettaglio il meccanismo di questa azione e di questa reazione.

È qui che comincia la difficoltà. Larmor, come Lorentz, non rispetta il principio di uguaglianza di azione e reazione. La difficoltà è addirittura aumentata. Lorentz se la cavò dando per scontato

che il principio, apparentemente violato se si considerava solo la materia, sarebbe stato ristabilito se si consideravano sia la materia sia l'etere.

Ciò andava bene, perché Lorentz non fece alcuna ipotesi sulla velocità dell'etere. Ma Larmor sì, poiché secondo lui questa velocità è rappresentata in direzione e intensità dalla forza magnetica. È facile vedere allora che la compensazione che dovrebbe aver luogo tra le azioni e le reazioni reciproche della materia e dell'etere non avviene.

Abbiamo visto sopra, nei capitoli dedicati alla teoria di Lorentz, quali valori dovevano avere le componenti della velocità dell'etere affinché questa compensazione avesse luogo e questi valori, lungi dall'essere proporzionali ad  $\alpha, \beta, \gamma$  erano proporzionali a

$$\beta h - \gamma g \quad \gamma f - \alpha h \quad \alpha g - \beta f$$

Un semplice esempio ci aiuterà a comprendere meglio la natura della difficoltà. Consideriamo un corpo qualsiasi, ad esempio un pezzo di vetro: sarà trasportato dal moto della Terra; se l'etere non fosse trascinato, il nostro corpo si troverebbe in moto relativo rispetto all'etere. Tutto dovrebbe quindi avvenire come se fosse attraversato da una corrente di etere. Ma, secondo la teoria di Larmor, una corrente di etere è un campo magnetico. Il nostro pezzo di vetro dovrebbe quindi comportarsi come se si trovasse in un campo magnetico; dovrebbe ad esempio presentare il fenomeno della polarizzazione rotatoria magnetica.

Si dirà che l'effetto non si verifica, perché la velocità dell'etere è molto grande in un campo magnetico, una velocità di 30 km:sec. corrisponde a un campo molto debole? Ma, secondo un esperimento di Lodge citato sopra, la velocità dell'etere in un campo magnetico dovrebbe al contrario essere molto bassa.



# Indice

<b>I. Le teorie di Maxwell e la teoria elettromagnetica della luce</b>	<b>7</b>
1. Formule dell'elettrostatica	9
2. Teoria dello spostamento elettrico di Maxwell	17
3. Teoria dei dielettrici di Poisson - Come si può collegare a quella di Maxwell	29
4. Spostamento dei conduttori sotto l'azione delle forze elettriche - Teoria particolare di Maxwell	47
5. Elettrocinetica	53
6. Magnetismo	57
7. Elettromagnetismo	65
8. Elettrodinamica	77
9. Induzione	89
10. Equazioni del campo magnetico	101
11. Teoria elettromagnetica della luce	105
12. Polarizzazione rotatoria magnetica	127
<b>II. Teorie elettrodinamiche di Ampère, Weber e Helmholtz</b>	<b>147</b>
<b>III. Nuove teorie elettrodinamiche - Teoria di Hertz e di Lorentz</b>	<b>211</b>
<b>IV. A proposito della teoria di Larmor</b>	<b>349</b>